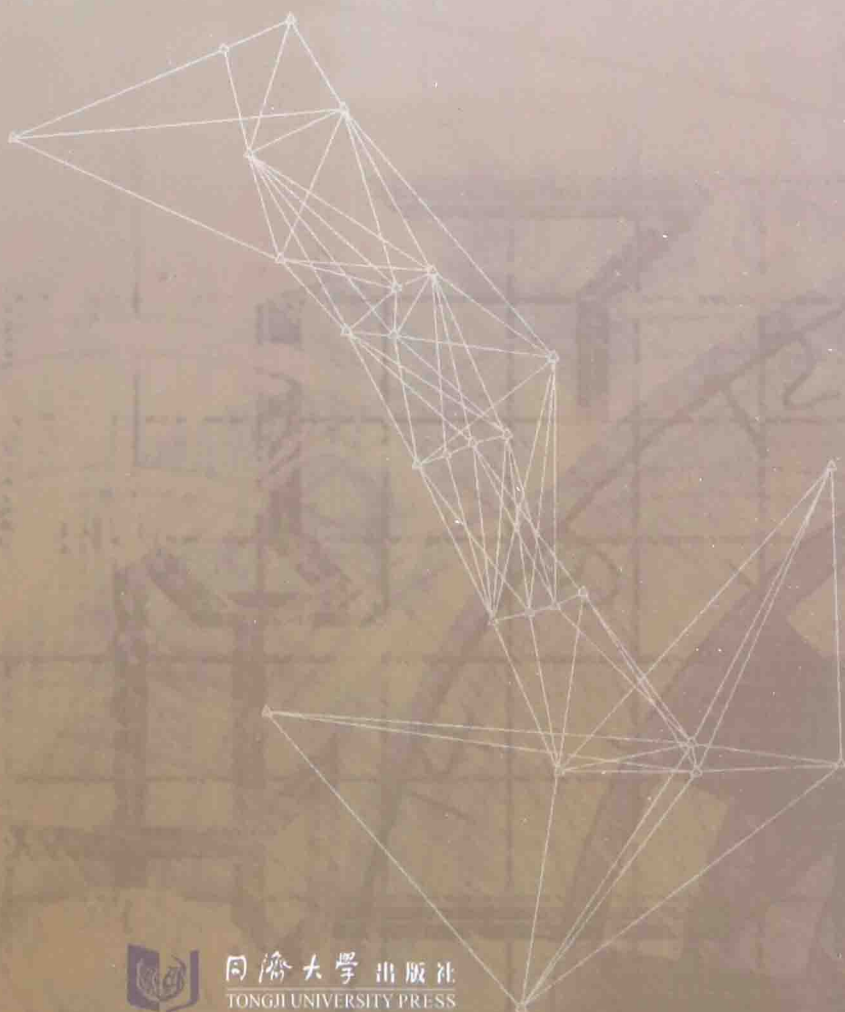


王穗辉 编著

误差理论与测量平差

(第二版)



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

误差理论与测量平差(第二版)

王穗辉 编著



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是测绘和地理信息系统及相关专业误差理论与测量平差基础课程的教材。全书全面系统地阐述了测量误差的基本理论、测量平差的基础方法以及近代平差的原理,在此基础上,加强和拓宽了测量平差理论应用的深度和广度,系统地编制了大量的平差应用例题,通过这些例题多角度地对经典的测量平差方法进行了演绎。在本书的近代平差部分编入了序贯平差、秩亏自由网平差、附加系统参数的平差方法等。每一章的后面都附有相应的习题,书后附有参考答案。

本书内容翔实,系统性强,叙述详尽,并配有较多实例,既可作为工科院校测绘专业的教学用书,也可供工程技术人员学习和参考。

图书在版编目(CIP)数据

误差理论与测量平差/王穗辉编著. —2版. —上海:同济大学出版社,2015.1

ISBN 978-7-5608-5765-7

I. ①误… II. ①王… III. ①测量误差—高等学校—教材②测量平差—高等学校—教材 IV. ①P207

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 020935 号

误差理论与测量平差(第二版)

王穗辉 编著

责任编辑 高晓辉

责任校对 徐春莲

封面设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 大丰科星印刷有限责任公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 16.75

印 数 1—3100

字 数 418000

版 次 2015 年 1 月第 2 版 2015 年 1 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5765-7

定 价 36.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

前 言

同济大学出版社 2010 年出版的《误差理论与测量平差》一书,经过测绘类专业本科学生四年时间的使用,普遍反映此书平差知识覆盖面广,理论叙述深入浅出,算例的内容紧密结合实际应用,是一本既可作为平差教材,又适合有一定平差基础的相关人士自学的专业书籍。

本教材第一版在使用过程中,发现了一些编写时存在的问题,有些错漏之处也借此再版之机一并给予了修正。在此,感谢对本书第一版提出宝贵意见和建议的读者,因为有了你们的共同努力,使本书向完美又接近了一步。

由于编者水平有限,书中仍会存在一些缺点和疏漏之处,敬请读者批评指正。

王穗辉

2014 年冬于同济大学

第一版前言

测量平差课程是测绘工程本科专业的一门重要的专业基础课,它与其他后续的专业课打下了有关数据处理方面的基础,也是攻读相关专业研究生的一门必修课程。本书是编者根据测绘和地理信息系统专业的教学要求,在原试用讲义的基础上,根据多年的平差课程的教学经验编写而成。

全书共分9章,第1章对平差学科的研究内容进行了介绍;第2章介绍了测量误差理论、观测误差的特性和衡量精度的标准;第3章介绍了广义传播律;第4章介绍了平差的数学模型和最小二乘原理;第5章介绍了条件平差和附有参数的条件平差;第6章介绍了间接平差和附有限制条件的间接平差;第7章介绍了误差椭圆;第8章介绍了统计假设原理在平差中的应用;第9章对近代平差的一些原理和方法进行了介绍。本书每一章后面都有相应的习题,且在最后附有参考答案。

本书的编写力图做到以下几点:

(1) 系统性。由浅入深地对从基本原理到平差应用的一些实际问题作了较详细的介绍。

(2) 通俗性。测量平差的许多理论和算法,涉及学科较多,理解和掌握比较困难,编者试图用通俗的方法讲述这些理论的基本思想,以扩大读者的范围。

(3) 实用性。测量平差实用性很强,对于大多数读者,学习它是为了解决工作中的问题。因此,本书在叙述中都配有计算实例,便于读者把理论应用到实践中去。

本书在理论阐述上保留了经典,公式推导上尽量化繁为简,平差理论的应用面上也力求有所拓展,编者在书中系统性地编制了大量的平差理论应用例题,通过这些例题,多角度地对经典的测量平差方法进行了演绎。

本书适合工科院校测绘专业的师生学习使用。从发展看,测量平差的应用必将渗透到工程数据处理的各个领域。掌握这方面的知识,对于其他专业人员也大有裨益。

由于编者水平有限,书中难免会存在一些缺点和疏漏之处,敬请读者批评指正。

王穗辉

2009年秋于同济大学

目 录

前言

第一版前言

1 绪论	1
1.1 观测误差	1
1.2 测量平差学科的研究对象及任务	3
习题 1	3
2 偶然误差的统计特性及精度指标	5
2.1 正态分布	5
2.1.1 正态分布	5
2.1.2 n 维正态分布	7
2.2 偶然误差的统计特性	8
2.2.1 真值与估值	8
2.2.2 偶然误差的统计规律性	9
2.3 精度和衡量精度的指标	11
2.3.1 精度	12
2.3.2 准确度	12
2.3.3 精确度	13
2.3.4 衡量精度的标准	13
2.4 测量不确定度	17
习题 2	18
3 协方差传播律及权	20
3.1 随机变量的数字特征	20
3.1.1 数学期望及其传播	20
3.1.2 方差的特性	21
3.1.3 协方差和相关系数	22
3.2 方差-协方差阵及其传播	23
3.2.1 方差-协方差阵	23
3.2.2 互协方差阵	24
3.2.3 独立观测值线性函数的误差传播律	25

3.2.4	协方差传播律	25
3.2.5	非线性函数的线性化	30
3.2.6	协方差传播应用举例	34
3.3	权与定权的常用方法	35
3.3.1	权的定义及性质	35
3.3.2	单位权中误差	36
3.3.3	测量常用的定权方法	36
3.4	协因数阵及其传播	39
3.4.1	协因数与协因数阵	39
3.4.2	权阵	40
3.4.3	协因数传播律	41
3.5	单位权中误差的计算	44
3.5.1	由真误差计算中误差	44
3.5.2	由三角形闭合差计算测角中误差	46
3.5.3	由双观测值之差计算中误差	46
3.5.4	由改正数计算中误差	48
3.6	系统误差的传播与综合	48
3.6.1	系统误差与综合误差	48
3.6.2	已定系差的传播	49
3.6.3	系统误差与偶然误差的联合传播	50
习题3		50

4 平差数学模型与最小二乘原理

4.1	平差几何条件概述	53
4.2	平差的数学模型	54
4.2.1	函数模型	54
4.2.2	随机模型	57
4.2.3	高斯-马尔柯夫模型(简记为 G - M 模型)	58
4.3	参数估计与最小二乘原理	58
4.3.1	参数估计与测量平差	58
4.3.2	估计值的最优性质	59
4.3.3	最小二乘原理	61
4.3.4	最小二乘原则与极大似然原则	63
习题4		65

5 条件平差

5.1	条件平差原理	66
5.1.1	条件方程的列立	67
5.1.2	法方程及改正数方程	69

5.2	条件平差精度评定	71
5.2.1	单位权中误差计算	71
5.2.2	协因数阵计算	71
5.2.3	平差值函数的协因数阵	73
5.3	条件平差的计算步骤	74
5.4	三角网条件方程	77
5.4.1	网中条件方程数的确定(独立网)	78
5.4.2	测角网条件方程的列立	79
5.4.3	边角网条件方程列立	87
5.5	单导线条件平差计算	90
5.6	数字化数据的条件方程	95
5.6.1	直角与直线型条件方程	95
5.6.2	距离型条件方程	96
5.6.3	面积型条件方程	97
5.7	附有参数的条件平差	98
5.7.1	平差原理	98
5.7.2	精度评定	100
习题5		109

6	间接平差	115
6.1	间接平差原理	115
6.1.1	误差方程	115
6.1.2	法方程	116
6.2	间接平差法求平差值的计算步骤	117
6.3	间接平差精度评定	119
6.3.1	单位权中误差	119
6.3.2	协因数阵	120
6.3.3	参数函数的协因数阵及方差	121
6.3.4	间接平差的应用	122
6.4	测边网坐标平差	126
6.4.1	控制网参数个数的确定	126
6.4.2	测边误差方程	127
6.5	测角网坐标平差	131
6.5.1	按方向坐标平差	132
6.5.2	按角度坐标平差	138
6.5.3	相关权阵的构成	142
6.6	边角网坐标平差	145
6.6.1	边角网间接平差算例	145
6.6.2	导线网间接平差算例	147

6.7	间接平差的应用举例	150
6.7.1	GPS 网平差	150
6.7.2	坐标转换参数的求取	152
6.7.3	自由设站法站点坐标确定	154
6.8	附有限制条件的间接平差	155
6.8.1	平差原理	156
6.8.2	精度评定	160
6.9	平差参数的统计性质	162
6.9.1	参数估计量 $\hat{x}$ 具有无偏性	162
6.9.2	观测值改正数的数学期望为零	163
6.9.3	观测值的平差值 $\hat{L}$ 具有无偏性	163
6.9.4	参数估计量 $\hat{x}$ 具有最小方差	163
6.9.5	单位权方差估值 σ_0^2 是 σ_0^2 的无偏估计量	164
6.10	各种平差方法的共性与特性	165
	习题6	166
7	误差椭圆	170
7.1	概述	170
7.1.1	点位方差的定义	170
7.1.2	点位方差与坐标系统选择的无关性	171
7.1.3	点位方差表示点位精度的局限性	171
7.2	点位误差	172
7.2.1	点位中误差的计算	172
7.2.2	任意方向 φ 上的位差	175
7.2.3	位差的极大值 E 和极小值 F	176
7.2.4	以位差的极大值 E 和极小值 F 表示任意方向的位差大小	180
7.3	误差曲线与误差椭圆	182
7.3.1	误差曲线的概念	182
7.3.2	误差曲线的应用	182
7.3.3	误差椭圆的概念	183
7.3.4	误差椭圆代替误差曲线的原理	184
7.4	相对误差椭圆	189
7.5	点位落入误差椭圆内的概率	192
	习题7	194
8	统计假设原理在平差中的应用	196
8.1	概述	196
8.1.1	统计假设检验的主要内容	196
8.1.2	检验统计量的选择	197

8.1.3	接受域和拒绝域	197
8.1.4	假设检验的两类错误	198
8.1.5	假设检验步骤	199
8.2	四种基本的假设检验方法	199
8.2.1	u 检验法	199
8.2.2	χ^2 检验法	202
8.2.3	t 检验法	204
8.2.4	F 检验法	207
8.3	误差分布的假设检验	210
8.3.1	偶然误差特性的假设检验	210
8.3.2	误差分布的假设检验	215
8.4	后验方差的检验	218
8.5	平差参数的区间估计	220
8.5.1	单位权方差 σ_0^2 已知时参数真值 $\tilde{X}_i$ 的区间估计	220
8.5.2	单位权方差 σ_0^2 未知时参数真值 $\tilde{X}_i$ 的区间估计	221
习题 8		221
9	近代测量平差概论	223
9.1	序贯平差	223
9.1.1	平差参数及其协因数阵的递推计算式	223
9.1.2	平差值的计算	225
9.1.3	单位权方差计算	225
9.2	秩亏自由网平差	229
9.2.1	经典自由网和秩亏自由网	229
9.2.2	秩亏自由网(秩亏网)	229
9.2.3	秩亏自由网平差的几种类型	230
9.2.4	秩亏自由网平差之一——广义逆法	231
9.2.5	秩亏自由网平差之二——附加条件法	233
9.2.6	秩亏自由网平差的基准	239
9.3	附加系统参数的平差	240
9.3.1	附加系统参数法的平差原理	241
9.3.2	线性假设检验法	242
习题 9		245
参考答案		246
参考文献		256

1 绪 论

在工程建设和科学研究中,人们采用一定的仪器、工具、传感器或其他的手段对各种类型的物理量进行观测,从而获得大量的观测数据。观测数据可以是直接测量的结果,也可以是经过某些变换后的计算结果。由于观测数据中总是包含有信息和干扰(观测误差)两部分,为了对观测结果形成认识上的深化并反映事物内部的规律性,从而得出科学的结论,必须运用数学的方法按照一定的准则对获取的观测数据进行分析、处理,尽量排除或减弱干扰对观测值的影响,得到可用数学方式表述的某种规律。本章的目的就是说明观测误差的不可避免性以及测量平差学科的研究内容等。

1.1 观测误差

观测(测量)是指用一定的仪器、工具、传感器或其他手段获取与地球空间分布有关信息的过程和实际结果,而误差主要来源于观测过程之中。通过实践,人们认识到,任何一种观测都不可避免地要产生误差。当对某个物理量进行重复观测时,无论仪器多么精密,观测如何仔细,观测的方法如何合理,观测结果之间或观测结果与其理论值之间总会存在一些差异。例如,观测一个平面三角形的三个内角值,就会发现其观测值之和不等于 180° 。这种在同一个量的各观测值之间或在观测值与其理论值之间存在差异的现象,在测量工作中是普遍存在的,这说明观测值中含有观测误差。

观测误差产生的原因,可分为三个方面:仪器误差是由于仪器构造上的缺陷和精密度的限制,使观测值含有误差;观测者的因素是由于观测者的感观能力的限制,如估读小数和照准目标都会产生一定的误差;外界条件的影响,是指测量时的环境,如不断变化着的空气温度、湿度、风力、明亮度、地球曲率和大气折光等,都会对观测数据直接产生影响,也必然会给观测值带来误差。通常将上述产生观测误差的三个主要因素:仪器误差、观测者的因素及外界条件的影响统称为测量的观测条件。

显而易见,观测条件好一些,观测成果的质量就会高一些,观测值的误差也会小一些,但由于各种因素的影响,存在观测误差是一件不可避免的事情。测量工作的重心,就是采用各种方法尽可能地消除或减少误差对观测结果的影响,合理地分配观测误差以提高期望值的精度。因此形象地讲,数据处理的过程也就是减小误差影响的过程。

为了掌握误差出现的规律及其对观测结果准确性的影响,应按误差的性质进行分类,以便采取相应的方法加以处理。观测误差按性质可分为偶然误差、系统误差和粗差。

1. 偶然误差

在相同的观测条件下进行了一系列的观测,如果观测误差的数值大小和符号都表现出偶然性,即从单个误差来看,该误差列不存在确定的规律性,这种误差称为偶然误差。

偶然误差的产生,有仪器构造上的原因,如量度单位不能尽物体的大小;有观测者感观能力的限制,如仪器没有严格照准目标,水准尺的毫米刻画估读不准确等;测量时气候变化

引起观测数据产生的微小变化等,都属于偶然误差。一般而言,偶然误差是指观测中许多微小偶然误差项的总和,由于影响每项微小偶然误差的偶然因素不断变化,数值忽大忽小,其符号或正或负,所以,由它们的总和构成的偶然误差的大小和符号都是不能事先预知的,是随机的,也是不可避免的。偶然误差又称为随机误差,其分布规律符合或近似符合正态分布。

2. 系统误差

在相同观测条件下进行一系列观测,如果观测误差在数值大小、符号上保持不变,或在观测过程中按一定的规律变化,则称这种误差为系统误差。

系统误差按其表现形式主要分为四类:线性系差、恒定系差、周期系差、复杂性系差。例如,用一把含有尺长误差的钢尺丈量距离,距离越长,累积的误差就越大,这种误差属于系统误差中的线性系差,即误差是随测量时间或其他因素变化而逐渐增加或减少的;恒定系差指误差不随时间或其他因素而变化,为恒定常数;周期系差是指误差随测量时间或其他因素变化而呈周期性变化,如沉降监测中,在两固定点间每天重复进行水准测量,就会发现由于温度等外界因素变化而产生以年为周期的周期性误差;复杂性系差是指误差随测量时间或其他因素变化而呈十分复杂的规律,可能是前三种系差的叠加或服从某种较为复杂的分布。

系统误差在相同观测条件下不能通过多次重复测量而减少,它也不像偶然误差那样服从正态分布。其对于观测结果的影响一般具有累积作用,对成果质量的影响也特别显著。在实际工作中,应该采用各种方法来消除或减弱系统误差的影响,达到实际上可以忽略不计的程度,即将残余的系统误差控制在小于或至多等于偶然误差的量级内。

消除系统误差的根本原则是,使测量和数据处理的过程满足确定的物理模型或理想的假设条件。消除方法包括以下三个方面:

(1) 合理选择观测条件。如根据经验可知,三角测量中的系统误差来源于观测条件的不同,主要是天气(指太阳照射方向、日间或夜间、风向、风力、气温、气压等),若观测条件改变,如由日间观测改为夜间观测,则观测值服从另一母体,有另一均值,因而有系统误差,同一观测角值的分群现象也可由此得到解释。所以,利用不同的观测条件进行观测,系统误差就近似于偶然误差,取其平均,就可减少系统误差的影响。

(2) 实验估计法。对在测量中无法消除但却可以估计出大小和符号的系统误差,可在测量结果中给予改正,如距离丈量中的尺长改正。

(3) 理论计算估计法。在已知系统误差来源但既无法消除又无法测定时,可用误差分析的方法对系统误差进行估计。

3. 粗差

在测量工作中,除了以上两类误差外,还可能存在粗差。粗差一般指超限误差,即指比最大偶然误差还要大的误差,它的存在将极大地危害测量最终成果。随着现代测绘技术的发展,特别是空间技术在对地观测中发挥着愈来愈大的作用,可以在短时间内通过自动化采集等方法获得大量的观测值,这样难以避免会有粗差混入信息之中。粗差问题在现今的高新测量技术(GPS, GIS, RS)中尤为突出。识别粗差不是用简单方法就可以达到目的的,需要通过数据处理方法进行识别和消除其影响。

1.2 测量平差学科的研究对象及任务

测量平差是测绘学中一个有悠久历史的专有名词。测量平差发展到现在,从其理论构成和计算技术来看,它是集概率统计学、近代代数学、计算机软件、误差理论、测量数据处理技术为一体的一门不断发展和完善的学科,对其他学科,如计量学、物理学、电工学、化学及各类工程学科等,只要是处理带有误差的观测数据,有多余观测值的问题,均可应用,所以,测量平差学科的适用范围十分广泛。

本书的主要内容是关于经典平差。经典平差方法包括间接平差、条件平差、附有限制条件的间接平差及附有参数的条件平差。经典平差是指测量平差学科研究的基础内容,也是应用范围最广和理论研究中最重要的基础部分。经典平差处理的观测值限于仅含有偶然误差。

当观测值中除了含有偶然误差,还包含有系统误差或粗差或两者兼而有之时,这种数据处理的方法就属于近代平差研究的范围。

无论是经典平差还是近代平差,其进行平差计算的前提条件是要有多余观测值,即有效观测值的个数多于必要观测值的个数。

经典平差研究的是含有偶然误差的观测值,所以,本课程还必须研究偶然误差概率统计理论,包括偶然误差的分布、评定精度的指标、误差的传播规律、误差检验和误差分析等。

经典平差遵循的准则是最小二乘估计的准则。尽管经典平差各种方法的数学模型不同,但它们所依据的平差准则是相同的,其差别仅在于:在不同的数学模型下,它们的具体求解方法有所不同。由于采用了相同的平差准则,所以,对于同一个平差问题,若采用经典平差中的不同方法进行平差,其得到的平差结果是相同的,至于应该采取哪种平差方法,应视具体情况而定。

测量平差学科的任务主要有:依据某种最优化准则消除观测值之间的矛盾;求定未知量的最优估值(也称平差值、最或然值、最佳估值或最可靠值等);对测量成果及未知量的精度进行评定。从误差处理的角度,平差的任务还包括:建立误差分析体系,研究误差来源、误差类型、度量误差的指标、研究误差的空间传播机制,削弱误差对测绘产品的质量影响,用统计分析理论进行产品的质量控制在等。

习 题 1

- 1-1 在测量工作中,产生误差的原因有哪几种? 试举例说明。
- 1-2 什么是观测条件? 观测条件与观测误差有什么关系?
- 1-3 粗差对观测成果有何影响? 怎样才能避免粗差的发生?
- 1-4 系统误差对观测成果会带来什么影响? 怎样削弱或消除它?
- 1-5 为什么在观测成果中一定存在偶然误差? 能否将其消除? 为什么?
- 1-6 什么是多余观测? 为什么要有多余观测?
- 1-7 测量平差的任务是什么?
- 1-8 在测角中用正倒镜观测,水准测量中,使前后视距相等。这些规定都是为了消除什么误差?

1-9 用钢尺丈量距离,有以下几种情况,使量得的结果产生误差,试分别判定误差的性质及符号(只讨论含偶然误差还是系统误差,粗差不予考虑)。

- (1) 尺长不准确;
- (2) 尺不水平;
- (3) 估计小数不准确;
- (4) 尺垂曲;
- (5) 尺端偏离直线方向。

1-10 在水准测量中,有以下几种情况使水准尺读数带有误差,试判别误差的性质及其符号。

- (1) 视准轴与水准轴不平行;
- (2) 仪器下沉;
- (3) 读数不准确;
- (4) 水准尺下沉。

2 偶然误差的统计特性及精度指标

测量平差的基本任务是处理一系列带有偶然误差的观测值,求出未知量的最佳估值,并评定测量成果的精度,解决这两个问题的基础,是研究观测误差的理论,简称误差理论。

由于观测中产生偶然误差的误差源有很多,各误差源所产生的偶然误差都是随机变量且相互独立、在整个偶然误差中各自所占比例也都是很小的,故根据相互独立的随机变量之和渐近服从正态分布的中心极限定理,合成的偶然误差服从于正态分布,所以,正态分布特性也是误差理论的基础理论之一。

偶然误差是一种随机变量,但从大量观测值的偶然误差来看,可以发现隐藏在偶然性中的必然性。这种规律性可根据概率原理,用统计学的方法进行研究。

为了使用方便,人们希望用一个量化的数字特征来衡量观测值的精度,这个数字特征就称为精度指标。本章将对几种主要的精度指标进行介绍。

2.1 正态分布

2.1.1 正态分布

正态分布(高斯分布)是一种经常使用的、重要的连续型分布。偶然误差的概率分布曲线很接近正态分布曲线,且随着观测值个数 n 的无限增大,正态分布就是偶然误差分布的极限分布,所以,偶然误差 Δ 是一种服从正态分布的随机变量。

定义:若连续型随机变量 X 的概率密度函数为(为书写方便,常将 e^x 写成 $\exp x$)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (2-1-1)$$

则定义 X 服从正态分布,参数 μ 为分布的数学期望, σ^2 为方差, $\sigma > 0$ 。简记为 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 。在 $(-\infty, +\infty)$ 的范围内, $f(x)$ 的积分为 1。 X 相应的分布函数为

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dx \quad (2-1-2)$$

任意连续型分布的数学期望和方差的定义式为

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx \quad (2-1-3)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 f(x) dx \quad (2-1-4)$$

其中, $f(x)$ 为连续型分布的密度函数。若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 则 $E(X) = \mu$, $D(X) = \sigma^2$ 。

有时为使用需要,可将随机变量 X 标准化: $\frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0, 1)$ 。 $N(0, 1)$ 中, $E(X) = 0$,

$D(X) = 1$, 称为标准正态分布。标准正态分布的密度函数为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{2}\right\} \quad (2-1-5)$$

以上为正态分布的一些重要的概率特性。此外,正态分布还具有以下特性:

(1) 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立,且具有有限的数学期望和方差: $E(X_i) = \mu_i$, $D(X_i) = \sigma_i^2 \neq 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$), 设 $B^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$, 测量学中, 设 $[X] = X_1 + X_2 + \dots + X_n = \sum_{i=1}^n X_i$, 即常用 $[X]$ 来表示 X 各分量之和。则随机变量

$$Y = \frac{[X] - [\mu]}{B} \quad (2-1-6)$$

在 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y \sim N(0, 1)$ 。即当某些随机变量不知其分布时, 只要它们在总和 $\sum_{i=1}^n X_i$ 中的影响都均匀地小, 且观测量较大时, 其随机变量之和均可当作正态分布处理, 这就给处理分布未知的变量带来很大的方便。测量中的偶然误差 Δ 是由多个相互独立的误差源产生的微小误差之和, 所以认为测量误差 Δ 是服从于正态分布的随机变量。

(2) 有许多种分布, 如二项分布、 t 分布、 χ^2 分布等, 在其自由度 $n \rightarrow \infty$ 时, 它们都趋近于正态分布。所以说, 正态分布是多种分布的极限分布, 当要研究的某变量不知其分布且 n 较大时, 可用正态分布代替。

(3) 正态分布具有可加性(重现性)。设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为相互独立的正态变量, 且 $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, 则变量

$$Y = k_1 X_1 + k_2 X_2 + \dots + k_n X_n \quad (2-1-7)$$

有 $Y \sim N(E(Y), D(Y))$, 其中, $k_1, k_2, \dots, k_n$ 为常数, 且

$$E(Y) = k_1 \mu_1 + k_2 \mu_2 + \dots + k_n \mu_n, \quad D(Y) = k_1^2 \sigma_1^2 + k_2^2 \sigma_2^2 + \dots + k_n^2 \sigma_n^2 \quad (2-1-8)$$

即正态变量的线性函数 Y 仍服从正态分布。

(4) 正态随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 出现在给定区间 (x_1, x_2) 内的概率为

$$P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx \quad (2-1-9)$$

令 $t = \frac{x-\mu}{\sigma}$, 可将 $F(x)$ 变成标准正态分布函数, 即

$$P(x_1 < X \leq x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) \quad (2-1-10)$$

其中, $t_1 = \frac{x_1 - \mu}{\sigma}$, $t_2 = \frac{x_2 - \mu}{\sigma}$, 而 $\Phi(t_1) = \Phi\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma}\right)$, $\Phi(t_2) = \Phi\left(\frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right)$, 由正态分布表查取。

特殊情况下,当 $x_1 = -k\sigma$, $x_2 = k\sigma$ 时,即 X 在区间 $(-k\sigma, k\sigma)$ 内的概率为

$$P(-k\sigma < X \leq k\sigma) = \Phi\left(\frac{k\sigma - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-k\sigma - \mu}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{k\sigma - \mu}{\sigma}\right) - 1 \quad (2-1-11)$$

2.1.2 n 维正态分布

在测量工作中,通常用纵、横坐标来确定平面点的位置,而纵、横坐标误差就是二维正态随机变量,它们服从的分布为二维正态分布。二维正态随机变量 (X, Y) 的联合分布概率密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)} \cdot \left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right]\right\} \quad (2-1-12)$$

式中,参数 μ_x , μ_y , σ_x^2 , σ_y^2 和 ρ 分别是随机变量 X 和 Y 的数学期望、方差和相关系数。

当对随机变量 X, Y 进行分别研究时,可求得边缘分布密度函数为

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \exp\left\{-\frac{(x-\mu_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\} \quad (2-1-13)$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y} \exp\left\{-\frac{(y-\mu_y)^2}{2\sigma_y^2}\right\} \quad (2-1-14)$$

当相关系数 $\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x\sigma_y} = 0$, 即 X 和 Y 互不相关时,将 $\rho = 0$ 代入式(2-1-12),有

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \quad (2-1-15)$$

式(2-1-15)说明,正态随机变量 X, Y 相互独立,可见,对于正态随机变量而言,互不相关和互相独立是等价的。

设有 n 维随机向量 $\mathbf{X} = [X_1 \ X_2 \ \cdots \ X_n]^T$, 其中, $X_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是随机变量,如果 $\mathbf{X}$ 服从正态分布,则其密度函数为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |D_{XX}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_X)^T D_{XX}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}_X)\right\} \quad (2-1-16)$$

式中,随机向量 $\mathbf{X}$ 的数学期望 $\boldsymbol{\mu}_X$ 和方差 D_{XX} 为

$$\boldsymbol{\mu}_X = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{bmatrix}, \quad D_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1 X_2} & \cdots & \sigma_{X_1 X_n} \\ \sigma_{X_2 X_1} & \sigma_{X_2}^2 & \cdots & \sigma_{X_2 X_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{X_n X_1} & \sigma_{X_n X_2} & \cdots & \sigma_{X_n}^2 \end{bmatrix} \quad (2-1-17)$$

数学期望向量 $\boldsymbol{\mu}_X$ 和方差阵 D_{XX} 是 n 维正态随机向量的数字特征。 $\boldsymbol{\mu}_X$ 中各元素 μ_i 为随