南开哲学教材系列

模态逻辑

李娜 编著

sophy Phil

Philosoph

南開大學出版社

模态逻辑

李 娜 编著

南开大学出版社
天 津

图书在版编目(CIP)数据

模态逻辑 / 李娜编著. —天津：南开大学出版社，2015.2

南开哲学教材系列

ISBN 978-7-310-04760-4

Ⅰ. ①模… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①模态逻辑—高等学校—教材 Ⅳ. ①B815.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 027610 号

南开大学出版社出版发行

出版人:孙克强

地址:天津市南开区卫津路 94 号　邮政编码:300071

营销部电话:(022)23508339　23500755

营销部传真:(022)23508542　邮购部电话:(022)23502200

*

天津泰宇印务有限公司印刷

全国各地新华书店经销

*

2015 年 2 月第 1 版　2015 年 2 月第 1 次印刷

210×148 毫米　32 开本　8.25 印张　2 插页　236 千字

定价:20.00 元

如遇图书印装质量问题,请与本社营销部联系调换,电话:(022)23507125

序

在非经典逻辑中，模态逻辑是发展最成熟的一个分支，也是许多非经典逻辑的基础。近几年来，我和我的学生们一起读了以下的模态逻辑书籍：

1. Sally Pojkorn.First steps in Modal Logic. Cambridge University Press, 1994.

2. G.E. Hughes & M. J. Cresswell. A New Introduction To Modal Logic. Routledge, 1996.

3. Patrick Blackburn&Maarten de Rijke.Modal Logic. Cambridge University Press, 2001.

4. Johan van Benthem.Modal Logic.CSLI PUBLICATIONS, 2010.

不过，我感觉 Sally Pojkorn 那本模态逻辑最简洁。所以，在本书的编写过程中，我主要参考了 Sally Pojkorn 的模态逻辑的Ⅰ-Ⅳ和Ⅴ-Ⅵ的部分内容。严格地说，本书介绍以经典的命题逻辑为基础的模态命题逻辑。

本书的三个重要特征：

1. 简明扼要。

2. 在单模态语言的基础上，引入和使用多模态语言。

3. 介绍了一些模态逻辑中目前比较流行的概念和方法，如：加标转移结构、互模拟等。

由于水平所限，书中难免存在不妥和错误之处，欢迎读者批评指正。

李娜

2014 年 6 月

南开大学出版社网址：http://www.nkup.com.cn

投稿电话及邮箱：022-23504636　QQ：1760493289
QQ：2046170045(对外合作)
邮购部：022-23507092
发行部：022-23508339　Fax：022-23508542

南开教育云：http://www.nkcloud.org

App：南开书店 app

南开教育云由南开大学出版社、国家数字出版基地、天津市多媒体教育技术研究会共同开发，主要包括数字出版、数字书店、数字图书馆、数字课堂及数字虚拟校园等内容平台。数字书店提供图书、电子音像产品的在线销售；虚拟校园提供 360 校园实景；数字课堂提供网络多媒体课程及课件、远程双向互动教室和网络会议系统。在线购书可免费使用学习平台，视频教室等扩展功能。

目　　录

第一章　命题逻辑概述

在命题逻辑中，起决定作用的是逻辑联结词。因此，命题逻辑常被看作是在某个特定的语境中，对自然语言联结词

并非，

并且，

或者，

如果……那么……，

当且仅当

等的一种分析。然而，这种分析不涉及这些联结词在自然语言中的所有可能的用法，只涉及它们在“逻辑论证”中的用法。在“逻辑论证”中，这些联结词的意义由真值函项的方法来确定。

为了使这方面更清晰，本书采用一种抽象的但是严格定义的形式语言——命题语言进行分析。

然而，这种分析通常包括两部分。第一部分是语义学。它表明：怎样给这种语言的句子赋予真值，然后又怎样精确地刻画这些语句集的“逻辑后承”的概念。这部分的分析使用一种标准语义学，即：它参考了这个语言的联结词符号的初始的意义（当然，是指联结词：并非，并且，……）。第二部分是命题演算。它表明：在这种语言中，“逻辑后承”的概念怎样由某种组合操作进行模拟。这样做是完全抽象的，不涉及任何初始符号的意义。这种模拟可以用几种不同的方式来完成，每一种方式使用一种不同风格的形式系统。

这种分析的最后是完全性的证明。首先证明：所选择的形式系统是可靠的，即：在形式系统内可模拟的东西都是一个逻辑后承；其次证明：所选择的形式系统是足够的，即：每个逻辑后承在该形式系统

内都是可模拟的。

本章将给出一种经典的、二值命题逻辑的简要概述。在此基础上，将它扩展到模态逻辑。

1.1　命题语言

我们要做的第一件事就是定义一种抽象的、但是严格构造的命题语言。命题语言的构造要从某些特定的初始符号开始，它包括命题变项、联结词和标点符号。把这些初始符号以特定的方式联结起来就会形成公式。联结词原本是表示英语的联结词，如：not, if…then…等。由于联结词需要某些事情去联结，那么命题变项就提供了这一过程的起点。标点符号能使公式具有精确性，用它们来确保公式的唯一可读性。

命题语言$\mathcal{L}_0$的初始符号：

1. 命题变项和个体常项　一个固定的可数命题变项集 Var，Var 中的元素有 P,Q,R,⋯以及个体常项⊤和⊥。

2. 命题联结词

$$\neg,\wedge,\vee,\rightarrow$$

其中¬是一元命题联结词，∧、∨和→都是二元命题联结词。

3. 标点符号

“(” 和 “)”,

其中“(”是左括号，“)”是右括号。

命题公式按照下面的方式构造。

1.1 定义　命题语言$\mathcal{L}_0$的公式可递归地使用如下条款得到：

1. 原子公式　每个命题变项 $P\in$ Var 和每个常项⊤与⊥都是一个公式。

2. 命题公式　如果θ,ψ,ϕ是公式，则下面的每一种形式

$$\neg\phi,(\theta\wedge\psi),(\theta\vee\psi),(\theta\rightarrow\psi)$$

都是公式。

令 Form($\mathcal{L}_0$)是所有命题公式的集合。

Var 的可数性是对这个集合大小的一种限制。因此，它也可以表

示成下面的形式：

$$P_0,P_1,P_2,P_3,\cdots,P_n,\cdots。$$

然而，以后你就会发现可数性这个词的意义以及它是如何产生某些结论的。

注意：公式由一个递归程序定义。这意味着关于公式的某些事实能够通过结构归纳法得到证明。

例如，假定Φ是由初始符号的有穷符号串构成的一个集合，并且假定我们知道：

(0) Φ包含所有的命题变项和两个常项⊤和⊥。

(¬) 对所有的公式θ，

$$\theta\in\Phi \Rightarrow \neg\theta\in\Phi。$$

(∗) 对所有的公式θ和φ，

$$\theta,\varphi\in\Phi \Rightarrow (\theta*\varphi)\in\Phi$$

（∗表示任意的二元联结词→、∧和∨）。

那么我们可以结论：Φ包含所有的公式。否则，假如Φ不包含所有的公式，即：至少存在一个公式ϕ使得$\phi\notin\Phi$。考虑ϕ中所包含最小数目符号的情况，由(0)，这个ϕ不可能是常项或者命题变项。因此，ϕ一定具有如下的形状

$$\neg\theta \quad 或者 \quad (\theta*\varphi)。$$

其中，θ和φ是公式并且∗是联结词。但是由(¬)或者(∗)都将导致矛盾。因此，我们的假设是错的。故，不存在不属于Φ的公式。

在书写某些特殊的公式时，有时我们可以省略各种括号并且还可以用各种其他的符号来帮助阅读。但是，这样写出的符号串本身并不是公式，只是公式的一种缩写。如：

$$(\theta\leftrightarrow\varphi)=_{df}((\theta\to\varphi)\wedge(\varphi\to\theta))$$

这里，我们将$(\theta\leftrightarrow\varphi)$作为$((\theta\to\varphi)\wedge(\varphi\to\theta))$的缩写。

1.2　二值的语义学

令 2={0,1}并且把 2 中的元素作为“真值对象”来看待。即：把 0

看作假，把 1 看作真。每个联结词都有一个在 2 上的相关运算。

一元联结词¬的运算：

$$\neg：2 \longrightarrow 2$$

由下式给出

对每个 $x \in 2, \neg(x)=1-x$。

二元联结词$*(\wedge,\vee,\rightarrow)$的运算：

$$*：2\times 2 \longrightarrow 2$$

由下面的真值表给出。

		*		
x	y	→	∧	∨
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	0

这个定义将符号

¬　　∧　　∨　　→

分别解释为

并非　　并且　　或者　　如果……那么……。

这样一来，利用基本的语义概念可以计算出任一公式θ的真值，但这只能在命题变项的真值已知的前提下进行。其过程如下：

1.2 定义　一个赋值是一个映射

$$\nu：\mathrm{Var} \longrightarrow 2,$$

即：

$\nu(P)=1$ 或者 0，二者必具其一并且只具其一。

对每个常项⊤和⊥，

$$\nu(\top)=1，\nu(\bot)=0。$$

对每个这样的赋值ν，都有一个由ν诱导出的映射

$$[\cdot]\nu：\mathrm{Form} \longrightarrow 2,$$

施归纳于公式的结构，它满足下面的条款。

（个体常项）对每个个体常项⊤和⊥，

$$[\top]\nu = \nu(\top)，[\bot]\nu = \nu(\bot)。$$

（命题变项）对每个命题变项 P，

$$[P]\nu = \nu(P)。$$

（¬）对每个公式θ，

$$[\neg\theta]\nu = 1-[\theta]\nu。$$

（*）对所有公式θ,ψ

$$[(\theta*\psi)]\nu = [\theta]\nu*[\psi]\nu$$

（*表示任意的二元联结词）。

使用$[\cdot]\nu$时，在不引起混淆的情况下，通常下标ν可以省略。此时，由ν诱导出的映射$[\cdot]$满足：

（个体常项）对每个个体常项⊤和⊥，

$$[\top]=1，[\bot]=0。$$

（命题变项）对每个命题变项 P，

$$[P]= \nu (P)。$$

（¬）对每个公式θ，

$$[\neg\theta]=1-[\theta]。$$

（*）对所有公式θ,ψ

$$[(\theta*\psi)]=[\theta] * [\psi]$$

（*表示任意的二元联结词）。

1.3 定义　如果$[\phi]=1$，则称赋值ν是公式φ的一个模型，或者φ相对于ν是真的。令Φ是一个公式集，对每个$\phi\in\Phi$，如果$[\phi]=1$，则称赋值ν是公式集Φ的一个模型。

现在，我们可以精确定义“逻辑后承”的概念。

1.4 定义　令Φ是一个公式集并且φ是一个公式，符号

$$\Phi\vDash\phi$$

表示：Φ的每个模型也是φ的模型。当上述条件成立时，称φ是Φ的一个语义后承。如果公式φ满足

$$\vDash\phi$$

则称φ是重言式（即：对所有的赋值，φ都是真的）。

1.3 证明论

命题演算的目的，就是通过建立一个合适的形式系统，对语义后承关系⊨给出一种语形的或者语法的描述或模拟。这可以通过不同的方式来完成。本节所描述的形式系统 **PC** 对后面把它推广到模态的情况是一种较为方便的系统。这个系统是一种希尔伯特型的系统。为此，我们首先给出逻辑公理的集合。这些公理都是重言式并且通常包含如下形状

$$\text{(k)}\quad \phi\to(\theta\to\phi)$$

$$\text{(s)}\quad (\theta\to(\psi\to\phi))\to((\theta\to\psi)\to(\theta\to\phi))$$

$$(\neg)\quad (\neg\theta\to\psi)\to((\neg\theta\to\neg\psi)\to\theta)$$

的所有公式。我们只使用一个推理规则，即：分离规则

$$\text{(MP)}\quad \frac{\theta,\theta\to\phi}{\phi}$$

利用这些公理和推理规则，就可以产生证明论的后承关系⊢。

注意：用公理而不是附加推理规则去处理联结词的方法是很重要的。在命题的情况下，公理与推理规则交替使用是相对容易的。然而，在模态的情况下，这种方式的运用就比较困难。所以，我们把自己的系统建立在只有一个规则的基础上。

1.5 定义 令Φ是一个任意的公式集。

1. 来自Φ的一个（证明的）演绎是一个公式序列

$$\phi_0,\phi_1,\cdots,\phi_n$$

使得序列中的每个公式$\phi_i(0\leqslant i\leqslant n)$，下面的情况至少有一个成立。

(hyp) $\phi_i\in\Phi$。

(ax) ϕ_i是一条逻辑公理。

(MP) ϕ_i是由排在前面的公式ϕ_j,ϕ_k（$j,k<i$）并满足$\phi_k=(\phi_j\to\phi_i)$应用 MP 规则得到的。

2. 对每个公式φ，如果存在一个来自Φ的（证明的）演绎并且φ恰好是这个演绎的最后一个公式，则关系

$$\Phi\vdash\phi$$

成立，并称它为逻辑后承概念的模拟，或者称ϕ是Φ的一个逻辑后承。当$\Phi=\varnothing$时，即：$\vdash \phi$，称ϕ是空集的一个逻辑后承。特别地，称ϕ是系统的一条定理。

然而，在这个系统中，演绎定理成立。即：对每个公式集Φ和一对公式θ和ϕ，下面的关系

$$\Phi,\theta \vdash \phi \Rightarrow \Phi \vdash \theta\to\phi$$

成立。这是一条很重要的性质，但它在大多数模态系统中不成立。

1.6 例　用公理(k)和(s)以及(MP)规则演绎出下面的每个公式。

1. $\vdash \phi\to\phi$

2. $\vdash(\psi\to\phi)\to((\theta\to\psi)\to(\theta\to\phi))$

证明　1 的证明如下。

① $(\phi\to((\phi\to\phi)\to\phi))\to((\phi\to(\phi\to\phi))\to(\phi\to\phi))$　(s)

② $\phi\to((\phi\to\phi)\to\phi)$　(k)

③ $(\phi\to(\phi\to\phi))\to(\phi\to\phi)$　(①,②MP)

④ $\phi\to(\phi\to\phi)$　(k)

⑤ $\phi\to\phi$　(③,④MP)

2 的证明如下。

① $(\theta\to(\psi\to\phi))\to((\theta\to\psi)\to(\theta\to\phi))$　(s)

② $((\theta\to(\psi\to\phi))\to((\theta\to\psi)\to(\theta\to\phi)))\to$
$((\psi\to\phi)\to((\theta\to(\psi\to\phi))\to((\theta\to\phi)\to(\theta\to\phi))))$　(k)

③ $(\psi\to\phi)\to((\theta\to(\psi\to\phi))\to((\theta\to\phi)\to(\theta\to\phi)))$　(①,②MP)

④ $((\psi\to\phi)\to((\theta\to(\psi\to\phi))\to((\theta\to\phi)\to(\theta\to\phi))))\to$
$((\psi\to\phi)\to(\theta\to(\psi\to\phi)))\to((\psi\to\phi)\to((\theta\to\phi)\to(\theta\to\phi)))$　(s)

⑤ $((\psi\to\phi)\to(\theta\to((\psi\to\phi)))\to((\psi\to\phi)\to((\theta\to\psi)\to(\theta\to\phi)))$　(③,④MP)

⑥ $((\psi\to\phi)\to(\theta\to((\psi\to\phi)))$　(k)

⑦ $(\psi\to\phi)\to((\theta\to\psi)\to(\theta\to\phi))$　(⑤,⑥MP)

1.4 完全性

证明形式系统是可靠的，也就是证明下面的蕴涵关系

$$\Phi \vdash \phi \Rightarrow \Phi \vDash \phi$$

成立。这一点可以通过施归纳于演绎的长度来完成。

完全性的证明较长，而且可以用几种不同的方式来完成。在此，我们勾画一个证明，这个证明以后将会成为模态系统对应证明的基础。但是，为了证明完全性，我们还需要下面的定义和定理。

1.7 定义 如果

$$\Phi \nvdash \bot$$

成立，那么称公式集Φ是一致的。令

$$\mathbf{CON}=\{\Phi|\Phi\text{是一致的公式集}\}。$$

1.8 定理 CON 具有如下的性质：

1. 有穷特性：对每个公式集Φ，Φ∈**CON** 当且仅当对每个有穷子集Ψ，Ψ⊆Φ，都有Ψ∈**CON**。

2. 基本一致性：对每个命题变项 P，{P,¬P}∉**CON** 并且{⊥}∉**CON**。

3. 合取保持性：对所有的θ,ψ和Φ并且Φ∈**CON**，下面的结论成立：

$$(\theta\wedge\psi)\in\Phi \Rightarrow \Phi\cup\{\theta,\psi\}\in\mathbf{CON},$$

$$\neg(\theta\vee\psi)\in\Phi \Rightarrow \Phi\cup\{\neg\theta,\neg\psi\}\in\mathbf{CON},$$

$$\neg(\theta\to\psi)\in\Phi \Rightarrow \Phi\cup\{\theta,\neg\psi\}\in\mathbf{CON}。$$

4. 析取保持性：对所有的θ,ψ和Φ并且Φ∈**CON**，下面的结论成立：

$$(\theta\vee\psi)\in\Phi \Rightarrow \Phi\cup\{\theta\}\in\mathbf{CON}\text{ 或者}\Phi\cup\{\psi\}\in\mathbf{CON},$$

$$\neg(\theta\wedge\psi)\in\Phi \Rightarrow \Phi\cup\{\neg\theta\}\in\mathbf{CON}\text{ 或者}\Phi\cup\{\neg\psi\}\in\mathbf{CON},$$

$$(\theta\to\psi)\in\Phi \Rightarrow \Phi\cup\{\neg\theta\}\in\mathbf{CON}\text{ 或者}\Phi\cup\{\psi\}\in\mathbf{CON}。$$

5. 否定保持性：对所有的θ和Φ，

$$\neg\neg\theta\in\Phi\in\mathbf{CON} \Rightarrow \Phi\cup\{\theta\}\in\mathbf{CON}。$$

定理 1. 8 的证明留给读者。