



普通高等教育“十二五”规划教材

数学建模

秦新强 郭文艳 徐小平 胡 钢 编



科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

数学建模

秦新强 郭文艳 徐小平 胡 钢 编

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书以用数学解决实际问题所需要的知识和技能为顺序,介绍了数学建模的基本概念、方法与步骤,以及常用的计算方法、数值软件,分专题介绍几个主要数学分支的相关知识及其在具体问题中的应用.全书共七章,内容包括数学建模所需要的基本知识:数学建模概念、数值软件、常用计算方法;进行数学基本应用的初等模型、常微分方程模型、最优化模型和概率论与数理统计模型.书中精选了几十个实际问题的数学模型,具有一定的启发性,各章后安排有一定数量的练习题,便于进一步的学习.

本书可供理工科各专业及经济管理有关专业的大学生作为教材或参考书使用,也可供科技工作者学习和参考.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模/秦新强等编. —北京:科学出版社, 2015.3
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-043702-0

I. ①数… II. ①秦… III. ①数学模型-高等学校-教材
IV. ①O141.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 048827 号

责任编辑:李 萍 杨向萍 张茂发/责任校对:蒋 萍
责任印制:赵 博/封面设计:范璧合

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 3 月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2015 年 3 月第一次印刷 印张:16

字数:320 000

定价:45.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

作为一门研究现实世界数量关系和空间形式的科学，数学一直与人们生活的实际需要密切相关。进入 20 世纪，数学以空前的广度和深度向一切领域渗透，作为用数学方法解决实际问题的第一步，数学建模自然有着非常重要的作用。同时，伴随着电子计算机的出现与飞速发展，数学建模更加受到人们的重视。

在任何应用领域中，用数学去解决所研究的问题时，建立其相应的数学模型是非常关键的一步。数学模型是指通过抽象和简化后，使用数学语言对实际问题的一个近似的刻画，以便于人们更深刻地认识所研究的对象和变化过程。而建立数学模型的过程，就是要通过调查、收集数据资料、观察和研究实际对象与过程的固有特征和内在规律，抓住问题的主要矛盾，建立起反映实际问题的数量关系，然后利用数学的理论和方法来分析和解决问题。这就需要人们具有扎实的数学功底、敏锐的洞察力、丰富的想象力、对实际问题的浓厚兴趣和广博的知识面。因此，数学建模是数学学习的一种新的方式，它为人们提供了一个自主学习空间，有助于人们体验数学在解决实际问题中的价值和作用，体验数学与日常生活和其他学科的联系，体验综合运用知识和方法解决实际问题的过程，增强应用意识，从而也有助于激发人们学习数学的兴趣，提升人们的数学素养，培养人们的创新意识和实践能力。

与其他数学类教材相比，数学建模教材具有难度大、涉及面广和形式灵活等特点，再加上数学建模本身是一个不断探索、不断创新、不断完善和不断提高的过程。因此，在编写本书过程中，力求按照读者能够用数学去解决实际问题所需要的基本知识和技能为主线，安排学习内容时突出重点、循序渐进、通俗易懂、深入浅出、难点分散，注意对基本知识进行详细解释和说明，以培养能力作为指导思想，使读者能够逐步掌握数学建模的基本概念和基本思路，重视实际应用，让读者在较短的时间内能够获得建模理论和方法。尽量为读者提供常用的数学方法和数学软件包，并将相应的 MATLAB 程序和 LINGO 程序提供给读者，使读者在学习教材中提供的案例时，不仅能够自己动手构建数学模型，而且能够同时上机进行数值计算。

作者一直从事数学建模教学工作和大学生数学建模竞赛指导工作，本书是在多年数学建模教学经验和数学建模培训指导经验的基础上形成的，可以作为大学

生的教材或参考书. 全书共 7 章, 第 1~3 章及第 7 章由秦新强编写, 第 4~6 章分别由胡钢、郭文艳和徐小平编写. 赵凤群对全书进行了审阅, 戴芳、王小侠、肖燕婷也对书稿提出了许多宝贵意见. 阅读时按照第 1 章、第 7 章、第 3 章及其他各章节的顺序也较为合适.

由于作者水平所限, 书中疏漏之处在所难免, 望读者多加指正.

编 者

2014 年 12 月

目 录

前言

第 1 章 数学建模基本概念	1
1.1 数学模型的概念	1
1.1.1 模型	1
1.1.2 数学模型	2
1.2 数学模型的分类	2
1.3 数学建模的原则	3
1.4 数学建模的方法	4
1.4.1 机理分析法	4
1.4.2 测试分析法	4
1.4.3 综合分析法	4
1.5 数学建模的步骤	4
1.5.1 建模准备	4
1.5.2 分析简化	4
1.5.3 模型建立	5
1.5.4 模型求解	5
1.5.5 模型的评价与改进	5
1.5.6 模型应用	5
1.6 数学建模竞赛简介	6
1.6.1 美国数学建模竞赛	6
1.6.2 中国数学建模竞赛	6
1.6.3 参加数学建模竞赛需要的知识	7
习题 1	8
第 2 章 计算方法	9
2.1 代数插值	9
2.1.1 插值问题	9
2.1.2 Lagrange 插值	11
2.2 数值微积分	16

2.2.1	等距节点的积分公式	17
2.2.2	复化积分公式	23
2.2.3	数值微分	30
2.3	数据拟合的最小二乘法	31
2.3.1	数据拟合最小二乘法的思想	32
2.3.2	最小二乘法拟合曲线的步骤	32
2.3.3	数值例子	35
2.4	常微分方程数值解法	42
2.4.1	解的存在唯一性	42
2.4.2	Euler 折线法	42
2.4.3	改进 Euler 折线法	43
2.4.4	预估-校正法	44
2.5	算法应用实例	45
2.5.1	教堂顶部曲面面积的计算	45
2.5.2	水塔流量的估计	49
2.5.3	轮船搁浅问题	56
	习题 2	59
第 3 章	初等模型	65
3.1	企业盈亏分析模型	65
3.1.1	问题及分析	65
3.1.2	模型及应用	65
3.2	优秀研究成果的评选	67
3.2.1	评选方案	67
3.2.2	方案分析	67
3.3	录像机计数器的用途	69
3.3.1	问题提出	69
3.3.2	问题分析	69
3.3.3	模型假设	69
3.3.4	模型建立	69
3.3.5	参数估计	70
3.3.6	模型应用	71
3.4	住房贷款	71
3.4.1	住房贷款问题	71
3.4.2	住房贷款与还款方式	71
3.4.3	等额本息贷款还款法	73

3.4.4 等额本金贷款还款法	75
习题 3	77
第 4 章 常微分方程模型	79
4.1 常微分方程的基本解法	79
4.1.1 一阶常微分方程的解法	79
4.1.2 高阶常微分方程的降阶解法	83
4.1.3 高阶线性常微分方程的解法	86
4.2 常微分方程的简单应用	89
4.2.1 人口预测模型	89
4.2.2 市场价格模型	92
4.2.3 混合溶液模型	93
4.3 导弹跟踪问题	94
4.3.1 问题提出	94
4.3.2 数学建模	95
4.3.3 模型求解	96
4.4 行星的轨道和位置	103
4.4.1 实际问题	103
4.4.2 背景介绍	104
4.4.3 模型建立	104
4.4.4 模型求解	106
习题 4	113
第 5 章 最优化模型	115
5.1 优化问题与优化软件介绍	115
5.1.1 优化问题	115
5.1.2 LINGO 软件简介	117
5.2 线性规划	118
5.2.1 线性规划的特点	119
5.2.2 线性规划模型	119
5.2.3 生产安排	120
5.2.4 运输问题	122
5.3 非线性规划	127
5.3.1 非线性规划模型	127
5.3.2 选址问题	127
5.4 整数规划	130
5.4.1 整数规划模型	130

5.4.2 指派问题和装货问题	130
5.5 目标规划	135
5.5.1 目标规划的基本概念	135
5.5.2 目标规划模型	136
5.5.3 序贯式算法	136
5.5.4 投资问题	137
5.6 动态规划	143
5.6.1 动态规划的基本概念	143
5.6.2 负荷分配与存储问题	144
5.7 多目标规划	147
5.7.1 多目标规划模型	148
5.7.2 多目标规划的求解方法	148
5.7.3 组合投资问题	150
5.8 综合实例	153
5.8.1 人员安排方案	153
5.8.2 工厂升级方案	158
习题 5	164
第 6 章 概率论与数理统计模型	167
6.1 概率论与数理统计简介	167
6.1.1 概率论	167
6.1.2 数理统计	169
6.2 概率论方法建模	172
6.2.1 钓鱼问题	173
6.2.2 报童策略	173
6.2.3 存储问题	175
6.2.4 轧钢问题	177
6.2.5 随机人口模型	181
6.2.6 自动化车床管理	183
6.3 数理统计方法建模	191
6.3.1 方差分析	191
6.3.2 回归分析	195
6.3.3 判别分析方法	197
6.3.4 相关分析方法	200
6.3.5 聚类分析	201
6.3.6 最优评卷问题	202
习题 6	209

第 7 章 数值软件	211
7.1 MATLAB 简介	211
7.1.1 MATLAB 的产生	211
7.1.2 MATLAB 的使用说明	212
7.2 MATLAB 的数值计算	213
7.2.1 MATLAB 的数据类型	213
7.2.2 向量及其运算	214
7.2.3 矩阵的运算	215
7.2.4 多项式及其运算	217
习题 7.2	219
7.3 MATLAB 的符号运算	220
7.3.1 符号表达式的生成	220
7.3.2 符号与数值之间的转换	221
7.3.3 符号函数的运算	222
7.3.4 符号矩阵的创立	223
7.3.5 符号矩阵的计算	223
7.3.6 符号微积分	224
7.3.7 符号代数方程求解	225
7.3.8 符号常微分方程求解	226
7.3.9 符号函数的二维图	226
7.3.10 图示化函数计算器	227
习题 7.3	227
7.4 MATLAB 的图形绘制	228
7.4.1 二维图形	228
7.4.2 三维图形	231
7.4.3 图形处理的基本技术	233
7.4.4 图形处理的高级技术	235
习题 7.4	240
7.5 MATLAB 的程序设计	241
7.5.1 M 文件介绍	241
7.5.2 控制语句	243
习题 7.5	245
参考文献	246

第 1 章 数学建模基本概念

随着科学技术的发展和社会的进步，数学在自然科学、社会科学、工程技术与现代化管理等方面获得了越来越广泛而深入的应用，人们逐渐认识到建立数学模型的重要性。实际问题的解决往往包括以下四个方面：数学建模、模型求解、结果分析、具体应用。数学建模是解决实际问题中的一个重要环节，下面就对数学模型的基本知识作一介绍。

1.1 数学模型的概念

1.1.1 模型

在日常生活和工作中，人们经常会遇到或用到各种模型，如飞机模型、水坝模型、火箭模型、人造卫星模型、大型水电站模型等实物模型；也有用文字、符号、图表、公式、框图等描述客观事物的某些特征和内在联系的模型，如模拟模型、数学模型等。模型是客观事物的一种简化的表示和体现，它应具有如下的特点：

(1) 它是客观事物的一种模仿或抽象，它的一个重要作用就是加深人们对客观事物如何运行的理解。为了使模型成为帮助人们合理进行思考的一种工具，要用一种简化的方式来表现一个复杂的系统或现象。

(2) 为了能协助人们解决问题，模型必须具备所研究系统的基本特征或要素。

(3) 模型还应包括决定其原因和效果的各个要素之间的相互关系。

有了这样的一个模型，人们就可以在模型内实际处理一个系统的所有要素，并观察它们的效果。

模型可以分为实物模型和抽象模型，抽象模型又可以分为模拟模型和数学模型。

与上述的各种各样的模型相对应的是它们在现实世界中的原型。所谓原型，是指人们研究或从事生产、管理的实际对象，也就是系统科学中所说的实际系统，如电力系统、生态系统、社会经济系统等。

而模型则是指为了某个特定目的，将原型进行适当的简化、提炼而构造的一种原型替代物，它们不是原模型原封不动的复制品。原型有各个方面和各种层次的特征，模型则反映了与某种目的有关的那些方面和层次的特征。因此，对同一

个原型,为了不同的目的,可以建立多种不同的模型.例如,作为玩具的飞机模型,在外形上与飞机形似,但不会飞;而参加航模竞赛的模型飞机就必须能够飞行,对外观则不必苛求;对于供飞机设计、研制用的飞机数学模型,则主要是要反映飞机的飞行动态特征,而不涉及飞机的实体.

1.1.2 数学模型

在现实世界实际问题的解决中,会遇到大量的数学问题,但是,它们往往并不是自然地以现成数学问题的形式出现.首先,需要对要解决的实际问题进行分析研究,经过简化、提炼,归结为一个能够求解的数学问题,即建立该问题的数学模型.这是运用数学的理论与方法解决实际问题关键的第一步,然后,才能应用数学理论、方法进行分析和求解,进而为解决现实问题提供数量支持与指导.由此就显现出数学建模的重要性.现实世界的问题往往比较复杂,在从事集中抽象出数学问题的过程中,必须抓住主要因素,忽略一些次要因素,做出必要的简化,使抽象所得的数学问题能用适当的方法进行求解.

以解决某个现实问题为目的,经过分析简化,从中抽象、归结出来的数学问题就是该问题的数学模型.

具体来说就是指用字母、数字及其他数学符号组成的关系式、图表、框图等描述现实对象的数量特征及其内在联系的一种模型.这个过程称为数学建模.

一般地,数学模型可以这样来描述:对于现实世界的一个特定的对象,为了一个特定的目的,根据特有的内在规律,做出一些必要的简化假设,运用适当的数学工具得到一个数学结构.这里的特定对象,是指所要解决的某个具体问题;这里的特定目的,如分析、预测、控制、决策等;这里的数学工具指数学各分支的理论和方法及数学的某些软件系统;这里的数学结构包括各种数学方程、表格、图形等.

1.2 数学模型的分类

数学模型的分类方法有多种,下面介绍常用的四种分类.

(1) 按照建模所用的数学方法的不同,可分为:初等模型、运筹学模型、微分方程模型、概率统计模型、控制论模型等.

(2) 按照数学模型应用领域的不同,可分为:人口模型、交通模型、经济预测模型、金融模型、环境模型、生态模型、企业管理模型、城镇规划模型等.

(3) 按照人们对建模机理了解程度的不同,可分为:

① 白箱模型. 主要指物理、力学等一些机理比较清楚的学科描述的现象以及相应的工程技术问题,这些方面的数学模型大多已经建立起来,还需深入研究

的主要是针对具体问题的特定目的进行修正与完善,或者是进行优化设计与控制等.

② 灰箱模型. 主要指生态、经济等领域中遇到的模型,人们对其机理虽有所了解,但还不很清楚,故称灰箱模型,在建立和改进模型方面还有不少工作要做.

③ 黑箱模型. 主要指生命科学、社会科学等领域中遇到的模型,人们对其机理知之甚少,甚至完全不清楚,故称为黑箱模型.

在工程技术和现代化管理中,有时会遇到这样一类问题:由于因素众多、关系复杂,以及观测困难等原因,人们也常常将它作为灰箱或黑箱模型问题来处理. 应该指出的是,这三者之间并没有严格的界限,而且随着科学技术的发展,关系也是不断变化的.

(4) 按照模型的表现特性不同,可分为:

① 确定性模型与随机性模型. 前者不考虑随机因素的影响,后者考虑了随机因素的影响.

② 静态模型与动态模型. 两者的区别在于是否考虑时间因素引起的变化.

③ 离散模型与连续模型. 两者的区别在于描述系统状态的变量是离散的还是连续的.

1.3 数学建模的原则

建立实际问题的数学模型,尤其是建立抽象程度较高的模型是一种创造性的劳动. 我们不能期望找到一种一成不变的方法来建立各种实际问题的数学模型. 现实世界中的实际问题是多种多样的,而且大多比较复杂,所以数学建模的方法也是多种多样的. 但是,数学建模方法和过程也有一些共性的东西,掌握这些共同的规律,将有助于数学建模任务的完成.

因此,在建立数学模型时,应该遵照以下原则.

(1) 要有足够的精确度. 就是要把本质的性质和关系反映进去,把非本质的东西去掉,而又不影响反映现实的本质的真实程度.

(2) 模型既要精确,又要尽可能的简单. 因为太复杂的模型难以求解,而且如果一个简单的模型已经可以使某些实际问题得到满意的解决,那就没必要再建立一个复杂的模型. 因为构造一个复杂的模型并求解它,往往要付出较高的代价.

(3) 要尽量借鉴已有的标准形式的模型.

(4) 构造模型的依据要充分. 就是说要依据科学规律、经济规律来建立有关的公式和图表,并注意使用这些规律的条件.

1.4 数学建模的方法

数学建模的方法按大类来分，大体上可分为三类。

1.4.1 机理分析法

机理分析法就是根据人们对现实对象的了解和已有的知识、经验等，分析研究对象中各变量（因素）之间的因果关系，找出反映其内部机理规律的一类方法。使用这种方法的前提是对研究对象的机理有一定的了解。

1.4.2 测试分析法

当对研究对象的机理不清楚的时候，还可以把研究对象视为一个“黑箱”系统，对系统的输入输出进行观测，并以这些实测数据为基础进行统计分析来建立模型，这样的一类方法称为测试分析法。

1.4.3 综合分析法

对于某些实际问题，人们常将上述两种建模方法结合起来使用。例如，用机理分析法确定模型结构，再用测试分析法确定其中的参数，这类方法称为综合分析法。

1.5 数学建模的步骤

1.5.1 建模准备

通常，当遇到某个实际问题时，在开始阶段对问题的理解往往不是很清楚，所以需要深入实际进行调查研究，收集与研究问题有关的信息、资料，与熟悉情况的有关人员进行讨论，查阅有关的文献资料，明确问题的背景和特征，由此初步确定它可能属于哪一类模型等。总之，要做好建模前的准备工作，明确所要研究解决的问题和建模要达到的主要目的。

1.5.2 分析简化

对所研究的问题和收集的信息资料进行分析，弄清哪一些因素是主要的、起主导作用，哪一些因素是次要的，并根据建模的目的抓住主要的因素，忽略次要的因素，即对实际问题作一些必要的简化，用精确的语言做出必要的简化假设。应该说这是一个十分困难的问题，也是建模过程中十分关键的一步，往往不可能

一次完成,需要经过多次反复试验才能完成.

1.5.3 模型建立

在前述工作的基础上,根据所作的假设,分析研究对象的因果关系,用数学语言加以刻画,就可得到所研究问题的数学描述,即构成所研究问题的数学模型.通常它是描述问题的主要因素的变量之间的一个关系式或其他数学结构,在初步构成数学模型之后,一般还要进行必要的分析和化简,使它达到便于求解的形式,并根据研究的目的,对它进行检查,主要是看它能否代表研究的实际问题.

1.5.4 模型求解

当现有的数学方法还不能很好解决所归结的数学问题时,就需要针对数学模型的特点,对现有的方法进行改进或提出新的方法以适应需要.

1.5.5 模型的评价与改进

数学模型总是在不断地分析、检验和评价中,不断地进行改进和完善的.数学模型是否便于求解也是评价模型优劣的一个重要标准.当然,建模的目的是为了解决实际问题,所以评价模型优劣最重要的标准是模型及其解能否反映现实问题、满足解决实际问题的需要.

1.5.6 模型应用

模型应用就是把经过多次反复改进的模型及其解应用于实际系统,看能否达到预期的目的.若不够满意,则建模任务仍未完成,需要继续努力(图1.5.1).

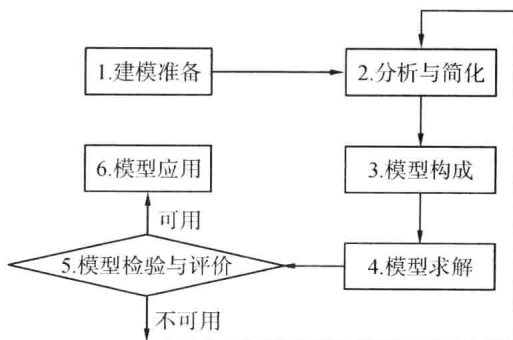


图 1.5.1 数学建模流程图

应当强调的是,并不是所有的数学建模过程都要按上述步骤进行.上述步骤只是数学建模过程的一个大致的描述,实际建模时可以灵活应用.

1.6 数学建模竞赛简介

1.6.1 美国数学建模竞赛

1985年由美国数学及应用协会 (Consortium for Mathematics and its Applications, COMAP) 主办、美国工业与应用数学学会 (Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM)、美国运筹学会 (Operations Research Society of America, ORSA) 和几所大学支持的美国大学生数学建模竞赛 (Mathematical Contest in Modeling, MCM) 第一次举办, 除美国之外, 加拿大、中国、荷兰和中国香港地区等地的学校也相继参加. 我国最早是在 1989 年由北京的三所大学组队参加美国的 MCM. 竞赛的目的在于鼓励和训练学生用数学方法解决实际问题, 竞赛题目均从有实际意义的课题中提炼而成, 没有预先设定的答案.

参加竞赛的队伍由三名在校大学生组成, 配一名指导教师. 竞赛时从两道题中任选一题, 在指定的四天内完成, 可以参阅各种图书资料, 使用计算机及各种软件但不得和其他人讨论. 提交的论文应包括问题的阐述、模型假设条件、问题分析、模型设计与讨论 (误差、稳定性、优缺点), 一般要有计算程序和结果.

1.6.2 中国数学建模竞赛

在中国大学生数学建模竞赛举办之前, 由中国科学院数学研究所举办的大学生数学夏令营活动共举办了 5 届 (1987~1991 年), 活动期间主要是进行两次数学竞赛、与数学家交流、听学术报告和讲座等.

我国大学生于 1989 年开始参加美国 MCM, 到 1992 年已有国内 12 所大学 24 个队参赛, 历年来都取得了较好的成绩. 20 世纪 90 年代初, 我国不少高校萌发了组织自己的大学生数学建模竞赛的想法, 上海市率先于 1990 年 12 月举办了“上海市大学生 (数学类) 数学模型竞赛”, 于 1991 年 6 月举办了“上海市大学生 (非数学类) 数学模型竞赛”. 西安市也于 1992 年 4 月举办了“西安市第一届大学生数学模型竞赛”.

1992 年 11 月, 中国工业与应用数学学会 (China Society for Industrial and Applied Mathematics, CSIAM), 委托该学会的数学模型专业委员会和上海市工业与应用数学学会, 试办了 1992 年我国大学生数学模型联赛, 74 所院校的 314 个队, 近千名学生在北京、上海、西安、武汉等 9 个赛区参加了比赛. 1993 年有 101 所高校、420 多个队、1300 名学生在 20 个城市参加了比赛. 经过两年的试办和筹备, 从 1994 年起, 由国家教委高教司和中国工业与应用数学学会共同

举办我国自己的“全国大学生数学建模竞赛 (CUMCM)”，每年举行一次。比赛时间一般为每年9月的第三个周末，由三名队员组成一个参赛队，也是要求在三天时间内从给出的两个题目中选择一个（一般是连续模型和离散模型各一个），利用数学和计算机对问题进行表述、分析、计算，得出可行的、有创造性的结果、方案和设计，并撰写论文。

这是一项非常具有创造性和挑战性的活动，通过数学建模的锻炼，最重要的是学会一种责任感和敬业精神，一种创造和团队精神，可以在计算机编程、数学软件使用、论文写作和组织调度能力等各个方面得到最大限度的展现和锻炼，而这些内容正是国内高等教育中的盲点。

中国大学生数学建模竞赛评奖结果一般设置三个等级，一个是全国奖，一个是省级奖，另一个是成功参赛奖。全国奖设立一、二等奖，省级奖设立一、二等奖和成功参赛奖。

1.6.3 参加数学建模竞赛需要的知识

第一方面：数学知识的应用能力。按历年比赛的试题来看，涉及的数学知识面十分地宽广，归结起来大体上有以下几类，概率与数理统计、统筹与线性规划和微分方程，还有与计算机知识相交叉的知识——计算机模拟。

第二方面：计算机的运用能力。一般来说凡参加过数学建模竞赛的同学都能熟练地应用文字处理软件“Word”，掌握电子表格“Excel”的使用和“MATLAB”“Mathematical”软件的使用，最好还具备语言能力。这些知识大部分都需要学生自己利用课余时间来学习。

第三方面：论文的写作能力。竞赛上交的是一篇论文，文章的书写有比较严格的格式，要按照科技论文的一般写作要求，如标题、字号、页边距、行距、参考文献的格式和参考文献的引用等，最主要的是论文中要能清楚地表达用数学方法解决实际问题的处理过程、方法和结论。

例 1.6.1 求单摆角的变化规律：给定一个绳长为 l 的单摆，如果其最大摆角为 θ_0 ，试找出单摆运动过程中摆角与时间的关系。

解 以下按照建模步骤解决该问题。

(1) 建模准备：绘制示意图，如图 1.6.1 所示，测量参数 l 和 g ，明确该问题属于白箱问题，可以运用牛顿 (Newton) 定律建模，所对应的数学分支为常微分方程。

(2) 分析简化：忽略空气阻力、绳子的重量。

(3) 模型建立：根据 Newton 第二定律得



图 1.6.1 单摆运动示意图