



普通高等教育“十二五”规划教材
电气工程、自动化专业规划教材

自动控制理论及工程应用

张聚 编著



电子工业出版社

PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY

<http://www.phei.com.cn>

普通高等教育“十二五”规划教材
电气工程、自动化专业规划教材

自动控制理论及工程应用

张 聚 编著

電子工業出版社

Publishing House of Electronics Industry

北京·BEIJING

内 容 简 介

本书在介绍自动控制理论和基于 MATLAB 的控制系统仿真技术的基础上, 结合三自由度直升机控制系统的建模、仿真、控制和硬件在回路 (HIL) 实验, 系统地介绍控制理论与 MATLAB 实时控制技术在控制系统实例中的应用。主要内容包括: 自动控制的基本概念、数学基础、控制系统的数学模型、控制系统的运动响应分析、控制系统的运动性能分析、控制系统的校正、控制系统综合应用实例、控制系统的计算机辅助分析与设计、三自由度直升机系统半实物仿真与实时控制等。本书提供电子课件、习题参考答案和仿真程序源代码。

本书可作为高等学校自动化、电气工程及其自动化、电子信息工程、计算机、通信、机械等相关专业的教材, 也可供有关技术人员参考。

未经许可, 不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有, 侵权必究。

图书在版编目 (CIP) 数据

自动控制理论及工程应用 / 张聚编著. —北京: 电子工业出版社, 2015.1

ISBN 978-7-121-24996-9

I. ①自… II. ①张… III. ①自动控制理论—高等学校—教材 IV. ①TP13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 279115 号



策划编辑: 王羽佳

责任编辑: 周宏敏

印 刷: 北京中新伟业印刷有限公司

装 订: 北京中新伟业印刷有限公司

出版发行: 电子工业出版社

北京市海淀区万寿路 173 信箱 邮编: 100036

开 本: 787×1092 1/16 印张: 16 字数: 473 千字

版 次: 2015 年 1 月第 1 版

印 次: 2015 年 1 月第 1 次印刷

印 数: 3 000 册 定价: 38.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题, 请向购买书店调换。若书店售缺, 请与本社发行部联系, 联系及邮购电话: (010)88254888。

质量投诉请发邮件至 zltz@phei.com.cn, 盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

服务热线: (010)88258888。

前 言

本书系统地论述自动控制理论、基于 MATLAB 的控制仿真技术以及三自由度直升机控制系统的仿真、控制和实验等内容,涉及控制理论、模型参数辨识、控制仿真技术、控制方法工具和工程实际控制应用案例。本书既介绍控制理论,也介绍控制系统的 MATLAB/Simulink 仿真,还介绍控制系统实例和实验;既有基于传递函数系统,也有基于状态空间控制系统的介绍;既有一般性的仿真方法和技术介绍,也有具体的应用实例。

在本书中,以加拿大 Quanser 公司的三自由度直升机系统的建模、分析、仿真、实验、半实物实时控制平台等内容为基础,系统介绍控制理论与 MATLAB 实时控制技术在真实控制系统实例中的应用,讨论控制的作用和效果,做到理论、仿真和实验统一,以及对象实物、控制工具和手段及控制效果的统一。

本书通过控制理论、控制仿真和控制实验的结合,将使学生对控制系统的工作原理既有直观的感受,又能理解得更为深入,对控制理论在实际对象中的应用及控制效果有亲身的体会,有效地激发和提升学生的学习兴趣,提高学生学习的主动性和自觉性,培养学生的创新能力,把学生从烦琐具体的细节中解脱出来而侧重于关键性、创造性的逻辑思维劳动,提高学生解决实际问题的能力,并缩短了理论学习与解决问题之间的距离。

全书共分 9 章,在介绍自动控制的基本概念以及必要的数学理论基础上,阐述控制系统的数学模型、控制系统的运动响应分析、控制系统的运动性能分析,以及控制系统的校正等相对完整的基本控制理论。在第 7 章中,结合电机控制系统的建模、控制和实验,介绍控制系统综合应用的例子。在第 8 章中,介绍基于 MATLAB/Simulink 控制系统的计算机辅助分析与设计。涉及内容包括基于 MATLAB/Simulink 的控制系统建模和仿真,以及基于 MATLAB 的控制系统校正。在第 9 章中,结合加拿大 Quanser 公司的三自由度直升机系统,对三自由度直升机系统的建模、分析、仿真、实验及半实物实时控制平台给出全面的介绍,以展示控制理论与方法在复杂控制对象中的应用和效果。

本书向使用本书作为教材的高校教师提供免费电子课件、习题参考答案和仿真程序代码,请登录华信教育资源网<http://www.hxedu.com.cn>注册下载。

本书可以作为高等学校电气信息类(自动化专业、电气工程及其自动化、电子信息工程),以及计算机、通信、机械工程及其相关专业的教材,并可供有关科技人员参考。

在本书的编写过程中,参考和引用了有关专家的书籍、文献资料、网络课程以及课程支持网站中的有关内容。在书稿的准备过程中,研究生程鑫滢、秦婷同学对书中的例子做了仿真和实验,以及承担了部分书稿的录入工作。在此一并表示感谢。

书中难免有错误和不足之处,殷切希望广大读者批评指正。

张 聚

浙江工业大学 智能控制与信息处理研究所

目 录

第 1 章 自动控制的基本概念	1
1.1 概述	1
1.2 反馈控制的概念及特点	1
1.3 典型自动控制系统的组成及工作原理	2
1.4 自动控制系统的性能要求	4
习题	4
第 2 章 数学基础——拉普拉斯变换	6
2.1 拉氏变换的基本概念	6
2.2 拉氏变换的主要运算定理	10
2.3 拉氏变换应用举例	15
第 3 章 控制系统的数学模型	21
3.1 微分方程模型	21
3.2 传递函数模型	26
3.3 结构框图模型	32
3.3.1 结构框图的基本概念	32
3.3.2 结构框图的等效变换	33
3.4 控制系统数学模型参数的实验确定	36
3.4.1 引言	36
3.4.2 简单二阶系统阶跃响应	37
3.4.3 一种新的辨识方法	42
3.5 状态空间模型	48
3.5.1 引言	48
3.5.2 状态与状态空间的概念	49
3.5.3 状态与状态空间的概念系统的状态空间描述	49
3.5.4 线性系统的状态空间表达式	54
3.5.5 状态方程的线性变换	55
习题	57
第 4 章 控制系统的运动响应分析	60
4.1 典型输入一阶系统的运动响应分析	60
4.2 典型输入二阶系统的运动响应分析	61
4.3 高阶系统的运动响应分析	65
4.4 控制系统的频率特性	66

4.4.1 对数频率特性 (Bode 图)	66
4.4.2 幅相频率特性 (Nyquist 图)	73
习题	77
第 5 章 控制系统的运动性能分析	80
5.1 控制系统的运动性能分析	80
5.1.1 稳定的充要条件	80
5.1.2 稳定性分析判据	81
5.1.3 稳定裕度	84
5.1.4 稳定裕度的计算	85
5.2 控制系统的稳态性能 (控制精度) 分析	86
5.2.1 稳态误差的定义	86
5.2.2 稳态误差的分析与计算	87
5.2.3 稳态误差的影响因素 (减小稳态误差的方法)	91
5.3 控制系统的暂态性能 (响应速度) 分析	93
5.3.1 暂态性能指标	93
5.3.2 一阶系统的性能指标计算	94
5.3.3 二阶欠阻尼系统的性能指标计算	94
习题	96
第 6 章 控制系统的校正	99
6.1 校正装置	99
6.1.1 超前校正网络及其特性	99
6.1.2 滞后校正网络及其特性	101
6.1.3 滞后-超前校正网络及其特性	103
6.2 串联 PID 校正 (基于频域方法)	104
6.2.1 比例微分 (PD) 控制	105
6.2.2 比例积分 (PI) 控制	105
6.2.3 比例积分微分 (PID) 控制	105
6.3 反馈校正	108
6.4 反馈和前馈复合校正	108
习题	109
第 7 章 控制系统综合应用实例	111
7.1 概述	111
7.2 实验设备	111
7.3 模型辨识	112
7.3.1 无滚筒系统的传递函数	112
7.3.2 带滚筒系统的传递函数	115
7.4 补偿控制器设计与实现	119
7.4.1 积分控制	120
7.4.2 比例-积分控制	123

第 8 章	控制系统的计算机辅助分析与设计	124
8.1	MATLAB 简介	124
8.1.1	操作界面介绍	125
8.1.2	帮助系统	126
8.1.3	工具箱	128
8.2	MATLAB 基本使用方法	129
8.2.1	基本要素	129
8.2.2	应用基础	131
8.2.3	数值运算	135
8.2.4	符号运算	139
8.2.5	图形表达功能	143
8.2.6	程序设计基础	151
8.3	基于 MATLAB 控制系统的数学模型分析	154
8.3.1	数学模型的建立	154
8.3.2	数学模型的转换	162
8.3.3	数学模型的连接	167
8.4	基于 MATLAB 控制系统的运动响应分析	169
8.4.1	零输入响应分析	169
8.4.2	脉冲输入响应分析	171
8.4.3	阶跃输入响应分析	172
8.4.4	任意输入响应分析	174
8.4.5	根轨迹分析方法	176
8.4.6	控制系统的频率特性	179
8.5	基于 MATLAB 控制系统的运动性能分析	183
8.5.1	控制系统的稳定性分析	183
8.5.2	控制系统的稳态性能分析	188
8.5.3	控制系统的动态性能分析	189
8.6	基于 Simulink 控制系统的建模与仿真	191
8.6.1	Simulink 模块库	191
8.6.2	Simulink 的基本操作	200
8.6.3	Simulink 建模与仿真	201
8.7	基于 MATLAB 控制系统的校正	206
8.7.1	PID 控制器	206
8.7.2	超前校正	209
8.7.3	滞后校正	211
8.7.4	SISO 设计工具	213
习题		220
第 9 章	三自由度直升机系统半实物仿真与实时控制	225
9.1	Quanser 三自由度直升机的系统结构和数学模型	225
9.2	PID 控制器设计	228

9.3 数值仿真 229

9.4 半实物仿真与实时控制..... 234

 9.4.1 半实物仿真系统..... 234

 9.4.2 无主动干扰系统（Active Disturbance System, ADS） 235

 9.4.3 含主动干扰系统（ADS） 238

9.5 半实物仿真实验结果..... 243

 9.5.1 无主动干扰系统（ADS） 243

 9.5.2 含主动干扰系统（ADS） 245

参考文献..... 248

第1章 自动控制的基本概念

1.1 概 述

自动控制理论是研究自动控制共同规律的技术科学。它的发展初期,是以反馈理论为基础的自动调节原理,主要用于工业控制。第二次世界大战期间,为了设计和制造飞机及船用自动驾驶仪、火炮定位系统、雷达跟踪系统以及其他基于反馈原理的军用装备,进一步促进并完善了自动控制理论的发展。到战后,已形成完整的自动控制理论体系,这就是以传递函数为基础的经典控制理论,它主要研究单输入—单输出、线性定常系统的分析和设计问题。

20 世纪 60 年代初期,随着现代应用数学新成果的推出和电子计算机技术的应用,为适应宇航技术的发展,自动控制理论跨入了一个新阶段——现代控制理论。它主要研究具有高性能、高精度的多变量变参数系统的最优控制问题,主要采用的方法是以状态为基础的状态空间法。目前,自动控制理论还在继续发展,正向以控制论、信息论、仿生学为基础的智能控制理论深入。

在现代科学技术的众多领域中,自动控制技术起着越来越重要的作用。所谓自动控制,是指在没有人直接参与的情况下,利用外加的设备或装置(称控制装置或控制器),使机器、设备或生产过程(统称被控对象)的某个工作状态或参数(即被控量)自动地按照预定的规律运行。例如,数控车床按照预定程序自动地切削工件;化学反应炉的温度或压力自动地维持恒定;雷达和计算机组成的导弹发射和制导系统自动地将导弹引导到敌方目标;无人驾驶飞机按照预定航迹自动升降和飞行,人造卫星准确地进入预定轨道运行并回收等,这一切都是以应用高水平的自动控制技术为前提的。

近几十年来,随着电子计算机技术的发展和应用,在宇宙航行、机器人控制、导弹制导以及核动力等高新技术领域中,自动控制技术更具有特别重要的作用。不仅如此,自动控制技术的应用范围现已扩展到生物、医学、环境、经济管理和其他许多社会生活领域中,自动控制已成为现代社会活动中不可缺少的重要组成部分。

1.2 反馈控制的概念及特点

为了实现各种复杂的控制任务,首先要将被控对象和控制装置按照一定的方式连接起来,组成一个有机总体,这就是自动控制系统。在自动控制系统中,被控对象的输出量即被控量是要求严格加以控制的物理量,它可以要求保持为某一恒定值,例如温度、压力、液位等,也可以要求按照某个给定规律运行,例如飞行航迹、记录曲线等;而控制装置则是对被控对象施加控制作用的机构的总体,它可以采用不同的原理和方式对被控对象进行控制,但最基本的一种是基于反馈控制原理组成的反馈控制系统。

在控制系统中,反馈的概念是很重要的。反馈控制是一种基本的控制规律,它具有自动修正被控量偏离给定值的作用,因而可以抑制内扰和外扰所引起的误差,达到自动控制的目的。

如图 1.2.1 所示是一个反馈控制系统,如果没有反馈回路,整个系统将在给定的输入信号作用下经控制器调节,得出输出响应,这样的控制策略又称为开环控制。在理想的条件下,这种控制有时是可行的。一些开环控制的例子如洗衣机的控制和暖气控制等。再举一个例子,我们想把一壶水烧开,最直接的办法是将水壶放在煤气炉上加热。如果只采用开环控制的方法,则一壶水在烧开后继续加热,

直至水全部被汽化，并将对水壶产生破坏。在电动水壶中，我们由某种方式检验壶中水的汽化程度，在烧开后会自动关闭加热器。可以看出，电动水壶的控制还是比较理想的，至少会节约能源，另外还可避免事故的发生。

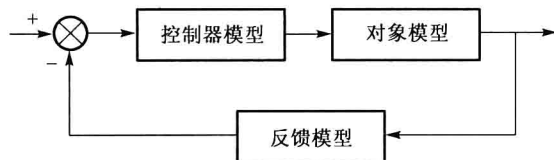


图 1.2.1 典型的反馈控制结构

在开环情况下，外界可能对系统有某些扰动信号，而在开环控制下这样的扰动是不能在控制器中反映出来的，控制器将以一成不变的形式对原系统进行继续控制，而忽略扰动信号的存在。这样系统的输出很难与我们所预期的一致，甚至会出现系统的不稳定现象。有了反馈信号后，则可以通过系统的实际输出信号和预期的输出信号之间的偏差来调整整个系统的响应，而实际的输出信号就是由反馈环节提供的。如果系统的输出信号偏移了期望的输出信号，则控制器将发生作用，迫使实际的输出信号再发生变化，去逼近期望的输出信号。

通常，我们把取出输出量并送回到输入端，并与输入信号相比较产生偏差信号的过程称为反馈。若反馈的信号是与输入信号相减，使产生的偏差越来越小，则称为负反馈；反之，则称为正反馈。反馈控制就是采用负反馈并利用偏差进行控制的过程，而且，由于引入了被控量的反馈信息，整个控制过程称为闭合过程，因此反馈控制也称为闭环控制。未引入被控量的反馈信息的系统称为开环系统，将开环系统和闭环系统相结合则是复杂控制系统。

在工程实践中，为了实现对被控对象的反馈控制，系统中必须配置具有“人”的眼睛、大脑和手臂功能的设备，以便用来对被控量进行连续测量、反馈和比较，并按偏差进行控制。这些设备依其功能分别称为测量元件、比较元件和执行元件，并统称为控制装置。

1.3 典型自动控制系统的组成及工作原理

自动控制系统根据被控对象和具体用途的不同，可以有各种不同的结构形式。但是，从工作原理来看，自动控制系统通常是由一些具有不同职能的基本元部件所组成的。图 1.3.1 所示是一个典型自动控制系统的职能框图，简称方块图。图中的每一个方块代表一个具有特定功能的元件。可见，一个完善的自动控制系统通常是由测量反馈元件、比较元件、放大元件、校正元件、执行元件以及控制对象等基本环节组成的。通常，还把图中除被控对象外的所有元件合在一起，称为控制器。

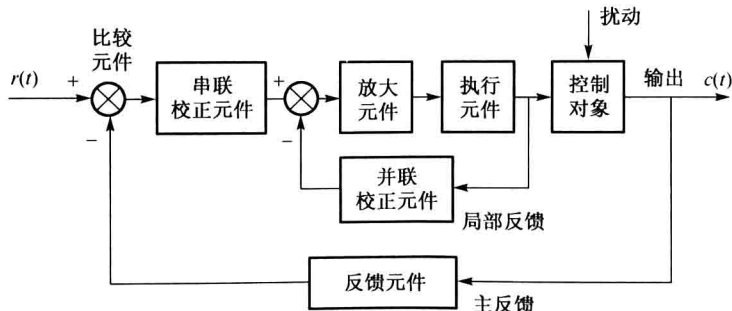


图 1.3.1 典型自动控制系统的方块图

图 1.3.1 所示的各元件的职能如下。

- 测量反馈元件：用以测量被控量并将其转换成与输入量同义的物理量后，再反馈到输入端以进行比较。
- 比较元件：用来比较输入信号与反馈信号，并产生反映两者差值的偏差信号。
- 放大元件：将微弱的信号进行线性放大。
- 校正元件：按某种函数规律变换控制信号，以利于改善系统的动态品质或静态性能。
- 执行元件：根据偏差信号的性质执行相应的控制作用，以便使被控制量按期望值变化。
- 控制对象：又称为被控对象或受控对象，通常是指生产过程中需要进行控制的工作机械或生产过程。出现于被控对象中需要控制的物理量称为被控量。

在此以热力系统为例说明一个自动控制系统的组成及原理。如图 1.3.2 所示为热力系统的人工反馈控制图。

在这里人起到了控制器的作用，他希望使热水温度保持在给定温度上，为了测量热水的实际温度，在热水的输出管道内安装了一支温度计，温度计测得的温度就是系统的输出量。操纵者始终监视着温度计，当发现温度高于希望值时，就减少输送到系统中的蒸汽量，以降低其温度；当发现温度低于希望的温度时，操纵者就反向操纵蒸汽阀门，使进入系统的蒸汽量增大，以提高这一温度。

这种控制作用是基于闭环控制原理的。在这个例子中，输出量的反馈（水温）与参考输入量的比较以及控制作用都是通过人来实现的。这就是一种闭环控制系统，这类系统可以称为人工反馈系统，或叫作人工闭环控制系统。

如果用自动控制器来取代人工操作，如图 1.3.3 所示，就变成自动控制系统，或叫作自动反馈控制系统、自动闭环控制系统。

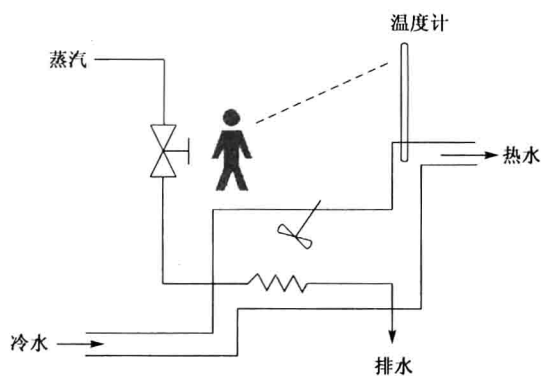


图 1.3.2 热力系统的人工反馈控制图

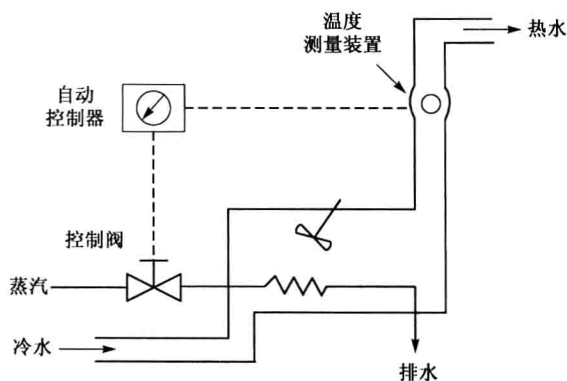


图 1.3.3 热力系统的自动反馈控制

将自动控制器刻度盘上指针的位置标定在（转到）希望的温度，例如 80°C 。系统的输出量，即热水的实际温度，由温度测量装置予以测定后，与希望的温度值进行比较，以产生误差信号。为此，在进行比较之前，需通过变送器将输出温度变成与输入量（即给定值，参考量）相同的物理量。（变送器是将信号从一种物理量变换成另一种物理量的装置。）在自动控制器中，产生的误差信号经过放大后，作为控制器的输出量加到控制阀上，从而改变控制阀的开度，使进入系统的蒸汽量发生相应的变化，最后使实际的水温得到校正。如果没有误差信号，当然也就不必改变控制阀的开度了。

在上述系统中，环境温度的变化，以及输入冷水温度的变化等，都可看作是系统的外扰。

人工反馈和自动反馈控制系统的工作原理是相似的。操纵者的眼睛类似于误差测量装置；操纵者的大脑类似于自动控制器；而操纵者的肌体则类似于执行机构。

在复杂的控制系统中，由于系统中各变量之间存在着错综复杂的关系，所以就很难进行人工操纵了。应当指出，即使在简单的系统中，采用自动控制器也有利于消除人工操纵造成的误差。所以，如果要求精确控制，就必须采用自动控制系统。

1.4 自动控制系统的性能要求

要提高控制质量，就必须对自动控制系统的性能提出一定的具体要求。由于各种自动控制系统的被控对象和要完成的任务各不相同，故对性能指标的具体要求也不一样。但总的来说，都是希望实际的控制过程尽量接近理想的控制过程。工程上把控制性能的要求归纳为稳定性、快速性和准确性三个方面，即稳、准、快。

1. 稳定性

稳定性是指系统重新恢复平静状态的能力。任何一个能够正常运行的控制系统，首先必须是稳定的。对恒值系统要求当系统受到扰动后，经过一定时间的调整能够回到原来的期望值。对随动系统，被控制量始终跟踪参照量的变化。稳定性是对系统的基本要求，不稳定的系统是无法使用的，系统激烈而持久的振荡会导致功率元件过载，甚至使设备损坏而发生事故，这是绝不能允许的。稳定性通常由系统的结构决定，与外界因素无关。

2. 快速性

由于系统的对象和元件通常具有一定的惯性，并受到能源功率的限制，因此，当系统输入（给定输入或扰动输入）信号改变时，在控制作用下，系统必然由原先的平衡状态经历一段时间才过渡到另一个新的平衡状态，这个过程为过渡过程。过渡过程越短，表明系统的快速性越好。快速性是衡量系统质量高低的重要指标之一，在现代化军事设施中显得尤其重要。

3. 准确性

用稳态误差来表示。如果在参考输入信号作用下，当系统达到稳态后，其稳态输出与参考输入所要求的期望输出之差叫作给定稳态误差。显然，这种误差越小，表示系统的输出跟随参考输入的精度越高。

由于被控对象具体情况的不同，各种系统对上述三方面性能要求的侧重点也有所不同。例如，随动系统对快速性和稳态精度的要求较高，而恒值系统一般侧重于稳定性能和抗扰动的能力。在同一个系统中，上述三方面的性能要求通常是相互制约的。例如，为了提高系统的动态响应的快速性和稳态精度，就需要增大系统的放大能力，而放大能力的增强必然促使系统动态性能变差，甚至会使系统变为不稳定。反之，若强调系统动态过程平稳性的要求，系统的放大倍数就应较小，从而导致系统稳态精度的降低和动态过程的缓慢。由此可见，系统动态响应的快速性、高精度与动态稳定性之间是一对矛盾。

习 题

1. 从控制的观点分析飞机在气流中和轮船在海浪中能保持预定航向行驶的原因。
2. 人闭上眼睛，很难到达预定的目标，试从控制系统的角度进行分析。
3. 控制系统采用反馈的基本原因是要在不确定性存在的情况下达到性能目标。请列举实际工程中常见控制系统的几种不确定性。

4. 某个控制系统被控对象的模型为 $H(s)$ ，有人认为只要在被控对象前串联环节 $\frac{1}{H(s)}$ ，这个开

环系统就具有很好的性能。这种做法可行吗？为什么？

5. 恒值控制系统分析与设计的重点是什么？

6. 随动控制系统分析与设计的重点是什么？

7. 自动控制系统常通过负反馈而构成一个闭环控制系统。简述负反馈的主要作用。

8. 图 P1.1 所示为一晶体管稳压电源电路图， U 为整流电路（图中未画出）的输出电压。试分别指出哪个量是给定量、被控量、反馈量、扰动量。画出系统的框图，写出其自动调节过程。

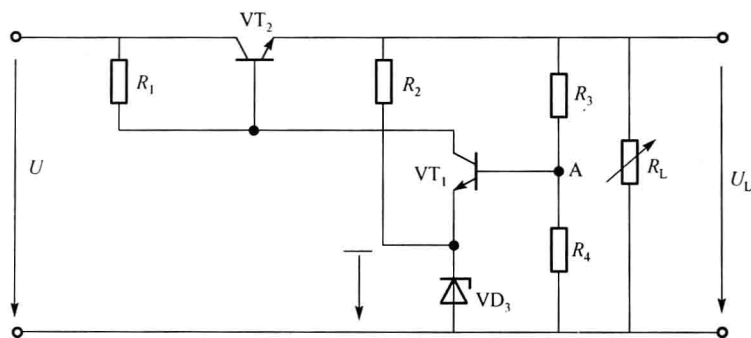


图 P1.1

第2章 数学基础——拉普拉斯变换

拉普拉斯 (Laplace) 变换, 简称拉氏变换, 是一种函数的数学变换, 经变换后, 可将微分方程变换成代数方程式, 并且在变换的同时将初始条件引入, 避免了经典求解法中求积分常数的麻烦, 从而使微分方程的求解过程大为简化。

在经典自动控制理论中, 自动控制系统的数学模型是建立在传递函数基础上的, 而传递函数的概念又是建立在拉氏变换的基础上的, 所以, 拉氏变换是经典控制理论的数学基础。

2.1 拉氏变换的基本概念

若将一个实变量 t 的函数 $f(t)$, 乘以指数函数 e^{-st} (其中 $s = \sigma + j\omega$, 是一个复变数), 再在 0 到 ∞ 区间对 t 进行积分, 就得到一个新的函数 $F(s)$ 。 $F(s)$ 即称为 $f(t)$ 的拉氏变换, 并可用符号 $L[f(t)]$ 表示。

$$F(s) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (2-1)$$

上式称为拉氏变换的定义式。在这里, 为了保证式中等号右边的积分存在 (收敛), 函数 $f(t)$ 应满足以下几个条件:

- ① 当 $t < 0$ 时, $f(t) = 0$;
- ② 当 $t > 0$ 时, $f(t)$ 分段连续;
- ③ 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $f(t)$ 上升较 e^{-st} 来得慢。

在这里要注意的是, $\int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$ 是一个定积分。在积分过程中, t 将在新函数中消失。因此, $F(s)$ 只取决于 s , 它是复变数 s 的函数。这样, 拉氏变换就将原来的实变量函数 $f(t)$ 转化为复变量函数 $F(s)$ 。

拉氏变换是一种单值变换。 $f(t)$ 和 $F(s)$ 具有一一对应的关系。通常称 $f(t)$ 为原函数, $F(s)$ 为象函数。

由拉氏变换的定义式, 可以从已知的原函数求取对应的象函数。

1. 单位阶跃函数 $\mu(t)$ 的象函数 $L[\mu(t)]$

在自动控制原理中, 单位阶跃函数是一个突加作用信号, 相当于一个开关的闭合 (或断开)。首先, 给出单位阶跃函数的定义式:

$$\text{设函数 } \mu_{\varepsilon}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\varepsilon}t, & 0 \leq t \leq \varepsilon \\ 1, & t > \varepsilon \end{cases}$$

则单位阶跃函数 $\mu(t)$ 定义为

$$\mu(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_{\varepsilon}(t)$$

如图 2.1.1 所示。

$$\mu(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

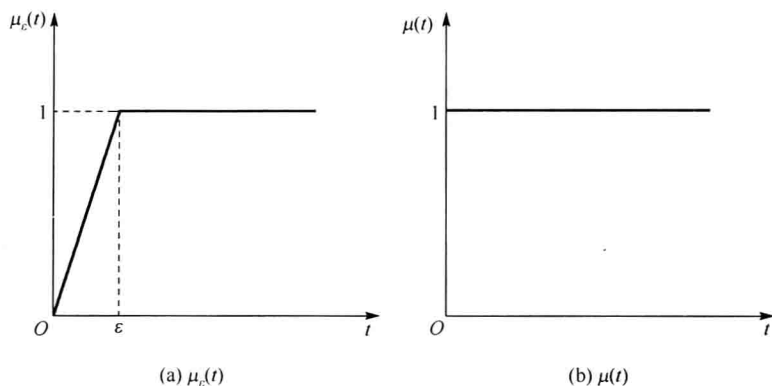


图 2.1.1 单位阶跃函数

根据拉氏变换的定义式 (2-1) 可求得 $L[\mu(t)]$:

$$F(s) = L[\mu(t)] = \int_0^{\infty} 1e^{-st} dt = -\frac{1}{s}e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (2-2)$$

2. 单位脉冲函数 $\delta(t)$ (又称狄拉克函数) 的象函数 $L[\delta(t)]$

在自动控制原理中, 单位脉冲函数是一个突加冲激信号, 常以它作为扰动 (或给定) 的冲激信号。同理, 在求它的象函数前, 首先应给出单位脉冲函数的定义式:

$$\text{设函数 } \delta_\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0 < t < \varepsilon \\ 0, & t > \varepsilon \end{cases}$$

$\delta_\varepsilon(t)$ 函数的特点是:

$$\int_0^{\infty} \delta_\varepsilon(t) dt = \int_0^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(t) dt = \frac{1}{\varepsilon} t \Big|_0^{\varepsilon} = 1$$

也就是说, 如图 2.1.2(a) 所示, 不论 ε 为多大, $\delta_\varepsilon(t)$ 对时间的积累 (即 $\delta_\varepsilon(t)$ 图形所包围的面积) 恒等于 1。

单位脉冲函数 $\delta(t)$ 定义为:

$$\delta(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(t)$$

$$\text{也就是说, 单位脉冲函数 } \delta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \text{由 } 0 \rightarrow \infty, \text{ 再由 } \infty \rightarrow 0, & t = 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

其图形如图 2.1.2(b) 所示。

同样, $\delta(t)$ 对时间的积分也为 1, 即

$$\int_0^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \delta_\varepsilon(t) dt = 1$$

同理，由拉氏变换定义式可求得 $L[\delta(t)]$ ：

$$\begin{aligned}
 F(s) &= L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \delta(t) e^{-st} dt \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{\varepsilon} \delta_{\varepsilon}(t) e^{-st} dt + \int_0^{\infty} \delta_{\varepsilon}(t) e^{-st} dt \right] \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} dt \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\frac{1}{\varepsilon s} e^{-st} \right]_0^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon s} = 1 \quad (\text{应用洛必达法则}) \quad (2-3)
 \end{aligned}$$

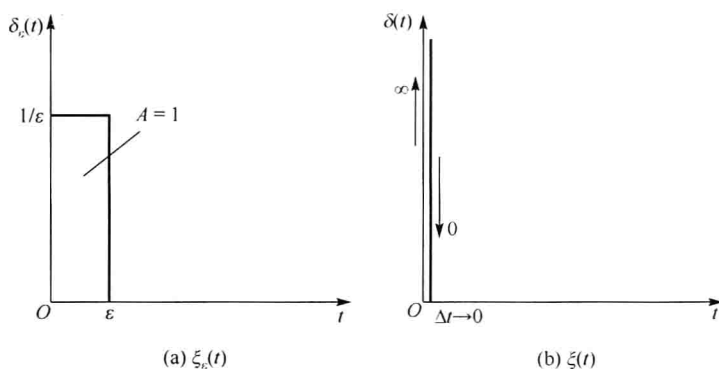


图 2.1.2 单位脉冲函数

3. 斜坡函数的象函数 $L[Kt]$

斜坡函数的定义式为：

$$f(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ Kt, & t \geq 0 \end{cases}$$

在自动控制原理中，斜坡函数是一个对时间做均匀变化的信号。在研究跟随系统时，常以斜坡信号作为典型的输入信号。同理，根据拉氏变换的定义式有：

$$\begin{aligned}
 F(s) &= L[Kt] = K \int_0^{\infty} t e^{-st} dt = Kt \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{K e^{-st}}{-s} dt \quad (\text{应用分部积分法和洛比达法则}) \\
 &= \frac{K}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{K}{s^2} \quad (2-4)
 \end{aligned}$$

若式中 $K=1$ ，即为单位斜坡函数，则

$$L[t] = \frac{1}{s^2}$$

4. 指数函数 e^{-at} 的象函数 $L[e^{-at}]$

由拉氏变换的定义式有：

$$F(s) = L[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{1}{s+a} e^{-(s+a)t} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+a} \quad (2-5)$$

5. 正弦函数的象函数 $L[\sin \omega t]$

由拉氏变换的定义式有：

$$\begin{aligned} F(s) = L[\sin \omega t] &= \int_0^\infty \sin \omega t e^{-st} dt = \int_0^\infty \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}) e^{-st} dt \text{ ①} \\ &= \frac{1}{2j} \left[\int_0^\infty e^{-(s-j\omega)t} dt - \int_0^\infty e^{-(s+j\omega)t} dt \right] = \frac{1}{2j} \left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega} \right) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (2-6)$$

在实际运用中，常把原函数与象函数之间的对应关系列成对照表的形式。通过查表，就能够知道原函数的象函数或象函数的原函数，十分方便。常用函数的拉氏变换见表 2.1.1。

表 2.1.1 常用函数的拉氏变换对照表

序号	原函数 $f(t)$	象函数 $F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$\mu(t)$	$\frac{1}{s}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
4	t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
5	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
6	$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
7	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
8	$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
9	$\frac{1}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
10	$\frac{1}{\beta - \alpha} (\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t})$	$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
11	$\frac{1}{\alpha} (1 - e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$
12	$\frac{1}{\alpha\beta} \left[1 + \frac{1}{\alpha - \beta} (\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}) \right]$	$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$
13	$e^{-at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$
14	$e^{-at} \cos \omega t$	$\frac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2 + \omega^2}$
15	$\frac{1}{a^2} (e^{-at} + at - 1)$	$\frac{1}{s^2(s+\alpha)}$
16	$\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin \omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t$	$\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}, \quad 0 < \zeta < 1$

① 由欧拉（Euler）公式有：

$$e^{j\omega} = \cos \alpha + j \sin \alpha, \quad e^{-j\omega} = \cos \alpha - j \sin \alpha$$

因此有：

$$\sin \alpha = \frac{e^{j\omega} - e^{-j\omega}}{2j}, \quad \cos \alpha = \frac{e^{j\omega} + e^{-j\omega}}{2}$$