研究生教学用书

公共基础课系列

随机过程（第五版）

Stochastic Processes

刘次华

BOOKS FOR GRADUATE STUDENTS

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

研

公共基础课系列

随机过程

（第五版）

刘次华

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

随机过程/刘次华. —5 版. —武汉：华中科技大学出版社，2014.8
ISBN 978-7-5680-0338-4
Ⅰ.①随…　Ⅱ.①刘…　Ⅲ.①随机过程-研究生-教材　Ⅳ.①O211.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 183135 号

随机过程(第五版)　　刘次华

策划编辑：周芬娜
责任编辑：周芬娜
封面设计：刘　卉
责任校对：刘　竣
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)81321915
录　排：武汉市洪山区佳年华文印部
印　刷：武汉科源印刷设计有限公司
开　本：710mm×1000mm　1/16
印　张：12.5
字　数：265 千字
版　次：2014 年 8 月第 5 版第 1 次印刷
定　价：25.00 元

内 容 提 要

本书为研究生课程“随机过程”的教材，其主要内容有：随机过程的概念，泊松过程，马尔可夫链，连续时间的马尔可夫链，平稳随机过程，平稳过程的谱分析，时间序列分析等.

本书除介绍最基本的理论外，取材突出了实用较多的泊松过程，马尔可夫链和平稳过程. 叙述尽可能通俗，例题较多并尽力结合实际应用. 每章后面附有习题，书后附有习题解析，可供读者选用、参考.

本书可作理工科(含工程类型)硕士研究生的教材或参考书，也可供有关教学和工程技术人员参考.

Abstract

This book is primarily written for the graduate course “Stochastic processes” in Huazhong University of Science and Technology. The main topics are the concepts of Stochastic processes, Poisson processes, Markov chains, purely discontinuous Markov processes, stationary stochastic processes, spectral analysis and time series analysis.

In addition to presenting the fundamental ideas of theories, this book attempts to remarkably in Markov chains and stationary processes, which are widely applicable. Common and numerous examples are provided in each chapter. Also, each chapter ends with some exercises. Keys for reference are given at the end of the book.

The book can serve as textbook or reference for graduate students in Master degree. It can also be consulated by relevent teachers and engineers.

《研究生教学用书》序

“接天莲叶无穷碧，映日荷花别样红。”今天，我国的教育正处在一个大发展的崭新时期，而高等教育即将跨入“大众化”的阶段，蓬蓬勃勃，生机无限。在高等教育中，研究生教育的发展尤为迅速。在盛夏已临，面对池塘中亭亭玉立的荷花，风来舞举的莲叶，我深深感到，我国研究生教育就似夏季映日的红莲，别样多姿。

科教兴国，教育先行。教育在社会主义现代化建设中处于优先发展的战略地位。我们可以清楚看到，高等教育不仅被赋予重大的历史任务，而且明确提出，要培养一大批拔尖创新人才。不言而喻，培养一大批拔尖创新人才的历史任务主要落在研究生教育肩上。“百年大计，教育为本；国家兴亡，人才为基。”国家之间的激烈竞争，在今天，归根结底，最关键的就是高级专门人才，特别是拔尖创新人才的竞争。由此观之，研究生教育的任务可谓重矣！重如泰山！

前事不忘，后事之师。历史经验已一而再、再而三地证明：一个国家的富强，一个民族的繁荣，最根本的是要依靠自己，要以“自力更生”为主。《国际歌》讲得十分深刻，世界上从来就没有什么救世主，只有依靠自己救自己。寄希望于别人，期美好于外力，只能是一种幼稚的幻想。内因是发展的决定性的因素。当然，我们决不应该也决不可能采取“闭关锁国”、自我封闭、故步自封的方式来谋求发展，重犯历史错误。外因始终是发展的必要条件。正因为如此，我们清醒看到了，“自助者人助”，只有“自信、自尊、自主、自强”，只有独立自主，自强不息，走以“自力更生”为主的发展道路，才有可能在向世界开放中，争取到更多的朋友，争取到更多的支持，充分利用好外部的各种有利条件，来扎扎实实地而又尽可能快地发展自己。这一切的关键就在于，我们要有数量与质量足够的高级专门人才，特别是拔尖创新人才。何况，在科技高速发展与高度发达，而知识经济已初见端倪的今天，更加如此。人才，高级专门人才，拔尖创新人才，是我们一切事业发展的基础。基础不牢，地动山摇；基础坚牢，大厦凌霄；基础不固，木凋树枯；基础深固，硕茂葱绿！

“工欲善其事，必先利其器。”自古凡事皆然，教育也不例外。教学用书是“传道授业解惑”培育人才的基本条件之一。“巧妇难为无米之炊。”特别是在今天，学科的交叉及其发展越来越多及越快，人才的知识基础及其要求越来越广及越高，因此，我一贯赞成与支持出版“研究生教学用书”，供研究生自己主动地选用。早在1990年，本套用书中的第一本即《机械工程测试·信息·信号分析》出版时，

我就为此书写了个“代序”，其中提出：一个研究生应该博览群书，博采百家，思路开阔，有所创见。但这不等于他在一切方面均能如此，有所不为才能有所为。如果一个研究生的主要兴趣与工作不在某一特定方面，他也可选择一本有关这一特定方面的书作为了解与学习这方面知识的参考；如果一个研究生的主要兴趣与工作在这一特定方面，他更应选择一本有关的书作为主要的学习用书，寻觅主要学习线索，并缘此展开，博览群书。这就是我赞成要编写系列的“研究生教学用书”的原因。今天，我仍然如此来看。

还应提及一点，在教育界有人讲，要教学生“做中学”，这有道理；但须补充一句，“学中做”。既要在实践中学习，又要在学习中实践，学习与实践紧密结合，方为全面；重要的是，结合的关键在于引导学生思考，学生积极主动思考。当然，学生的层次不同，结合的方式与程度就应不同，思考的深度也应不同。对研究生特别是对博士研究生，就必须是而且也应该是“研中学，学中研”，在研究这一实践中，开动脑筋，努力学习，在学习这一过程中，开动脑筋，努力研究；甚至可以讲，研与学通过思考就是一回事情了。正因为如此，“研究生教学用书”就大有英雄用武之地，供学习之用，供研究之用，供思考之用。

在此，还应进一步讲明一点。作为一个研究生，来读“研究生教学用书”中的某书或其他有关的书，有的书要精读，有的书可泛读。记住了书上的知识，明白了书上的知识，当然重要；如果能照着用，当然更重要。因为知识是基础。有知识不一定有力量，没有知识就一定没有力量，千万千万不要轻视知识。对研究生特别是博士研究生而言，最为重要的还不是知识本身这个形而下，而是以知识作为基础，努力通过某种实践，同时深入独立思考而体悟到的形而上，即《老子》所讲的不可道的“常道”，即思维能力的提高，即精神境界的升华。《周易·系辞》讲了：“形而上谓之道，形而下谓之器。”我们的研究生要有器，要有具体的知识，要读书，这是基础；但更要有“道”，更要一般，要体悟出的形而上。《庄子·天道》讲得多么好：“书不过语。语之所贵者意也，意有所随。意之所随者，不可以言传也。”这个“意”，就是孔子所讲的“一以贯之”的“一”，就是“道”，就是形而上。它比语、比书，重要多了。要能体悟出形而上，一定要有足够数量的知识作为必不可缺的基础，一定要在读书去获得知识时，整体地读，重点地读，反复地读；整体地想，重点地想，反复地想。如同韩愈在《进学解》中所讲的那样，能“提其要”，“钩其玄”，以达到南宋张孝祥所讲的“悠然心会，妙处难与君说”的体悟，化知识为己之素质，为“活水源头”。这样，就可驾驭知识，发展知识，创新知识，而不是为知识所驾驭，为知识所奴役，成为计算机的存储装置。

这套“研究生教学用书”从第一本于 1990 年问世至今，在蓬勃发展中已形成了一定规模。“逝者如斯夫，不舍昼夜。”它们中间，有的获得了国家级、省部级教材奖、图书奖，有的为教育部列入向全国推荐的研究生教材。采用此书的一些兄

弟院校教师纷纷来信,称赞此书为研究生培养与学科建设作出了贡献。我们深深感激这些鼓励,“中心藏之,何日忘之?!”没有读者与专家的关爱,就没有我们“研究生教学用书”的发展。

唐代大文豪李白讲得十分正确:“人非尧舜,谁能尽善?”我始终认为,金无足赤,物无足纯,人无完人,文无完文,书无完书。“完”全了,就没有发展了,也就“完”蛋了。这套“研究生教学用书”更不会例外。这套书如何?某本书如何?这样的或那样的错误、不妥、疏忽或不足,必然会有。但是,我们又必须积极、及时、认真而不断地加以改进,与时俱进,奋发前进。我们衷心希望与真挚感谢读者与专家不吝指教,及时批评。当局者迷,兼听则明;“嘤其鸣矣,求其友声。”这就是我们肺腑之言。当然,在这里,还应该深深感谢“研究生教学用书”的作者、审阅者、组织者(华中科技大学研究生院的有关领导和工作人员)与出版者(华中科技大学出版社的编辑、校对及其全体同志);深深感谢对“研究生教学用书”的一切关心者与支持者,没有他们,就决不会有今天的“研究生教学用书”。

我们真挚祝愿,在我们举国上下,万众一心,深入贯彻落实科学发展观,努力全面建设小康社会,加速推进社会主义现代化,为实现中华民族伟大复兴,“芙蓉国里尽朝晖”这一壮丽事业中,让我们共同努力,为培养数以千万计高级专门人才,特别是一大批拔尖创新人才,完成历史赋予研究生教育的重大任务而作出应有的贡献。

谨为之序。

中国科学院院士
华中科技大学学术委员会主任
杨叔子
于华中科技大学

前　言

随机过程理论在物理、生物、工程、经济和管理等方面都得到了广泛应用，已成为近代科技工作者必需掌握的一个理论工具. 目前，有条件的高等学校在本科生或研究生中开设了随机过程课程. 本书是编者根据多年的教学实践，在原有版本的基础上，充实和修改而成的.

本书在理工科大学生已有的数学知识基础上，采用理工科学生和工程技术人员易于接受的叙述方式，简单地介绍了现代科学技术中常见的几类重要的随机过程. 全书分为四个部分：预备知识和基本概念（第 1 章、第 2 章），泊松过程（第 3 章），马尔可夫过程（第 4 章、第 5 章），平稳随机过程（第 6 章、第 7 章、第 8 章）. 第二、三、四部分相互独立，读者可根据专业的需要，对内容进行适当取舍.

本书是为具有高等数学、线性代数、概率论等知识的高等理工科院校研究生、本科生及工程技术人员学习随机过程编写的，它既可作为教材或教学参考书，也可作为需要随机过程知识的读者的自学读本.

本书的第五版依据教学过程中发现的问题和读者所提意见，由编者对书中的遗漏和不妥之处作了更正，但限于编者的水平，本书肯定仍存在不当之处，欢迎专家和读者批评指正.

最后，编者对关心、支持本书改进的教师与学生表示衷心感谢.

刘次华
2014 年 7 月
于华中科技大学

目　　录

第 1 章　预 备 知 识

1.1　概率空间

随机试验是概率论的基本概念，试验的结果事先不能准确地预言，但具有如下三个特性：

（1）可以在相同的条件下重复进行；

（2）每次试验的结果不止一个，但预先知道试验的所有可能的结果；

（3）每次试验前不能确定哪个结果会出现.

随机试验所有可能结果组成的集合称为这个试验的**样本空间**或**基本事件空间**，记为 Ω. Ω 中的元素 e 称为**样本点**或**基本事件**，Ω 的子集 A 称为**事件**，样本空间 Ω 称为**必然事件**，空集 $\varnothing$ 称为**不可能事件**.

由于事件是集合，故集合的运算（并、交、差、上极限、下极限、极限等）都适用于事件.

在实际问题中，我们不是对所有的事件（样本空间 Ω 的所有子集）都感兴趣，而是关心某些事件（Ω 的某些子集）及其发生的可能性大小（概率）. 这样，便导致 σ- 代数 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{F}$ 上的概率的概念.

定义 1.1　设 Ω 是一个集合，$\mathscr{F}$ 是 Ω 的某些子集组成的集合族. 如果：

（1）$\Omega \in \mathscr{F}$；

（2）若 $A \in \mathscr{F}$，则 $\overline{A} = \Omega \backslash A \in \mathscr{F}$；

（3）若 $A_n \in \mathscr{F}, n = 1,2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$；

则称 $\mathscr{F}$ 为 σ- 代数（Borel 域）. $(\Omega,\mathscr{F})$ 称为**可测空间**，$\mathscr{F}$ 中的元素称为事件.

由定义易知：

（4）$\varnothing \in \mathscr{F}$；

（5）若 $A,B \in \mathscr{F}$，则 $A\backslash B \in \mathscr{F}$；

（6）若 $A_i \in \mathscr{F}, i = 1,2,\cdots$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i, \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i, \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$.

定义 1.2　设 $(\Omega,\mathscr{F})$ 是可测空间，$P(\cdot)$ 是定义在 $\mathscr{F}$ 上的实值函数. 如果：

（1）任意 $A \in \mathscr{F}, 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) $P(\Omega)=1$;

(3) 对两两互不相容事件 $A_1,A_2,\cdots$(当 $i\neq j$ 时,$A_i\cap A_j=\varnothing$),有

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i);$$

则称 P 是$(\Omega,\mathscr{F})$ 上的概率,$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 称为**概率空间**,$P(A)$ 为事件 A 的**概率**.

由定义易知:$P(\varnothing)=0$;

(4) 若 $A,B\in\mathscr{F},A\subset B$,则 $P(B\backslash A)=P(B)-P(A)$,即概率具有单调性;

(5) 设 $A_n\in\mathscr{F},n=1,2,\cdots$,则

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=\begin{cases}P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n), & A_1\subset A_2\subset\cdots,\\ P(\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n), & A_1\supset A_2\supset\cdots.\end{cases}$$

定义 1.3 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是概率空间,$\mathscr{G}\subset\mathscr{F}$,如果对任意 $A_1,A_2,\cdots,A_n\in\mathscr{G}$,有

$$P(\bigcup_{i=1}^{n}A_i)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i),$$

则称 $\mathscr{G}$ 为**独立事件族**.

1.2 随机变量及其分布

随机变量是概率论的主要研究对象,随机变量的统计规律用分布函数来描述.

定义 1.4 设 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是概率空间,$X=X(e)$ 是定义在 Ω 上的实函数,如果对任意实数 x,$\{e:X(e)\leqslant x\}\in\mathscr{F}$,则称 $X(e)$ 是 $\mathscr{F}$ 上的**随机变量**,简记为随机变量 X. 称

$$F(x)=P(e:X(e)\leqslant x),\quad -\infty<x<\infty$$

为随机变量 X 的**分布函数**.

分布函数 $F(x)$ 具有下列性质:

(1) $F(x)$ 是非降函数,即当 $x_1<x_2$ 时,有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$;

(2) $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0,F(\infty)=\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$;

(3) $F(x)$ 是右连续的,即 $F(x+0)=F(x)$.

可以证明,定义在 $\mathbf{R}=(-\infty,\infty)$ 上的实值函数 $F(x)$,若具有上述三个性质,必存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及其上的随机变量 X,其分布函数是 $F(x)$.

在应用中,常见的随机变量有两种类型:离散型随机变量和连续型随机变量.

离散型随机变量 X 的概率分布用分布列描述:

$$p_k=P(X=x_k),\quad k=1,2,\cdots,$$

其分布函数

$$F(x)=\sum_{x_k\leqslant x}p_k.$$

连续型随机变量 X 的概率分布用概率密度 $f(x)$ 描述,其分布函数

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

常见随机变量的分布参见表 1-1.

表 1-1

分布	分布律或概率密度	期望	方差	特征函数
0-1 分布	$P(X=1)=p,\quad P(X=0)=q,$ $0<p<1,\quad p+q=1$	p	pq	$q+p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$
二项分布	$P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^k q^{n-k},$ $0<p<1,\quad p+q=1,\quad k=0,1,\cdots,n$	np	npq	$(q+p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})^n$
泊松分布	$P(X=k)=\dfrac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad \lambda>0,\quad k=0,1,\cdots$	λ	λ	$\mathrm{e}^{\lambda(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-1)}$
几何分布	$P(X=k)=pq^{k-1},\quad 0<p<1,$ $p+q=1,\quad k=1,2,\cdots$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{q}{p^2}$	$\dfrac{p\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1-q\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}$
均匀分布	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$	$\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bt}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}at}}{\mathrm{i}(b-a)t}$
$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	a	σ^2	$\mathrm{e}^{\mathrm{i}at-\frac{1}{2}\sigma^2t^2}$
指数分布	$f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\quad \lambda>0$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$	$(1-\dfrac{\mathrm{i}t}{\lambda})^{-1}$

下面我们讨论 n 维随机变量及其概率分布.

定义 1.5 设$(\Omega,\mathscr{F},P)$是概率空间,$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(e)=(X_1(e),X_2(e),\cdots,X_n(e))$是定义在 Ω 上的在 n 维空间 $\mathbf{R}^n$ 中取值的向量函数. 如果对于任意 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$, $\{e:X_1(e)\leqslant x_1,X_2(e)\leqslant x_2,\cdots,X_n(e)\leqslant x_n\}\in\mathscr{F}$,则称 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}(e)$ 为 **n 维随机变量**或 **n 维随机向量**. 称

$$F(\boldsymbol{x})=F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P(e:X_1(e)\leqslant x_1,X_2(e)\leqslant x_2,\cdots,X_n(e)\leqslant x_n),$$
$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$$

为 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的**联合分布函数**.

n 维联合分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 具有下列性质:

(1) 对于每个变元 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$,$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是非降函数;

(2) 对于每个变元 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$,$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是右连续的;

(3) 对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意区域$(a_1,b_1;\cdots;a_n,b_n)$,其中 $a_i\leqslant b_i,i=1,\cdots,n$,

$$F(b_1,b_2,\cdots,b_n)-\sum_{i=1}^{n}F(b_1,\cdots,b_{i-1},a_i,b_{i+1},\cdots,b_n)$$

$$+\sum_{\substack{i,j=1\\i<j}}^{n}F(b_1,\cdots,b_{i-1},a_i,b_{i+1},\cdots,b_{j-1},a_j,b_{j+1},\cdots,b_n)$$

$$+\cdots+(-1)^nF(a_1,a_2,\cdots,a_n)\geqslant 0;$$

(4) $\lim\limits_{x_i\to-\infty}F(x_1,x_2,\cdots,x_i,\cdots,x_n)=0, i=1,2,\cdots,n,$

$$\lim_{x_1,x_2,\cdots,x_n\to\infty}F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=1.$$

可以证明,对于定义在 $\mathbf{R}^n$ 上具有上述性质的实函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,必存在一个概率空间$(\Omega,\mathscr{F},P)$ 及其上的 n 维随机变量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,其联合分布函数为 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$.

在应用中,常见的 n 维随机变量也有两种类型:离散型和连续型.

若随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的每个分量 $X_i, i=1,2,\cdots,n$,都是离散型随机变量,则称 $\boldsymbol{X}$ 是离散型随机向量.

对于离散型随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$,其联合分布列为

$$p_{x_1,x_2,\cdots,x_n}=P(X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n),$$

其中 $x_i\in I_i, i=1,2,\cdots,n, I_i$ 是离散集. X 的联合分布函数

$$F(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\sum_{\substack{x_i\leqslant y_i\\i=1,\cdots,n}}p_{x_1,x_2,\cdots,x_n},\quad (y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n.$$

若存在定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的非负函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,对于任意$(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$,随机向量 $\boldsymbol{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的联合分布函数

$$F(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{y_2}\cdots\int_{-\infty}^{y_n}f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n,$$

则称 $\boldsymbol{X}$ 是连续型随机向量,$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 为 $\boldsymbol{X}$ 的联合概率密度.

定义 1.6 设$\{X_t,t\in T\}$ 是一族随机变量,若对于任意 $n\geqslant 2$ 和 $t_1,t_2,\cdots,t_n\in T$, $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$,有

$$P(X_{t_1}\leqslant x_1,X_{t_2}\leqslant x_2,\cdots,X_{t_n}\leqslant x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_{t_i}\leqslant x_i),\tag{1.1}$$

则称 $\{X_t,t\in T\}$ 是**独立**随机变量族.

如果$\{X_t,t\in T\}$ 是一族独立的离散型随机变量,(1.1) 式等价于

$$P(X_{t_1}=x_1,X_{t_2}=x_2,\cdots,X_{t_n}=x_n)=\prod_{i=1}^{n}P(X_{t_i}=x_i),$$

其中 x_i 是 X_{t_i} 的任意可能值,$i=1,2,\cdots,n$.

如果$\{X_t,t\in T\}$是一族独立的连续型随机变量,(1.1)式等价于

$$f_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\prod_{i=1}^{n}f_{t_i}(x_i),$$

其中 $f_{t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是随机向量 $(X_{t_1},X_{t_2},\cdots,X_{t_n})$ 的联合概率密度，$f_{t_i}(x_i)$ 是随机变量 X_{t_i} 的概率密度，$i=1,2,\cdots,n$.

独立性是概率中的重要概念. 在实际问题中，独立性的判断通常是根据经验或具体情况来决定的.

1.3　随机变量的数字特征

随机变量的概率分布完全由其分布函数描述，但是如何确定分布函数却是相当麻烦的. 在实际问题中，我们有时只需要知道随机变量的某些特征值就够了.

定义 1.7　设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，若 $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \mathrm{d}F(x) < \infty$，则称

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} x\mathrm{d}F(x)$$

为 X 的**数学期望**或**均值**. 上式右边的积分称为 Lebesgue-Stieltjes 积分.

若 X 是离散型随机变量，分布列为

$$p_k = P(X = x_k), \quad k = 1,2,\cdots,$$

则

$$EX = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

若 X 是连续型随机变量，概率密度为 $f(x)$，则

$$EX = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\mathrm{d}x.$$

随机变量的数学期望是随机变量的取值依概率的平均.

定义 1.8　设 X 是随机变量，若 $EX^2<\infty$，则称 $DX=E[(X-EX)^2]$ 为 X 的**方差**.

随机变量的方差反映随机变量取值偏离均值的程度.

定义 1.9　设 X,Y 是随机变量，$EX^2<\infty$，$EY^2<\infty$，则称

$$B_{XY}=E[(X-EX)(Y-EY)]$$

为 X、Y 的**协方差**，称

$$\rho_{XY} = \frac{B_{XY}}{\sqrt{DX}\,\sqrt{DY}}$$

为 X、Y 的**相关系数**.

若 $\rho_{XY}=0$，则称 X、Y **不相关**. 相关系数 ρ_{XY} 表示 X、Y 之间的线性相关程度的大小.

随机变量的数学期望和方差具有如下性质：

(1) 若 n 维随机变量 $(X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 的联合分布函数为 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$g(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 是 n 维连续函数，则

$$E[g(X_1,X_2,\cdots,X_n)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}F(x_1,x_2,\cdots,x_n);$$

(2) $E(aX+bY)=aEX+bEY$,其中 a,b 是常数;

(3) 若 X、Y 独立,则 $E[XY]=EXEY$;

(4) 若 X、Y 独立,则 $D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY$,其中 a,b 是常数;

(5) (Schwarz 不等式) 若 $EX^2<\infty, EY^2<\infty$,则

$$(EXY)^2 \leqslant EX^2EY^2;$$

(6) (单调收敛定理) 若 $0\leqslant X_n \uparrow X$,则

$$\lim_{n\to\infty} EX_n = EX;$$

(7) (Fatou 引理) 若 $X_n\geqslant 0$,则

$$E[\varliminf_{n\to\infty} X_n]\leqslant \varliminf_{n\to\infty} E[X_n] \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} EX_n.$$

有关的证明可参考文献[5].

1.4 特征函数、母函数

特征函数是研究随机变量分布的一个重要工具.由于分布和特征函数之间存在一一对应关系,因此在得知随机变量的特征函数之后,就可以知道它的分布.用特征函数求随机变量的分布律比直接求随机变量的分布容易得多,而且特征函数具有良好的分析性质.为此,我们首先介绍特征函数.

定义 1.10 设随机变量的分布函数为 $F(x)$,称

$$g(t) = E[\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}F(x), \quad -\infty < t < \infty$$

为 X 的**特征函数**.

特征函数 $g(t)$ 是实变量 t 的复值函数,由于 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}|=1$,故随机变量的特征函数必然存在.

若 X 是离散型随机变量,分布列

$$p_k = P(X = x_k), \quad k = 1,2,\cdots,$$

则

$$g(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx_k} p_k.$$

若 X 是连续型随机变量,概率密度为 $f(x)$,则

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

随机变量的特征函数具有下列性质:

(1) $g(0) = 1$, $|g(t)| \leqslant 1$, $g(-t) = \overline{g(t)}$;

(2) $g(t)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 上一致连续;

(3) 若随机变量 X 的 n 阶矩 EX^n 存在,则 X 的特征函数 $g(t)$ 可微分 n 次,且当 $k\leqslant n$ 时,有 $g^{(k)}(0) = \mathrm{i}^k EX^k$;

(4) $g(t)$ 是非负定函数.即对任意正整数 n 及任意实数 $t_1,t_2,\cdots,t_n$ 和复数