

电子学基础系列



ELECTRONICS

现代工程数学

王建军 编著

复旦大学出版社

XIANDAI GONGCHENG SHUXUE XIANDAI GONGCHENG SHUXUE

电子与

E L E C

现代工程数学

王建军 编著

XIANDAI GONGCHENG SHUXUE XIANDAI GONGCHENG SHUXUE

复旦大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

现代工程数学/王建军编著. —上海:复旦大学出版社,2014.9
(复旦博学·电子学基础系列)
ISBN 978-7-309-10932-0

I. 现… II. 王… III. 工程数学 IV. TB11

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第195797号



现代工程数学
王建军 编著
责任编辑/梁 玲

复旦大学出版社有限公司出版发行
上海市国权路579号 邮编:200433
网址:fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com
门市零售:86-21-65642857 团体订购:86-21-65118853
外埠邮购:86-21-65109143
上海市崇明县裕安印刷厂

开本 787×960 1/16 印张 27.75 字数 473 千
2014年9月第1版第1次印刷

ISBN 978-7-309-10932-0/T·523
定价:58.50元

如有印装质量问题,请向复旦大学出版社有限公司发行部调换。
版权所有 侵权必究

作者简介

王建军，男，1960年10月出生。任教于复旦大学电子工程系。长期从事教学科研工作，曾任韩国高丽大学高级访问学者。主要研究领域为信息安全、数字图像处理，发表论文50余篇，主持国家自然科学基金面上项目“图像稀疏表示在统计不可检测安全隐写中的应用研究”及多项科研工作。

内 容 提 要

“现代工程数学”是以讨论复变函数、积分变换、特征函数、微分方程及其应用为主要内容的专业基础课。全书共10章，前5章主要讨论复变函数的基本概念、解析函数、柯西积分、复变函数级数、留数定理在实变函数积分中的应用、傅立叶分析；后5章主要讨论常微分方程、拉普拉斯变换、微分方程的级数解法和特征函数、波动方程的建立和求解方法、热传导方程的建立和求解方法、拉普拉斯方程的解法及应用，并给出了相应数学软件Maple的程序代码。

在教材的编写过程中，作者充分吸收国内外优秀教材精华，并结合复旦大学电子工程及相关专业的实际需要进行编写，是一本适合电子工程类及工科各专业的工程数学教材。

前 言

本书是在复旦大学电子工程系多年教学实践基础上编写而成,编写本书的目的是由于数学方法在现代工程技术、社会经济及其他领域的应用越来越广泛,因此理论与现代计算工具相结合是必要的.

为了实现上述目的,在编写过程中,作者十分注意数学理论与实际应用的结合.在经典数学理论的基础上增加了计算机仿真实例,如 Maple, Mathematica 及 Matlab 常用的数学软件.针对工科学生的特点,为了使学生掌握工程数学的基本原理和方法,以及以下 3 个方面的内容:①将实际问题转化为数学模型,这些模型可以是代数方程、微分方程或其他数学表达式;②用合适的数学方法求解数学模型;③解释得到的数学结果的物理意义.

作者在编写过程中注重以下 5 个方面:

(1) 遵循以应用为主、侧重方法的原则,着重介绍数学理论及其在实际中的应用.例如在介绍微分方程的级数解及特征函数时,除了深入浅出地介绍基本理论外,还列举大量的应用实例及计算机仿真结果.

(2) 在介绍拉普拉斯变换和傅立叶变换时,对基本内容进行适当调整,增加 Maple 软件在求积分变换与反变换中的应用.

(3) 在介绍偏微分方程时,详细地介绍方程的建立、分离变量法,以及拉普拉斯变换和傅立叶变换在解偏微分方程中的应用,同时给出参数的变化对方程解的影响的仿真曲线.

(4) 问题的引入和范例体现应用的特点,许多例子来自电路应用,再用计算机软件去仿真实际问题,这样可以提高学生的学习兴趣,便于理解和接受以便将来的应用.

(5) 为了培养学生分析问题和解决问题的能力及增强学习的自信心,各章后

面给出习题与答案,作者用 Maple 软件对这些答案进行了验证.

本书在编写过程中得到复旦大学电子工程系广大师生的帮助,作者在此表示衷心的感谢.

由于作者水平有限,不妥之处和错误在所难免,恳切希望专家、同行和读者批评指正.

编者

2014 年 4 月

目 录

第 1 章 复数及复变函数	1
§ 1.1 复数及其几何表示	1
1.1.1 复数	1
1.1.2 复数的代数运算	1
§ 1.2 复平面	2
1.2.1 复数的模	3
1.2.2 共轭复数	3
§ 1.3 复数的无序性	5
§ 1.4 复数的辐角和它的极坐标表示	6
1.4.1 乘积与商	7
1.4.2 幂与方根	9
§ 1.5 集合的复数表示	10
§ 1.6 复变函数及映射	15
1.6.1 复变函数	15
1.6.2 映射	16
§ 1.7 复变函数的极限和连续性	18
1.7.1 函数的极限	18
1.7.2 函数的连续性	20
§ 1.8 复变函数的导数与微分	20
1.8.1 导数的定义	20
1.8.2 微分的定义	21
1.8.3 可导的必要条件	22
§ 1.9 柯西-黎曼条件的应用	24
1.9.1 可导的充分条件	26
1.9.2 求导法则	27
§ 1.10 解析函数	29
1.10.1 函数解析的充要条件	29
1.10.2 函数解析与可导、连续、极限的关系	31

§ 1.11 初等解析函数	32
1.11.1 指数函数	32
1.11.2 对数函数	33
1.11.3 对数函数的解析性	34
1.11.4 乘幂 a^b 与幂函数	35
1.11.5 三角函数和双曲函数	36
1.11.6 反三角函数与反双曲函数	38
§ 1.12 解析函数与调和函数的关系	39
1.12.1 解析函数与调和函数	39
1.12.2 解析函数的构建方法	40
习题 1	42
第 2 章 复变函数的积分	44
§ 2.1 复变函数积分	44
2.1.1 有向曲线的定义	44
2.1.2 复变函数积分的定义	44
2.1.3 积分存在的条件及算法	45
2.1.4 积分的性质	48
§ 2.2 原函数与不定积分	52
§ 2.3 柯西积分公式	54
§ 2.4 解析函数的高阶导数	56
习题 2	59
第 3 章 级数	61
§ 3.1 复数项级数	61
§ 3.2 级数	62
§ 3.3 复变函数项级数	65
3.3.1 一致收敛	65
3.3.2 一致收敛判别法	66
§ 3.4 幂级数	66
3.4.1 幂级数收敛和发散的判别方法	67
3.4.2 收敛圆和收敛半径	68
3.4.3 幂级数的运算和性质	69

§ 3.5 泰勒级数	71
§ 3.6 洛朗级数	75
习题 3	81
第 4 章 留数	84
§ 4.1 孤立奇点	84
4.1.1 可去奇点	84
4.1.2 极点	85
4.1.3 本性奇点	85
4.1.4 函数的零点与极点的关系	86
4.1.5 函数在无穷远点的性质和状态	88
§ 4.2 留数	90
4.2.1 留数的定义及留数定理	90
4.2.2 留数的计算规则	91
4.2.3 无穷远点的留数	94
§ 4.3 留数在定积分计算上的应用	95
4.3.1 第一类型积分: $\int_0^{2\pi} R(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$	95
4.3.2 第二类型积分: $\int_{-\infty}^{\infty} P(x)/Q(x) dx$	97
4.3.3 第三类型积分: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \cos(ax) dx (a > 0)$ 和 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} \sin(ax) dx (a > 0)$	100
4.3.4 第四类积分: 实轴上有奇点的积分计算或锯齿轮廓的 积分	101
4.3.5 第五类积分: $\int_0^{\infty} x^\alpha \frac{P(x)}{Q(x)} dx (0 < \alpha < 1)$	104
习题 4	106
第 5 章 傅立叶分析	108
§ 5.1 傅立叶级数	108
§ 5.2 周期为任意值的函数展开成傅立叶级数	115
5.2.1 任意周期的傅立叶级数	115

5.2.2 偶函数和奇函数的傅立叶级数	119
§ 5.3 傅立叶积分	120
5.3.1 傅立叶积分的性质	122
5.3.2 泊松积分公式	126
5.3.3 菲涅耳积分公式	127
5.3.4 复数形式的傅立叶积分	129
§ 5.4 傅立叶变换	130
5.4.1 线性性质	132
5.4.2 导数的傅立叶余弦和正弦变换性质	133
5.4.3 傅立叶变换	134
5.4.4 傅立叶变换性质	138
5.4.5 卷积	142
习题 5	144
第 6 章 微分方程	146
§ 6.1 可分离变量的微分方程	146
§ 6.2 一阶线性微分方程	149
§ 6.3 全微分方程	154
6.3.1 全微分方程	154
6.3.2 可变换为全微分方程的方程	160
§ 6.4 齐次微分方程	161
6.4.1 伯努利方程	163
6.4.2 黎卡提方程	165
§ 6.5 二阶线性微分方程	167
§ 6.6 常系数齐次二阶线性微分方程	169
§ 6.7 常系数非齐次二阶线性微分方程	173
6.7.1 参数变分法	173
6.7.2 待定系数法	175
6.7.3 叠加原理	180
§ 6.8 电子电路建模	181
§ 6.9 欧拉微分方程	186
习题 6	189

第 7 章 拉普拉斯变换	191
§ 7.1 拉普拉斯变换的定义	191
§ 7.2 拉普拉斯变换的线性性质	194
7.2.1 函数一阶导数的拉普拉斯变换	196
7.2.2 函数二阶导数的拉普拉斯变换	198
7.2.3 第一移位定理(s -移位定理)	201
7.2.4 单位阶跃函数和脉冲函数	203
7.2.5 第二移位定理(t -移位定理)	205
§ 7.3 函数积分的拉普拉斯变换	211
7.3.1 拉普拉斯变换的一阶导数	214
7.3.2 拉普拉斯变换的高阶导数	215
7.3.3 拉普拉斯变换的积分定理	218
§ 7.4 拉普拉斯逆变换和卷积	219
7.4.1 拉普拉斯逆变换	219
7.4.2 卷积	222
§ 7.5 冲击函数(δ 函数)	225
7.5.1 δ 函数	225
7.5.2 δ 函数的滤波特性	227
习题 7	230
第 8 章 微分方程的级数解及特征函数	234
§ 8.1 幂级数法	234
8.1.1 微分法	234
8.1.2 递归法	237
§ 8.2 弗罗宾尼斯法	242
8.2.1 常点与奇点	242
8.2.2 正则奇点与非正则奇点	243
§ 8.3 特征函数及特征函数展开式	252
§ 8.4 勒让德多项式	264
8.4.1 勒让德多项式	264
8.4.2 勒让德多项式的生成函数	267
8.4.3 勒让德多项式的递推关系	269
8.4.4 $P_n(x)$ 多项式中 x^n 项的系数公式	270

8.4.5	勒让德多项式的一般表达式	271
8.4.6	傅立叶-勒让德级数	272
8.4.7	勒让德多项式与次数低于它的多项式正交	273
8.4.8	勒让德多项式的根	277
8.4.9	多项式 $P_n(x)$ 的导数与积分公式	279
§8.5	贝塞尔函数	279
8.5.1	Γ 函数	279
8.5.2	第一类贝塞尔函数	281
8.5.3	第二类贝塞尔函数	284
8.5.4	$J_n(x)$ 的生成函数	288
8.5.5	$J_n(x)$ 的积分公式	289
8.5.6	$J_\nu(x)$ 的递推关系	291
8.5.7	$J_\nu(x)$ 函数的根	294
8.5.8	傅立叶-贝塞尔级数	297
习题8		301
第9章	偏微分方程	304
§9.1	波动方程的建立	304
§9.2	有限区间上波动方程的分离变量法(傅立叶级数解)	309
9.2.1	初始速度为零、初始位移不为零的定解问题	310
9.2.2	初始位移为零、初始速度不为零的定解问题	314
9.2.3	初始位移和初始速度都不为零的定解问题	316
9.2.4	常数 c 及初始条件对波动的影响	317
9.2.5	具有外力项的波动方程	318
§9.3	整个实轴波动方程的解法	321
9.3.1	初始速度为零、初始位移不为零时求解整个实轴波动方程	321
9.3.2	初始位移为零、初始速度不为零时求解整个实轴波动方程	323
9.3.3	整个实轴波动方程的傅立叶变换解法	325
§9.4	正半实轴波动方程的解法	328
9.4.1	傅立叶正弦或余弦变换求解正半实轴波动方程	330
9.4.2	拉普拉斯变换求解正半实轴的波动方程	331

§ 9.5 波动方程的达朗贝尔解法	333
9.5.1 波动方程的达朗贝尔解法	333
9.5.2 非齐次波动方程的达朗贝尔解法	338
习题 9	340
第 10 章 热传导方程与拉普拉斯方程	347
§ 10.1 热传导方程	347
§ 10.2 热传导方程的解法	349
10.2.1 杆两端温度为零的热传导方程的分离变量(傅立叶级数) 法	349
10.2.2 杆两端绝缘的热传导方程的分离变量(傅立叶级数)法	351
10.2.3 杆的一端向周围环境介质辐射热的分离变量法	353
10.2.4 热传导方程初始边值问题的变换	357
10.2.5 有热源的热传导方程	359
10.2.6 常数 κ 及边界条件对热传导的影响	363
10.2.7 无限介质中的热传导方程	364
10.2.8 无限介质中的热传导方程的傅立叶变换解法	365
10.2.9 正半实轴的热传导方程	366
10.2.10 正半实轴的热传导方程的傅立叶正弦变换解法	367
10.2.11 热传导方程的拉普拉斯变换解法	368
10.2.12 有界区间上热传导方程的拉普拉斯变换解法	369
10.2.13 半无界区间上热传导方程的拉普拉斯变换解法	371
§ 10.3 拉普拉斯方程	372
10.3.1 调和函数和狄利克雷问题	372
10.3.2 矩形区域的狄利克雷问题	373
10.3.3 圆盘区域的狄利克雷问题	376
10.3.4 无界区域的狄利克雷问题	378
10.3.5 上半平面的狄利克雷问题	378
10.3.6 右四分之一平面的狄利克雷问题	381
10.3.7 立方体的狄利克雷问题	383
10.3.8 实心球的稳态热传导方程	386
习题 10	389

附录	392
附录 1 Maple 软件简明用法	392
附录 2 各章习题答案与提示	397
参考文献	430

第 1 章 复数及复变函数

§ 1.1 复数及其几何表示

1.1.1 复数

在实数范围内方程 $x^2 = -1$ 是无解的, 因此引进一个新的数 i , 称为**虚数单位**, 并规定 $i^2 = -1$, 从而 i 是方程 $x^2 + 1 = 0$ 的一个根.

对于任意两个实数 x, y , 称 $z = x + iy$ 或 $z = x + yi$ 为**复数**. x, y 分别称为 z 的**实部**和**虚部**, 记作 $x = \operatorname{Re}(z)$, $y = \operatorname{Im}(z)$.

当 $x = 0, y \neq 0$ 时, $z = iy$ 称为**纯虚数**; 当 $y = 0$ 时, $z = x + 0i$, 将其看作实数 x . 两个复数相等, 是指它的实部和虚部分别相等. 复数 $z = 0$, 是指其实部和虚部都是 0, 即 $\operatorname{Re}(z) = 0, \operatorname{Im}(z) = 0$.

1.1.2 复数的代数运算

1. 复数的加法、减法和乘法

两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 和 $z_2 = x_2 + iy_2$ 的加法、减法和乘法的定义如下:

$$z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2),$$

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2),$$

称上面两式右端为 z_1, z_2 的和、差与积. 当 z_1, z_2 为实数时, 上两式与实数的运算一致.

例 1.1 求两个复数 $8 + 3i$ 和 $9 - 4i$ 的实部、虚部、和、差及乘积.

解 设 $z_1 = 8 + 3i, z_2 = 9 - 4i$, 那么

$$\operatorname{Re}(z_1) = 8, \operatorname{Im}(z_1) = 3; \operatorname{Re}(z_2) = 9, \operatorname{Im}(z_2) = -4;$$

$$z_1 + z_2 = (8 + 3i) + (9 - 4i) = 17 - i;$$

$$z_1 - z_2 = (8 + 3i) - (9 - 4i) = -1 + 7i;$$

$$z_1 z_2 = (8 + 3i)(9 - 4i) = 72 + 12 + i(27 - 32) = 84 - 5i.$$

2. 复数的除法

满足 $z_2 z = z_1$ ($z_2 \neq 0$) 的复数 $z = x + iy$, 称为 z_1 除以 z_2 的商, 记作 $z = z_1 / z_2$. 而

$$z_2 z = (x_2 + iy_2)(x + iy) = (x_2 x - y_2 y) + i(x_2 y + x_2 y) = x_1 + iy_1 = z_1,$$

于是

$$x_1 = x_2 x - y_2 y, \quad y_1 = x_2 y + x_2 y,$$

解得

$$x = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad y = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2},$$

因此

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

例 1.2 求两个复数 $8 + 3i$ 和 $9 - 4i$ 的除法.

解 设 $z_1 = 8 + 3i$, $z_2 = 9 - 4i$, 那么

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{8 + 3i}{9 - 4i} = \frac{(8 + 3i)(9 + 4i)}{(9 - 4i)(9 + 4i)} = \frac{60 + 59i}{81 + 16} = \frac{60}{97} + \frac{59}{97}i.$$

复数运算服从我们熟悉的许多实数运算法则, 如果 z_1 , z_2 和 z_3 是复数, 那么

- (1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (加法交换律);
- (2) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (乘法交换律);
- (3) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (加法结合律);
- (4) $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ (乘法结合律);
- (5) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$ (分配律);
- (6) $z + 0 = 0 + z$;
- (7) $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$.

§ 1.2 复平面

由于一个复数 $z = x + iy$ 可以由平面上的有序实数 (x, y) 唯一确定, 对于平