高等学校工科数学系列丛书

微积分教程

学习指导与习题精解（下册）

主　编　高振滨　沈　艳

HEUP 哈尔滨工程大学出版社
Harbin Engineering University Press

微积分教程学习指导与习题精解(下册)

主编　高振滨　沈　艳

HEUP 哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书是配合哈尔滨工程大学应用数学系编写的《微积分教程》一书而使用的辅导参考书。本书分上、下两册。下册内容包括：多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数、微分方程。

本书是供高等院校工科类各专业高等数学学习使用的辅导书，也可以作为习题课教材，同时还可以作为报考硕士研究生复习高等数学的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

微积分教程学习指导与习题精解.下册/高振滨、沈艳主编.—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2012.2(2013.8 重印)

ISBN 978-7-5661-0322-2

Ⅰ.①微… Ⅱ.①高…②沈… Ⅲ.①微积分-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 025982 号

出版发行 哈尔滨工程大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区东大直街 124 号
邮政编码 150001
发行电话 0451-82519328
传　　真 0451-82519699
经　　销 新华书店
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 15
字　　数 292 千字
版　　次 2012 年 2 月第 1 版
印　　次 2013 年 8 月第 2 次印刷
定　　价 29.00 元
http://press.hrbeu.edu.cn
E-mail:heupress@hrbeu.edu.cn

高等学校工科数学系列丛书编审委员会

前　言

微积分课程是工程院校学生必修的一门基础课,它在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力,以及提高学生运算技能、综合应用能力的过程中发挥着重要的作用。

本书是由哈尔滨工程大学应用数学系的教师在总结了多年教学经验和成果的基础上编写而成的,目的是为了帮助学生透彻地理解和掌握微积分基本理论,从而使学生能够将所学到的知识进行巩固与提高,同时也是哈尔滨工程大学应用数学系编写的《微积分教程》的配套辅导书。

本书每章分两大部分内容。第一部分是按章编写的学习指导与练习,其中包括知识要点、典型例题、同步训练题、测验题、同步训练题答案及测验题答案六个部分;第二部分给出了《微积分教程》中的部分习题的详细解答。

在本书编写中,我们力图突出以下特点:

1. 在每章的知识要点中,力图将本章的内容准确、简洁、清晰地表述出来,以使学生在较短的时间内能够准确而全面地把握本章的知识脉络。

2. 在典型例题中,尽量突出解题思路的分析、解题方法的归纳整理以及易错地方的提醒。有些例题也许不是最难的,但却是学生在学习中容易出现错误的地方。

3. 典型例题、同步训练题与测验题的编排由浅入深,循序渐进,符合学生掌握知识的方式。除此之外也配有综合题,以利于提高学生的综合水平。

4. 覆盖所有知识要点,可作为考研学生的复习辅导书。

本书分为上、下两册,本册由高振滨、沈艳担任主编,参加编写的有:李彤(第7章)、马明华(第8章)、隋然(第9章)、周双红(第10章)、陈志杰(第11章)。

本书在编写过程中,得到了哈尔滨工程大学应用数学系的领导与广大教师的帮助与支持,在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请广大读者批评指正。

编　者

2012年1月

目　录

第7章　多元函数微分学

【本章教学内容的基本要求】

1. 理解多元函数的极限与连续概念，以及有界闭区域上连续函数的性质；

2. 理解偏导数和全微分的概念，了解全微分存在的必要和充分条件；

3. 理解方向导数和梯度的概念，并掌握其计算方法；

4. 掌握复合函数一阶、二阶偏导数的求法；

5. 会求隐函数的偏导数和全导数；

6. 了解曲线的切线和法平面及曲面的切平面和法线的概念，会求二元函数的极值，会用拉格朗日乘数法求条件极值，会求简单函数的最大值和最小值，会解一些简单应用题.

【本章重点】多元函数的概念、偏导数与全微分的概念、多元复合函数的求导法则，用拉格朗日条件极值求最大值应用问题，方向导数与梯度.

【本章难点】全微分的概念、多元复合函数的求导法则.

7.1　知识要点

7.1.1　多元函数的基本概念

1. 基本概念

(1)邻域

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是 xOy 平面上的一点，δ 是某一正数，与点 P_0 距离小于 δ 的点 $P(x,y)$ 的全体，称为点 P_0 的 δ 邻域，记为 $U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\{P \mid |P_0P|<\delta\}$$

或

$$U(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$$

其中 δ 为该邻域的半径.

称 $\overset{\circ}{U}(P_0,\delta)=\{(x,y) \mid 0<\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\}$ 为点 P_0 的去心邻域.

(2)内点

若存在点 P 的某一邻域 $U(P,\delta)$，使得 $U(P,\delta)\subset E$，则称 P 为 E 的内点.

(3)边界点

若点 P 的任一邻域内既有属于 E 的点，又有不属于 E 的点(点 P 本身可以属于 E，也可以不属于 E)，则称 P 为 E 的边界点.

(4)开集

若点集 E 的点都是内点，则称 E 为开集.

(5)区域

连通的开集称为区域或开区域.

开区域连同它的边界称为闭区域.

2. 二元函数的极限与连续

(1)二重极限定义

设 $P_0(x_0,y_0)$ 是二元函数 $z=f(x,y)$ 的定义域 D 的内点或边界点，A 是一个确定的数. 如果对任给的正数 ε，总存在正数 δ，使得当

$$P(x,y)\in \mathring{U}(P_0,\delta)\cap D$$

时，恒有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

则称函数 $f(x,y)$ 在动点 $P(x,y)$ 趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时以 A 为二重极限，记作

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A$$

或

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

也可记作

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A$$

(2)二元函数的连续性

设二元函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，$P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的内点或边界点，且 $P_0\in D$，若

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)\quad (P(x,y)\in D)$$

则称二元函数 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 连续.

如果函数 $f(x,y)$ 在 D 的每一点都连续，那么就称函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，或者称 $f(x,y)$ 是 D 上的连续函数.

(3)性质

①一切多元初等函数在其定义区域内是连续的.

②多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续，则它在 D 上有界.

③多元函数 $f(P)$ 在有界闭区域 D 上连续，则在 D 上必取得它的最大值和最小值.

④有界闭区域 D 上的多元连续函数必取得它的最小值与最大值之间的任何一个值.

7.1.2 偏导数和全微分

1. 偏导数

(1) 函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 分别对 x,y 的偏导数为

$$f_x(x_0,y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$

$$f_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

偏导数还可记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad z_x\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}},\quad z_y\Big|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

(2) 如果函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 内每一点 (x,y) 处对 x 的偏导数都存在，那么这个偏导数就是 x,y 的函数，称它为函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 x 的偏导函数，记作

$$\frac{\partial z}{\partial x},\quad \frac{\partial f}{\partial x},\quad z_x,\quad f_x(x,y)$$

类似地，可以定义函数 $z=f(x,y)$ 对自变量 y 的偏导函数，并记作

$$\frac{\partial z}{\partial y},\quad \frac{\partial f}{\partial y},\quad z_y,\quad f_y(x,y)$$

(3) 高阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y),\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)$$

如果函数 $z=f(x,y)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ 在同一区域内连续，那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必相等.

2. 全微分

(1) 如果函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 的全增量

$$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$$

可表示成为

$$\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$$

其中，A, B 不依赖于 Δx, Δy，而仅与 x, y 有关，$\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，则称函数 $f(x,y)$ 在点

(x,y)处可微分.

而$A\Delta x+B\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在点(x,y)处的全微分，记作

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y$$

(2)如果函数在区域D内各点都可微分，那么称这个函数在D内可微分，此时它的全微分为

$$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$$

同理，如果三元函数$u=f(x,y,z)$可微分，那么它的全微分为

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z$$

(3)全微分的四则运算法则

设函数$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$可微，c为常数，则

①$\mathrm{d}(cu)=c\mathrm{d}u$；

②$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$；

③$\mathrm{d}(uv)=u\mathrm{d}v+v\mathrm{d}u$；

④$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\ (v(x,y)\neq 0)$.

3. 全微分在近似计算中的应用

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\ &\approx f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y\end{aligned}$$

若记$x=x_0+\Delta x$，$y=y_0+\Delta y$，则上式变为

$$f(x,y)\approx f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

4. 函数$z=f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$处，其极限、连续、可导、可微之间的关系如图 7－1 所示：

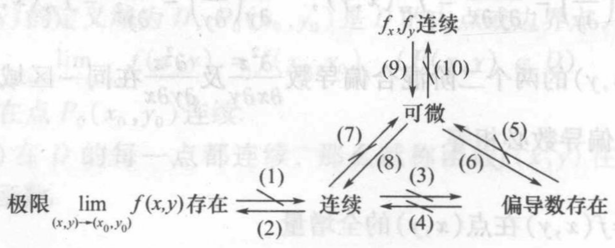

图 7－1

图 7－1 说明以下问题：

(1)函数在点(x_0,y_0)极限存在，但函数在该点(x_0,y_0)不一定连续，例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 1, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

$f(x,y)$在点$(0,0)$极限存在,且$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$(因为$0\leqslant\left|\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\dfrac{x^2y^2}{2xy}\right|=\dfrac{|xy|}{2}\to 0$),但$f(x,y)$在点$(0,0)$不连续.

(2)由定义即得.

(3)函数在点(x_0,y_0)连续,但在该点(x_0,y_0)不一定存在偏导数,例如

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\sqrt{x^2+y^2}=0=f(0,0)$$

而

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x},\ 极限不存在$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta y|}{\Delta y},\ 极限不存在$$

故函数$f(x,y)$在点$(0,0)$连续,但偏导数不存在.

(4)函数在点(x_0,y_0)存在偏导数,但在该点(x_0,y_0)不一定连续,因为偏导数只是刻画函数沿x轴及y轴方向的变化率,并不能给出函数沿其他方向的变化情况. 例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

其中,$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$, 同理,$f_y(0,0)=0$, 即偏导数存在.

但是,$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx}}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\dfrac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$, 显然极限不存在,所以函数在点$(0,0)$不连续.

(5)函数在点(x_0,y_0)的偏导数存在,但在该点(x_0,y_0)不一定可微. 例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点$(0,0)$处有

$$f_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x}=0$$

同理$f_y(0,0)=0$, 即偏导数存在.

下证，函数在(0,0)点不可微.

因为

$$\Delta z-\left[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y\right]=\frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

当沿直线 $y=x$ 趋近于(0,0)时

$$\frac{\dfrac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}}{\rho}=\frac{\Delta x\Delta y}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\frac{\Delta x\Delta x}{(\Delta x)^2+(\Delta x)^2}\to\frac{1}{2}\left((\Delta x,\Delta y)\to(0,0)\right)$$

极限是 $\frac{1}{2}$ 而不是 0，故函数在点(0,0)不可微.

由此可知，对某个函数 $f(x,y)$，求出其两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ 后，$\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y$ 不一定就是全微分.

(6)如果函数在点(x_0,y_0)可微，则偏导数必存在，使得 $\mathrm{d}z=f_x\mathrm{d}x+f_y\mathrm{d}y$.

(7)函数在点(x_0,y_0)连续，但在该点(x_0,y_0)不一定可微. 例如

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

由于

$$0\leqslant\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=\left|\frac{xy}{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left|\sqrt{x^2+y^2}\right|\to 0$$

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0=f(0,0)$，故 $f(x,y)$ 在点(0,0)连续. 但是在(5)中已证明函数在点(0,0)不可微.

(8)函数在点(x_0,y_0)可微，则函数在点(x_0,y_0)连续. 因为若函数可微分，即有 $\Delta z=A\Delta x+B\Delta y+o(\rho)$，从而 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta z=0$，即函数连续.

(9)二元函数在点(x_0,y_0)的两个偏导数 f_x,f_y 连续，则二元函数在点(x_0,y_0)一定可微.

(10)函数在点(x_0,y_0)可微，但偏导数在该点(x_0,y_0)不一定连续. 例如

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在(0,0)点有 $\quad f_x(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x^2}}{x}=0$

同理 $$f_y(0,0)=0$$

$$\Delta z=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)=[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\frac{1}{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}=\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}$$

$$\frac{\Delta z-[f_x(0,0)\Delta x+f_y(0,0)\Delta y]}{\rho}=\frac{\rho^2\sin\frac{1}{\rho^2}}{\rho}=\rho\sin\frac{1}{\rho^2}\to 0$$

(当 $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0$ 时)

故函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的微分存在，且 $\mathrm{d}z|_{(0,0)}=0$.

而

$$f_x(x,y)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}-\dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

当点 (x,y) 沿直线 $y=x$ 趋向于 $(0,0)$ 时，极限

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}f_x(x,y)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{2x}{2x^2}\cos\frac{1}{2x^2}\right)$$

不存在. 故 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f_x(x,y)$ 不存在，$f_x(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续. 同理，$f_y(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续.

7.1.3 复合函数的微分法

1. 复合函数求导法则

(1) 若函数 $u=u(t)$ 及 $v=v(t)$ 都在点 t 可导，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则复合函数 $z=f[u(t),v(t)]$ 在点 t 可导，且其导数为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

(2) 设 $z=f(u,v)$ 与 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 复合而得到函数 $z=f(u(x,y),v(x,y))$，若 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 在点 (x,y) 具有对 x 及 y 的偏导数，函数 $z=f(u,v)$ 在对应点 (u,v) 具有连续偏导数，则 $z=f(u(x,y),v(x,y))$ 在点 (x,y) 的两个偏导数存在，且

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$$

(3) 上面的结果可以推广到三元或三元以上函数.

设 $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$ 及 $w=w(x,y)$ 均在点 (x,y) 具有对 x 及 y 的偏导数，而函数 $z=f(u,v,w)$ 在对应点 (u,v,w) 具有连续偏导数，则复合函数

$$z=f(u(x,y),v(x,y),w(x,y))$$

在点(x,y)的两个偏导数都存在，且

$$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y}+\dfrac{\partial z}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial y}\end{cases}$$

(4)高阶偏导数，求法类似于(1)，(2).

2. 一阶微分形式不变性

设$z=f(u,v)$可微，则

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv$$

又若$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，则

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy,\ dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy$$

代入上式，即

$$\begin{aligned}dz&=\frac{\partial z}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy\right)+\frac{\partial z}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy\right)=\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)dy\\&=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy\end{aligned}$$

可见，无论u,v是自变量还是中间变量，函数$z=f(u,v)$的全微分形式是一样的.

7.1.4 隐函数的微分法

1. 一个方程的情形

(1)设函数$F(x,y)$满足条件：

①$F_x(x,y)$，$F_y(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的某邻域$U(P)$内连续；

②$F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$.

则在$U(P)$内，方程$F(x,y)=0$必能唯一确定一个定义在点x_0的某邻域$U(x_0)$内的一元单值函数$y=f(x)$，使得

1° $F(x,f(x))\equiv 0$，$(x,f(x))\in U(P)$，$x\in U(x_0)$，且$y_0=f(x_0)$；

2° $f(x)$在$U(x_0)$内有连续导函数$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$.

(2)设函数$F(x,y,z)$满足条件：

①$F_x(x,y,z)$，$F_y(x,y,z)$，$F_z(x,y,z)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某邻域$U(P)$内连续；

②$F(x_0,y_0,z_0)=0$，$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

则在$U(P)$内，方程$F(x,y,z)=0$必能唯一确定一个定义在点$Q(x_0,y_0)$的某邻域$U(Q)$内

的二元单值函数 $z=f(x,y)$，使得

1° $F(x,y,f(x,y))\equiv 0$，$(x,y,f(x,y))\in U(P)$，$(x,y)\in U(Q)$，且 $f(x_0,y_0)=z_0$；

2° $f(x,y)$ 在 $U(Q)$ 内有连续偏导数，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

2. 方程组的情形

由方程组

$$\begin{cases}F(x,y,u,v)=0\\ G(x,y,u,v)=0\end{cases}$$

可确定两个二元的隐函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，将之代入上述方程组得到恒等式

$$\begin{cases}F[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0\\ G[x,y,u(x,y),v(x,y)]\equiv 0\end{cases}$$

对此恒等式两边关于变量 x 求导，有

$$\begin{cases}F_x+F_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+F_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\\[2ex] G_x+G_u\dfrac{\partial u}{\partial x}+G_v\dfrac{\partial v}{\partial x}=0\end{cases}$$

解此关于 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial v}{\partial x}$ 的线性方程组，由假设可知在点 $P(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 的一个邻域内，系数行列式 $J=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}\neq 0$，从而求出 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

类似地，可求出 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ 与 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

评注 在解决实际问题时，应首先明确方程组确定的是什么样的函数；其次，以上公式虽然可以直接用，但通常我们是运用推导公式的方法来求导的.

7.1.5 微分法在几何上的应用

1. 空间曲线的切线与法平面

(1) 曲线由参数方程给出的情形

设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$\Gamma:\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{cases}$$

Γ 上对应于 $t=t_0$ 的一点 $M(x_0,y_0,z_0)$，且 $x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)$ 不同时为零，曲线 Γ 在点 M 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

过点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 的法平面方程为

$$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$$

切向量为

$$\boldsymbol{T}=\{x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\}$$

(2)曲线由特殊参数方程给出的情形

曲线方程 $\Gamma:\begin{cases}y=y(x)\\z=z(x)\end{cases}$，此方程可看作 $\Gamma:\begin{cases}x=x\\y=y(x)\\z=z(x)\end{cases}$，若 $y(x),z(x)$ 在 $x=x_0$ 处可导，则 $\boldsymbol{T}=\{1,y'(x_0),z'(x_0)\}$，曲线 Γ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-y_0}{y'(x_0)}=\frac{z-z_0}{z'(x_0)}$$

曲线 Γ 在点 $M(x_0,y_0,z_0)$ 处的法平面方程为

$$(x-x_0)+y'(x_0)(y-y_0)+z'(x_0)(z-z_0)=0$$

(3)曲线由一般方程给出的情形

$$\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

$M(x_0,y_0,z_0)$ 是曲线上的一点，此点处曲线的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}}\quad\left(\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}\text{不全为零}\right)$$

曲线的法平面方程为

$$\begin{vmatrix}F_y & F_z\\G_y & G_z\end{vmatrix}(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z & F_x\\G_z & G_x\end{vmatrix}(y-y_0)+\begin{vmatrix}F_x & F_y\\G_x & G_y\end{vmatrix}(z-z_0)=0$$

2. 曲面的切平面与法线

(1)曲面方程由 $F(x,y,z)=0$ 给出的情形

设曲面 Σ 由方程 $F(x,y,z)=0$ 给出，$M(x_0,y_0,z_0)$ 是 Σ 上的一点，其中 F 为可微函数，且它的三个偏导数不同时为0，则曲面 Σ 在点 M 的切平面方程为

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

其法线方程为