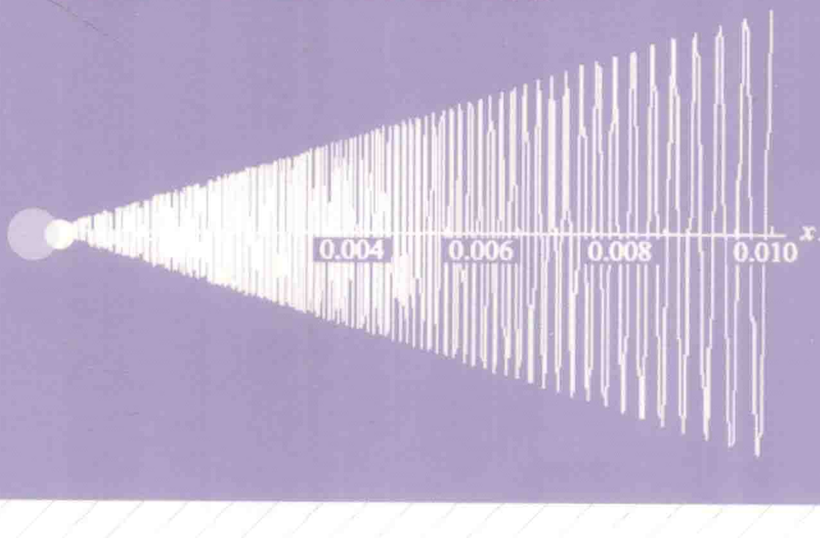
十二五 高等学校数学专业规划教材

实变函数

Functions of Real Variable



胡国恩　王　鑫　刘宏奎　编著

西安电子科技大学出版社
http://www.xduph.com

实变函数

高等学校数学专业规划教材
（本书也可供研究生使用）

实变函数

胡国恩　王鑫　刘宏奎　编著

西安电子科技大学出版社

内 容 简 介

本书是编者在长期从事应用数学、信息安全等专业的“实变函数”课程教学实践基础上结合科研体会编写而成的．全书共7章：第1章“从 Riemann 积分开始”主要是回顾数学分析中介绍过的 Riemann 积分，以便在第6章学习 Lebesgue 积分时做对比，同时可使读者对测度和积分理论的来源、背景有基本的了解；第2、3章是预备知识，分别介绍集合论的一些知识和欧氏空间中点集的基本知识与连续函数的性质；第4～6章是本书的核心部分，分别介绍 Lebesgue 测度、Lebesgue 可测函数、Lebesgue 积分理论；第7章介绍微分与积分．

全书表述简洁通俗，论证严谨，概念有解释，定理有说明，主要结论后均有例题，适合初学者使用，既可作为高等学校数学、应用数学、信息安全等专业高年级本科生或研究生的教材，也可供相关领域的科研人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

实变函数/胡国恩，王鑫，刘宏奎编著．—西安：西安电子科技大学出版社，2014.8

高等学校数学专业规划教材

ISBN 978-7-5606-3412-8

Ⅰ．①实…　Ⅱ．①胡…　②王…　③刘…　Ⅲ．①实变函数—高等学校—教材　Ⅳ．①O174.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 163543 号

策　　划　李惠萍

责任编辑　王　瑛　李惠萍

出版发行　西安电子科技大学出版社（西安市太白南路2号）

电　　话　(029)88242885　88201467　　邮　　编　710071

网　　址　www.xduph.com　　电子邮箱　xdupfxb001@163.com

经　　销　新华书店

印刷单位　北京京华虎彩印刷有限公司

版　　次　2014年8月第1版　2014年8月第1次印刷

开　　本　787毫米×960毫米　1/16　　印　张　11

字　　数　221千字

定　　价　19.00元

ISBN 978-7-5606-3412-8/O

XDUP 3704001-1

＊＊＊如有印装问题可调换＊＊＊

前　言

Riemann 积分的创立是数学史上里程碑性的进展，它不但为几何、物理等领域中的计算提供了有效的工具，更重要的是促进了分析理论的蓬勃发展．但是，由于 Riemann 积分对被积函数的连续性有较高的要求，从而导致积分和极限的换序条件、Newton-Leibniz 公式成立的条件比较苛刻，并且区间 $[a, b]$ 上的 Riemann 可积函数空间不完备．为刻画 Riemann 可积函数的不连续点集，并且引入新积分以克服 Riemann 积分对函数的连续性要求较高且不够灵活的缺点，数学家们做了不懈的努力．20 世纪初，法国数学家 Lebesgue 在他的论文中成功地使用了一种新的分割方法：对函数的值域（而不是像 Riemann 积分那样对函数的定义域）做分割，再沿用经典分析中"局部求近似、整体求极限"来计算定积分，该方法避免了对函数的有界性和连续性的要求，但是需要解决一些问题：什么样的实数集合是"可以求长度的"？什么样的函数可以按照这样的方法求积分？Lebesgue 本人对这些问题进行了系统、深入的研究，建立了 Lebesgue 测度和积分理论．这不但解决了 Riemann 可积函数的不连续点集的特征刻画问题，而且引进的新积分——Lebesgue 积分，从根本上克服了 Riemann 积分的一些缺陷．更重要的是，Lebesgue 积分的出现，为分析理论提供了一个最合理的平台，并促成了现代分析的许多分支（如泛函分析、调和分析、抽象分析等）的蓬勃发展．

以 Lebesgue 测度和积分理论为核心的实变函数，作为大学数学系的课程，已经远远超过半个世纪，它可能是数学系较为难学的课程之一．与前期课程（数学分析）相比，实变函数概念众多、内容抽象、思想深刻，但正因为如此，它可能是数学、应用数学等专业的大学生开始研究性学习的最适宜课程之一：虽然概念众多，但每一个概念都有明确的背景和目的；很多结论虽然深刻，但证明过程大多是从最简单的情形开始，然后采用具体的技巧过渡到一般情形；为建立一个新的理论，往往是先确定一个路线图，再逐个解决前进道路上的难题（可测集、可测函数等）．为此，在"把基本问题理清楚，将主要思想说明白"的前提下，注意引导学生发现问题和解决问题、激发学生学习的积极性进而享受学习中的乐趣，是教学过程中最重要的环节之一．正如 NBA 最成功的教练之一菲尔·杰克逊所说的："作为教练，重要的是让球员学会阅读比赛和享受比赛．"这需要教师结合自己的理解以通俗的语言讲解相关内容，同时还需要教材这个教与学之间的纽带促进学生在思考和品味中参悟所学知识．基于这样的教学指导思想，编者在总结、梳理近年来的教学实践的基础上编写了本书，其初衷就是强调对基本概念、基本思想的理解和掌握，注重引导学生尝试研究性

学习，而不是单纯地记概念、背定理、做大量习题．在语言组织上，本书融入了编者对有关知识的理解，力求直观、朴素；对于重要的概念，先说明其产生的背景，在用准确的数学语言描述之后，尽量用通俗的语言解释其本质性的内涵；对于主要定理(如 Lusin 定理、Riesz 定理等)，尽可能交代清楚其证明思想，并力求简化证明过程；同时，注意相关知识点(和数学分析知识、前后章节知识)之间的对比，以使学生在学习过程中及时将前后知识联系起来，理解 Lebesgue 测度和积分理论的精髓与本质．

全书分为 7 章．第 1 章“从 Riemann 积分开始”其实是为全书做一个铺垫，一方面是为了回顾数学分析中介绍过的 Riemann 积分以便在第 6 章学习 Lebesgue 积分时做对比，另一方面是为了让读者对测度和积分理论的来源、背景有基本的了解．第 2 章“集合与基数”介绍集合论的基本知识，特别是基数以及基数的比较．第 3 章“欧氏空间中的拓扑与连续函数”介绍欧氏空间中的点集的基本知识以及连续函数的性质．这三章的篇幅都不长，目的是在课程开始阶段让学生避免视觉疲劳．第 4～6 章是本书的核心部分，按照 Lebesgue 建立新积分的路线图，分别介绍 Lebesgue 测度、Lebesgue 可测函数、Lebesgue 积分．第 7 章作为应用篇，介绍积分与微分．与传统的实变函数教材相比，除了 6.6 节在不涉及泛函分析知识的前提下对 Lorentz 空间做了初步介绍，本书在主要内容上并没有大的变化，也基本上不涉及抽象分析的内容，只是力求在主要部分的细节处理、引导学生思考等方面做得好一些．

在本书出版之际，编者衷心感谢我国数学界的老前辈陆善镇教授和施咸亮教授，他们结合自己长期的教学实践和科研经验为本书的编写提出了指导性建议；也要感谢长期支持和帮助编者的国内调和分析界的各位同行，特别是陈杰诚教授、刘和平教授、杨大春教授、丁勇教授、江寅生教授、燕敦验教授和朱月萍教授，与他们长期进行学术交流及合作使编者加深了对相关问题的理解和认识；还要感谢西安电子科技大学出版社的王瑛编辑，她出色的文字工作使本书增色不少．在编者的教学实践中，曾多次使用周性伟教授编著的实变函数教材，从中获益良多．吴国昌博士、乔蕾博士和张启慧同志校阅了本书部分章节，在此一并表示感谢．

由于编者水平有限，书中不足之处在所难免，恳请读者批评指正．

编　者

2014 年 5 月

常用符号

本书使用的符号是标准的，对于大多数符号，在第一次出现的时候，我们都给出了其明确的意义. 没有明确说明的，我们均沿用通常的表示，例如：

• $\mathbf{R}$：实数集；$\mathbf{R}^n$：集合$\{(x_1, \cdots, x_n): x_k\in\mathbf{R}, 1\leqslant k\leqslant n\}$；$\mathbf{R}^\infty$：所有实数列组成的集合.

• $\mathbf{N}$：全体正整数集；$\mathbf{Z}$：全体整数集；$\mathbf{Q}$：全体无理数集；$\mathbf{Z}_+$：集合 $\mathbf{N}\cup\{0\}$.

• $\mathbf{Z}_+^n$：集合$\{(\alpha_1, \cdots, \alpha_n): \alpha_k\in\mathbf{Z}_+, 1\leqslant k\leqslant n\}$；$\mathbf{Q}^n$：集合$\{(x_1, \cdots, x_n): x_k\in\mathbf{Q}, 1\leqslant k\leqslant n\}$.

• $\varnothing$：空集.

• $B(x_0, r)$：$\mathbf{R}^n$ 中以 x_0 为中心、r 为半径的球；特别地，$B(0, r)$表示以原点为中心、r 为半径的球.

• $|Q|$：方体 Q 的体积；$|B|$：球 B 的体积.

• $\ell(Q)$：方体 Q 的边长或区间 Q 的长度.

• χ_E：集合 E 的特征函数.

• $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$：和数学分析中稍有不同，本书中$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$表示$\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$存在有限或者当 $k\to\infty$时 $f_k(x)$趋于∞或趋于$-\infty$.

• $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$：数列$\{a_n\}$的上极限；$\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} a_n$：数列$\{a_n\}$的下极限.

• $\lfloor a\rfloor$：不超过 a 的最大整数.

• $a_k\uparrow a$：数列$\{a_k\}$单增收敛于 a；$a_k\downarrow a$：数列$\{a_k\}$单减收敛于 a.

目　　录

第 1 章　从 Riemann 积分开始

19 世纪开始，在分析中注入严密性逐渐成为数学家们的共识．得益于 Cauchy、Riemann、Darboux 等人的出色工作，函数的可积性有了清晰、严谨的数学定义，这一里程碑性的进展促成了微积分的迅速发展和完善．但是，数学家们也在第一时间内注意到了 Riemann 积分不方便的地方，进而开始了刻画 Riemann 可积函数的不连续点集、引入新积分等有关研究，这些工作最终促成了 Lebesgue 测度和积分理论的出现．

本章作为全书的铺垫，先简要回顾 Riemann 积分的定义和基本性质（以便在第 6 章学习 Lebesgue 积分时做对比），再分析 Riemann 积分对函数连续性的要求带来的一些弊端，并简单介绍数学家们为解决有关问题所做的研究工作．

1.1　回顾 Riemann 积分

给定闭区间$[a, b]$以及$[a, b]$中的有限个点 $x_0, x_1, \cdots, x_k$，假如

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{k-1} < x_k = b$$

则称 $T=\{x_l\}_{0\leqslant l\leqslant k}$是$[a, b]$的一个**分割**，并称 $r(T)=\max\limits_{1\leqslant l\leqslant k}(x_l - x_{l-1})$是 T 的**细度**．现假设 f 是定义于$[a, b]$的实值函数，对于$[a, b]$的一个分割 $T=\{x_l\}_{0\leqslant l\leqslant k}$以及 $\xi_l\in[x_{l-1}, x_l](1\leqslant l\leqslant k)$，我们称 $\sum\limits_{l=1}^{k} f(\xi_l)(x_l - x_{l-1})$ 是 f 的相应于分割 T 的一个**积分和**．

定义 1.1.1　设 $-\infty < a < b < \infty$，f 是定义于$[a, b]$上的实值函数，A 是一个实数．假如

$$\lim_{\delta\to 0+}\sup_{\substack{T:\, T=\{x_l\}_{0\leqslant l\leqslant k}\text{是}[a,b]\text{的分割}\\ \xi_l\in[x_{l-1},x_l](1\leqslant l\leqslant k),\, r(T)<\delta}}\left|\sum_{l=1}^{k} f(\xi_l)(x_l - x_{l-1}) - A\right| = 0$$

则称 f 在$[a, b]$上 **Riemann 可积**，并称 A 为 f 在$[a, b]$上的 **Riemann 积分**，记为

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$$

如用 ε-δ 语言来表述积分的定义，则 f 在 $[a,b]$ 上可积且其 Riemann 积分为 A 就意味着：对于任意的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得对 $[a,b]$ 的任何一个细度小于 δ 的分割 $\{x_l\}_{0\leqslant l\leqslant k}$ 以及 f 相应于这个分割的任何一个积分和 $\sum\limits_{l=1}^{k} f(\xi_l)(x_l-x_{l-1})$，都有

$$\left|\sum_{l=1}^{k} f(\xi_l)(x_l-x_{l-1})-A\right|<\varepsilon$$

例 1.1.1 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q},\ q>0,\ p\text{、}q\text{ 是既约整数}\\ 0, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积且积分为零.

证明 对于任意的 $\varepsilon>0$，容易看出满足 $1/q\geqslant\varepsilon/2$ 的正整数 q 只有有限个，记这个数量为 N. 于是在 $[0,1]$ 中使得 $R(x)\geqslant\varepsilon/2$ 的 x 只有 N 个. 对于 $[0,1]$ 的任意一个分割 $T=\{x_j\}_{0\leqslant j\leqslant k}$，有

$$\sum_{j=1}^{k} R(\xi_j)(x_j-x_{j-1})=\sum_{1\leqslant j\leqslant k}^{\mathrm{I}} R(\xi_j)(x_j-x_{j-1})+\sum_{1\leqslant j\leqslant k}^{\mathrm{II}} R(\xi_j)(x_j-x_{j-1})$$

其中 $\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k}^{\mathrm{I}}$ 中的 $[x_{j-1},x_j]$ 里含有使得 $R(x)\geqslant\varepsilon/2$ 的点，而 $\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k}^{\mathrm{II}}$ 中的 $[x_{j-1},x_j]$ 里不含有使得 $R(x)\geqslant\varepsilon/2$ 的点. 由于 $\sum\limits_{1\leqslant j\leqslant k}^{\mathrm{I}}$ 中至多有 $2N$ 项，因此

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant k}^{\mathrm{I}} R(\xi_j)(x_j-x_{j-1})<2Nr(T)$$

$$\sum_{1\leqslant j\leqslant k}^{\mathrm{II}} R(\xi_j)(x_j-x_{j-1})<\frac{\varepsilon}{2}$$

现在取 $\delta=\varepsilon/(4N)$，上面的讨论说明：当 $[0,1]$ 的分割 $T=\{x_j\}_{0\leqslant j\leqslant k}$ 的细度 $r(T)<\delta$ 时，对于 R 的相应于 T 的任何一个积分和 $\sum\limits_{j} R(\xi_j)(x_j-x_{j-1})$，都有

$$\left|\sum_{j} R(\xi_j)(x_j-x_{j-1})\right|<\varepsilon$$

由 Riemann 积分的定义就知道函数 R 在 $[0,1]$ 上 Riemann 可积且积分为零. □

利用 Riemann 积分的定义，容易证明下述定理.

定理 1.1.1 设 $-\infty<a<b<\infty$，f 是定义于 $[a,b]$ 上的实值函数. 假如 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

为了刻画函数的 Riemann 可积性，我们需要引入 Darboux 上和与 Darboux 下和. 对于区间 $[a,b]$ 上的有界实值函数 f 以及 $[a,b]$ 的一个分割 $T=\{x_k\}_{0\leqslant l\leqslant k}$，令

$$S_T(f)=\sum_{l=1}^{k}M_l(x_l-x_{l-1}),\ s_T(f)=\sum_{l=1}^{k}m_l(x_l-x_{l-1})$$

其中对 $1\leqslant l\leqslant k$，有

$$M_l=\sup_{y\in[x_{l-1},\,x_l]}f(y),\ m_l=\inf_{z\in[x_{l-1},\,x_l]}f(z)$$

我们称 $S_T(f)$ 为 f 的相应于分割 T 的 **Darboux 上和**，而称 $s_T(f)$ 为 f 的相应于分割 T 的 **Darboux 下和**.

引理 1.1.1　设 $-\infty<a<b<\infty$，f 是$[a,b]$上的实值函数.

(1) 假如 $T_1=\{x_l\}_{0\leqslant l\leqslant k}$，$T_2=\{y_m\}_{0\leqslant m\leqslant v}$ 是$[a,b]$的两个分割且 T_2 是 T_1 的加细，即 $T_1\subset T_2$，则 $S_{T_1}(f)\geqslant S_{T_2}(f)$，$s_{T_1}(f)\leqslant s_{T_2}(f)$；

(2) 对于$[a,b]$的任意两个分割 T_1、T_2，必有 $S_{T_1}(f)\geqslant s_{T_2}(f)$；

(3) 假如存在 $M>0$ 使得对于任意的 $x\in[a,b]$，$|f(x)|\leqslant M$，$T=\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant N}$ 是$[a,b]$的一个分割，$y\in(a,b)$且 $y\notin T$，令 $\widetilde{T}=T\cup\{y\}$，则

$$S_{\widetilde{T}}(f)\geqslant S_T(f)-2Mr(T),\ s_{\widetilde{T}}(f)\leqslant s_T(f)+2Mr(T)$$

证明　由于对于任意实数集 A、B，有

$$\sup(A\cup B)=\max\{\sup A,\ \sup B\},\ \inf(A\cup B)=\min\{\inf A,\ \inf B\}$$

因此结论(1)、(3)可以由 S_T、s_T 的定义直接得到. 对于结论(2)，只要注意到

$$S_{T_1}(f)\geqslant S_{T_1\cup T_2}(f)\geqslant s_{T_1\cup T_2}(f)\geqslant s_{T_2}(f)$$

即可. □

令

$$\overline{A_{[a,b]}}(f)=\inf_{T:\ T是[a,b]的分割}S_T(f),\ \underline{A_{[a,b]}}(f)=\sup_{T:\ T是[a,b]的分割}s_T(f)$$

则对于$[a,b]$的任意一个分割 T，有

$$S_T(f)\geqslant\overline{A_{[a,b]}}(f),\ \underline{A_{[a,b]}}(f)\geqslant s_T(f)$$

基于 Darboux 上和与 Darboux 下和的定义及基本性质，可以得到如下结论.

定理 1.1.2　设 $-\infty<a<b<\infty$，f 是定义于$[a,b]$上的有界实值函数，则下面各条件等价.

(1) f 在$[a,b]$上 Riemann 可积；

(2) $\lim\limits_{\delta\to0+}\ \sup\limits_{T:\ T是[a,b]的分割且r(T)<\delta}[S_T(f)-s_T(f)]=0$；

(3) 对于$[a,b]$的任意一列单调加细的分割$\{T_k\}$(即对于任意的正整数 k，T_{k+1} 是 T_k 的加细)，只要 $r(T_k)\to0$，必有

$$\lim_{k\to\infty}S_{T_k}(f)=\lim_{k\to\infty}s_{T_k}(f)\tag{1.1.1}$$

(4) 存在$[a,b]$的一列单调加细的分割$\{T_k\}$，$r(T_k)\to0$，且式(1.1.1)成立；

(5) 任给 $\varepsilon>0$，存在$[a,b]$的一个分割 W，使得

$$S_W(f)-s_W(f)<\varepsilon$$

(6) $\overline{A_{[a,b]}}(f)=\underline{A_{[a,b]}}(f)$.

证明 条件(2)隐含条件(3)、条件(3)隐含条件(4)以及条件(4)隐含条件(5)是明显的，只需证明条件(1)隐含条件(2)、条件(5)等价于条件(6)以及条件(5)+条件(6)隐含条件(1).

先证明条件(1)隐含条件(2). 对于任意的 $\varepsilon>0$，由于 f 在$[a,b]$上 Riemann 可积，故存在 $\delta>0$ 使得对于任意细度小于 δ 的分割 $T=\{x_l\}_{0\leqslant l\leqslant k}$ 以及任意的 $\xi_l\in[x_{l-1},x_l](1\leqslant l\leqslant k)$，都有

$$\left|\sum_{l=1}^{k}f(\xi_l)(x_l-x_{l-1})-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{4}$$

从而有

$$-\frac{\varepsilon}{4}+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<\sum_{l=1}^{k}f(\xi_l)(x_l-x_{l-1})<\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{4}$$

这隐含着

$$-\frac{\varepsilon}{4}+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{l=1}^{k}M_l(x_l-x_{l-1})\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{4}$$

以及

$$-\frac{\varepsilon}{4}+\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sum_{l=1}^{k}m_l(x_l-x_{l-1})\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{4}$$

因此

$$S_T(f)-s_T(f)\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$$

从而条件(2)成立.

现在来证明条件(5)隐含条件(6). 明显地，条件(5)表明：对于任意的 $\varepsilon>0$，$\overline{A_{[a,b]}}(f)<\underline{A_{[a,b]}}(f)+\varepsilon$，所以$\overline{A_{[a,b]}}(f)\leqslant\underline{A_{[a,b]}}(f)$. 再结合$\overline{A_{[a,b]}}(f)\geqslant\underline{A_{[a,b]}}(f)$，即得$\overline{A_{[a,b]}}(f)=\underline{A_{[a,b]}}(f)$.

再来证明条件(6)隐含条件(5). 若$\overline{A_{[a,b]}}(f)=\underline{A_{[a,b]}}(f)$，则对于任意的 $\varepsilon>0$，存在$[a,b]$的一个分割 T_1，使得 $S_{T_1}(f)<\underline{A_{[a,b]}}(f)+\varepsilon/2$. 这又表明存在$[a,b]$的另一个分割 T_2，使得 $S_{T_1}(f)<s_{T_2}(f)+\varepsilon$. 令 $T=T_1\cup T_2$，则

$$S_T(f)-s_T(f)<\varepsilon$$

最后证明条件(5)+条件(6)隐含条件(1). 令 $A=\overline{A_{[a,b]}}(f)=\underline{A_{[a,b]}}(f)$，并设 $\sup\limits_{x\in[a,b]}|f(x)|\leqslant M$. 对于任意的 $\varepsilon>0$，设 $W=\{y_j\}_{0\leqslant j\leqslant L}$ 是$[a,b]$的满足 $S_W(f)-s_W(f)<\varepsilon/2$ 的分割. 取 $\delta=\varepsilon/(8ML)$. 对于任意细度小于 δ 的分割 T，记 $U=T\cup W$. 注意到 U 是 T 添加至多 $L-1$ 个分割点后的加细，由引理 1.1.1 可知

$$S_U(f)\geqslant S_T(f)-2MLr(T),\quad s_U(f)\leqslant s_T(f)+2MLr(T)$$

另一方面，由 $S_U(f)\leqslant S_W(f)$ 和 $s_U(f)\geqslant s_W(f)$ 可得

$$\begin{aligned} S_T(f)-s_T(f) &\leqslant S_U(f)-s_U(f)+4MLr(T) \\ &\leqslant S_W(f)-s_W(f)+\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon \end{aligned}$$

从而有

$$S_T(f)-A\leqslant S_T(f)-s_T(f)<\varepsilon$$

以及

$$A-s_T(f)\leqslant S_T(f)-s_T(f)<\varepsilon$$

这样，对于 f 的相应于分割 T 的任意一个积分和 $\sum\limits_{l=1}^{k}f(\xi_l)(x_l-x_{l-1})$，都有

$$A-\varepsilon<s_T(f)\leqslant\sum_{l=1}^{k}f(\xi_l)(x_l-x_{l-1})\leqslant S_T(f)<A+\varepsilon$$

这意味着

$$\left|\sum_{l=1}^{k}f(\xi_l)(x_l-x_{l-1})-A\right|<\varepsilon$$

因此 f 在$[a,b]$上 Riemann 可积. □

由定理 1.1.2 的证明过程还可以看出：假如$\overline{A_{[a,b]}}(f)=\underline{A_{[a,b]}}(f)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\overline{A_{[a,b]}}(f)$$

设$\{x_l\}_{0\leqslant l\leqslant k}$是$[a,b]$的一个分割，$f$ 是$[a,b]$上的非负有界函数. 对于满足 $1\leqslant l\leqslant k$ 的整数 l，$m_l(x_l-x_{l-1})$其实就是包含于曲边梯形$\{(x,y):x_{l-1}\leqslant x\leqslant x_l,0\leqslant y\leqslant f(x)\}$内部的最大的矩形的面积，而 $M_l(x_l-x_{l-1})$则是包含曲边梯形$\{(x,y):x_{l-1}\leqslant x\leqslant x_l,0\leqslant y\leqslant f(x)\}$的最小的矩形的面积. 定理 1.1.2 表明：函数 f 在$[a,b]$上 Riemann 可积，大体上即指用小矩形的并从曲边梯形的内部和外部做逼近，这两个逼近的效果相同(这在一定意义上与数列极限存在的充分必要条件相吻合).

定理 1.1.2 暗示着可以用连续函数来逼近 Riemann 可积函数. 设$\{y_k\}_{0\leqslant k\leqslant N}$是$[a,b]$的分割，$f$ 是$[a,b]$上的实值函数. 假如存在常数 c_1，…，c_N，使得对于任意的 $1\leqslant k\leqslant N$，f 在(y_{k-1},y_k)上恒等于 c_k，则称 f 是$[a,b]$上的**阶梯函数**.

例 1.1.2　设 $-\infty<a<b<\infty$，f 是定义于$[a,b]$上的实值函数，则 f 在$[a,b]$上 Riemann 可积的充分必要条件是：对于任意的 $\varepsilon>0$，存在$[a,b]$上的阶梯函数 $C(x)$、$c(x)$，使得 $c(x)\leqslant f(x)\leqslant C(x)$且

$$\int_a^b[C(x)-c(x)]\mathrm{d}x<\varepsilon \tag{1.1.2}$$

证明　先证明必要性. 任给 $\varepsilon>0$，由于 f 在$[a,b]$上 Riemann 可积，所以存在$[a,b]$

的一个分割 $T=\{x_l\}_{0\leqslant l\leqslant k}$，使得 $S_T(f)-s_T(f)<\varepsilon$. 设

$$S_T(f)=\sum_{i=1}^{k}M_i(x_i-x_{i-1}),\ s_T(f)=\sum_{i=1}^{k}m_i(x_i-x_{i-1})$$

则

$$C(x)=\sum_{l=1}^{k-1}M_l\,\chi_{[x_{l-1},\,x_l)}(x)+M_k\,\chi_{[x_{k-1},\,x_k]}(x)$$

$$c(x)=\sum_{l=1}^{k-1}m_l\,\chi_{[x_{l-1},\,x_l)}(x)+m_k\,\chi_{[x_{k-1},\,x_k]}(x)$$

就是我们所要找的阶梯函数.

再证明条件的充分性. 对于任意的 $\varepsilon>0$，不失一般性，可以设满足式(1.1.2)的阶梯函数分别为

$$C(x)=\sum_{i=1}^{k-1}c_i\,\chi_{[x_{i-1},\,x_i)}(x)+c_k\,\chi_{[x_{k-1},\,x_k]}(x)$$

$$c(x)=\sum_{j=1}^{l-1}d_j\,\chi_{[y_{j-1},\,y_j)}(x)+d_l\,\chi_{[y_{l-1},\,y_l]}(x)$$

其中$\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant k}$、$\{y_j\}_{0\leqslant j\leqslant l}$都是$[a,b]$的分割，$C_i(i=1,\cdots,k)$和 $d_j(j=1,\cdots,l)$是常数. 记 $T_1=\{x_i\}_{0\leqslant i\leqslant k}$，$T_2=\{y_j\}_{0\leqslant j\leqslant l}$，以及 $T=T_1\cup T_2$，则 T 是$[a,b]$的一个分割，且

$$S_T(f)-s_T(f)<S_{T_1}(f)-s_{T_2}(f)=\int_a^b C(x)\mathrm{d}x-\int_a^b c(x)\mathrm{d}x<\varepsilon$$

由定理 1.1.2 可知 f 在$[a,b]$上 Riemann 可积. □

阶梯函数虽然不一定是连续函数，但是它和连续函数非常接近. 事实上，假如 g 是$[a,b]$上的阶梯函数，且对于$[a,b]$的分割$\{a_l\}_{0\leqslant l\leqslant k}$，$g$ 在(a_{l-1},a_l)上等于 $c_l(1\leqslant l\leqslant k)$，对于任意的 $0<\varepsilon<\min\limits_{1\leqslant l\leqslant k}(a_l-a_{l-1})/2$，令

$$h(x)=\begin{cases}c_l, & l=1\text{ 且 }x\in[a_0,a_1-\varepsilon/k]，\text{或 }l=k\text{ 且 }x\in[a_{k-1}+\varepsilon/k,a_k]\\ c_l, & 2\leqslant l\leqslant k-1\text{ 且 }x\in[a_{l-1}+\varepsilon/k,a_l-\varepsilon/k]\\ \text{线性}, & x\in[a_l-\varepsilon/k,a_l+\varepsilon/k]\text{ 且 }1\leqslant l\leqslant k-1\end{cases}$$

则 $h(x)$在$[a,b]$上连续. 在$[a,b]$上，h 和 g 在除去若干个小区间段外的点处相等，这些小区间段的长度的和小于 ε；同时，有

$$\int_a^b|h(x)-g(x)|\mathrm{d}x<2\varepsilon\max_{1\leqslant l\leqslant k}c_l$$

再由例 1.1.2 即可得出如下结论.

定理 1.1.3 假如 f 是定义于$[a,b]$上的实值 Riemann 可积函数，则对于任意的$\varepsilon>0$，存在$[a,b]$上的连续函数 g，使得

$$\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x<\varepsilon$$

在本节的最后，我们给出**微积分基本定理**.

定理 1.1.4　设 f 是$[a, b]$上的实值函数. 假如 f 在$[a, b]$上处处可导且导函数在$[a, b]$上 Riemann 可积，则

$$\int_a^b f'(x)\mathrm{d}x = f(b) - f(a) \tag{1.1.3}$$

(式(1.1.3)称为 Newton - Leibniz 公式.)

证明　对于正整数 k，取$[a, b]$的分割$\{x_k^l\}_{0\leqslant l\leqslant k}$，其中 $x_k^l=a+\dfrac{l}{k}(b-a)$，$l=0, \cdots, k$. 由微分中值定理可知：对于任意的 l，$1\leqslant l\leqslant k$，存在 $\xi_k^l\in(x_k^{l-1}, x_k^l)$，使得

$$f(x_k^l) - f(x_k^{l-1}) = f'(\xi_k^l)(x_k^l - x_k^{l-1})$$

因为

$$f(b) - f(a) = \sum_{l=1}^k [f(x_k^l) - f(x_k^{l-1})] = \sum_{l=1}^k f'(\xi_k^l)(x_k^l - x_k^{l-1})$$

令 $k\to\infty$并利用 f'的 Riemann 可积性即可得到理想的结论. □

习　题

1. 设$-\infty<A<a<b<B<\infty$，f 在$[A, B]$上 Riemann 可积，证明：

$$\lim_{h\to 0}\int_a^b |f(x+h) - f(x)|\mathrm{d}x = 0$$

2. 设 f 在$[a, b]$上 Riemann 可积，证明：

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x = 0, \quad \lim_{k\to\infty}\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x = 0$$

3. 假设 f 在$[a, b]$上 Riemann 可积，证明：存在有理系数多项式函数列$\{P_k\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b |f(x) - P_k(x)|\mathrm{d}x = 0$$

4. 设 f 在$[0, \infty)$上连续且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，证明：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = a$$

1.2　从容量、测度到 Lebesgue 积分

虽然在 Riemann 积分的定义中并没有对函数的连续性做明确的要求，并且 Riemann

本人也曾经给出过一个在区间$[a, b]$的任意小区间上有无穷个间断点(即间断点集在$[a, b]$上稠密[①])、但在$[a, b]$上仍然可积的函数(见例 1.1.1)，但 Riemann 积分对函数连续性的要求不言而喻. 明显地，假如 $x_0\in[a, b]$是 f 的间断点，$T=\{x_l\}_{0\leqslant l\leqslant k}$是$[a, b]$的分割，则对于包含 x_0的区间$[x_{l-1}, x_l]$，当 $r(T)\to 0$ 时，M_l-m_l并不趋于零. 正如 Darboux 本人和 Volterra 所证明的那样，要使函数 f 在$[a, b]$上 Riemann 可积，包含 f 的间断点的小区间的长度的总和应该任意小才行(可以想象：若把这些不连续点做无缝拼接连在一起，所挤占的长度应该是零). 正是由于对函数的连续性有较高的要求，古典分析中关于积分的一些重要结论都或多或少地有一些缺陷. 例如：

(1) 微积分基本定理. 微积分基本定理是微积分理论中最基本、也最核心的结论之一，正是由于这一定理的建立，微分学和积分学这两个原本各自独立发展的方向开始交汇，从而促进了微积分的诞生；但是 Newton - Leibniz 公式要求函数的导函数 Riemann 可积，一个非常令人关注的问题是：当这个条件不满足时，微分和积分有怎样的关系?

(2) 极限与积分换序的条件比较强. Riemann 积分和极限的换序问题是古典分析中经常涉及的一个问题. 迄今为止所知道的关于 Riemann 积分和极限换序的最弱条件是：若$\{f_k\}$是$[a, b]$上一致有界的 Riemann 可积函数列，

$$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x) \tag{1.2.1}$$

在$[a, b]$上都成立且极限函数 f 在$[a, b]$上也 Riemann 可积，则有[②]

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.2.2}$$

这表明：Riemann 积分和极限的换序条件是比较强的. 一般情况下，$\{f_k\}$是$[a, b]$上的 Riemann可积函数列且式(1.2.1)甚至不能保证极限函数 f 的可积性，即使 f 在$[a, b]$上 Riemann 可积，也未必能保证式(1.2.2)成立.

(3) Riemann 可积函数空间是不完备的. 记 $R([a, b])$为在区间$[a, b]$上 Riemann 可积函数的全体. 我们称$\{f_k\}$是$R([a, b])$中的 Cauchy 列，假如对于任意的ε，存在 N，使得当 $k>N$ 时，对于任意的正整数 p，有

$$\int_a^b |f_k(x)-f_{k+p}(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon$$

一个熟知的事实是“任何 Cauchy 数列必收敛”，因此我们也期望：对 $R([a, b])$中的任意 Cauchy 列$\{f_k\}$ 都存在 $f\in R([a, b])$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b |f_k(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x=0$$

但是存在反例表明这是不可能的.

---

① 见定义 3.2.4.

② Amer Math Monthly，1986，78.