

54

代数学(下)

(修订版)

■ 莫宗坚 蓝以中 赵春来



54

代数学(下)

(修订版)

D A I S H U X U E

■ 莫宗坚 蓝以中 赵春来

内容提要

本书为《代数学》下册,主要讲述交换代数的基本知识,内容包括环论、赋值论、Dedekind 整环及同调代数。这些都是交换代数的精华内容,是学习代数几何、代数数论等现代数学必备的基础。

本书内容丰富,直观性强,推理自然,解释详尽。本书的独到之处是特别注重对于交换代数的背景以及与其他学科的联系的介绍。书中精选了大量的例题与习题。

本书可作为高等学校数学专业研究生教材,也可供数学工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

代数学:新1版·下/莫宗坚,蓝以中,赵春来编
著.--北京:高等教育出版社,2015.1

ISBN 978-7-04-041420-2

I. ①代… II. ①莫… ②蓝… ③赵… III. ①代数-
高等学校-教材 IV. ①O15

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第261616号

策划编辑 王丽萍
责任校对 杨凤玲

责任编辑 王丽萍
责任印制 毛斯璐

封面设计 张楠

版式设计 王艳红

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印刷 国防工业出版社印刷厂
开本 787mm×1092mm 1/16
印张 17.75
字数 330千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版次 2015年1月第1版
印次 2015年1月第1次印刷
定价 49.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 41420-00

再版序言

此书的初版序言写于 1984 年,回首 30 年. 那年暑假,由陈省身先生召集我们五人——项武义、伍鸿熙、肖荫堂、Morgan 和我举办首届暑期数学讲学. 事后,丁石孙校长约我,把讲稿写成书. 我遵嘱写完. 后来本书由北京大学出版社出版. 丁校长知会我,润笔资 1 万元. 我辞谢不受. 于是北京大学出版社将此 1 万元挂了帐. 几个月后,武义成立“苏步青数学教育奖”,奖助中学数学老师,向我募捐. 我心窃善之,当即写纸条:请项武义先生凭此条向北京大学出版社,取用 1 万元. 多年后,该书已经绝版,盗版充斥. 后来,高等教育出版社的王丽萍女士约我出本书的再版. 我同意了.

我衷心希望此书再版以后,能再用 30 年以上,后事如何,只能付之天意了. 因此,我尽心修改.

此书再版有三大可看之处: (1) 述古. 我适当加入了一些前人的结果——例如 Euler 的空间旋转轴定理, Sylvester 惯性定理, 等等. (2) 编新. 近 10 年来, google 及百度的“搜索引擎”大行于世. 其实,它们都是 Perron-Frobenius 定理的应用. 本版修定,列入附录. (3) 全书细改,及加入更多的习题.

过去 30 年,中国年轻的数学家们,才俊辈出,光彩夺目. 希望未来的 30 年,中国的数学界能修成正果. 是所祈也.

莫宗坚
2014 年 5 月

初版序言 —— 献给中国的青年人

这本书是根据我在美国的明尼苏达大学及普度大学的讲义编写而成的。当时讲授的对象是一、二年级的研究生。为了便于课堂讲授及读者自习，我在编写过程中，力求本书能够易于了解、联系各方。我的目标是：

一、抽象与具体结合，理论与应用结合。目前的代数学书，常常单线地朝抽象方向发展，使读者——甚至一些数学家们——觉得代数学是抽象概念的游戏。即使代数学能联系实际、解决问题，那也如一些半真半假的电影片的片头语，“如与实际相符，也纯属偶然”。此书是要力矫此弊，希望能通过例题、解说等，阐明代数学与代数几何、代数数论、物理、密码学等的联系。

各科数学都是人类探索知识、解决问题的钥匙。一般的钥匙只有小部分起开锁的作用，其余部分是防止它开别的锁，这是一般的钥匙的“有害部分”。如果把这些“有害部分”完全取消，就成了百灵钥匙了。我想说明，代数学正是这样的百灵钥匙。

二、理论的整合与统一。各种数学理论的平行发展，到了代数学中，取得了整合与统一。例如，在第四章中，我们统一了“有限生成的交换群的基本定理”及“矩阵的 Jordan 标准式”；在第五章中，我们整合了“几何作图”及“解方程式”；在第八章中，我们用“Dedekind 整环”统一了“代数数论”及“仿射曲线论”的讨论，等等。

在这些理论的整合与统一中，我们希望能体现数学的内在规律美。但愿读者们能欣赏数学的“宗庙之美、百官之富”。

对于以上的目标，我自觉做得不够。向前看中国的未来，物质的建设可以速成，精神的建设需要长期的积累，所谓“十年树木，百年树人”。数学——人类

精神活动的最高产物——将促进青年人对真与美的追求,发展对文化的内省力,因此丰裕了精神文化的生活。

本书在完成过程中,得到蓝以中及赵春来两位的协助。他们改正了原稿的许多遗落、误失,与我共同商订了一些名词,并补充了习题,以及写了本书上册的附录一(蓝以中)。我们联名出书,正足以纪念我们的共同工作。

莫宗坚

序于 1984 年 8 月

符号说明

A^n	n 维仿射空间
P^n	n 维射影空间
B_i	i 阶边缘
B^i	i 阶上边缘
$C(S)$	环 S 的因子类群
(C, d)	边缘算子为 d 的复合形 C
$\dim R$	环 R 的维数
D.V.R.	(一秩) 离散赋值环
$\mathcal{D}_{T/R}$	T 对 R 的差积
$e(w/v)$ (简记 e)	赋值 w 对 v 的缩分歧指数
$\text{emb-dim } S$	Noether 局部环 S 的嵌入维数
$f(w/v)$ (简记 f)	赋值 w 对 v 的相对次数 (剩余次数)
g	亏格
$\text{gl dim } R$	环 R 的整体维数
$G_I(R)$	环 R 的与理想 I 相伴的分次环
$G_I(M)$	模 M 的与理想 I 相伴的分次模
G_Z	分解群
G_T	惯性群
$\text{ht}(I)$	理想 I 的高度
$H_i(C)$	复合形 C 的 i 阶同调模
$H^i(C)$	复合形 C 的 i 阶上同调模

$\text{inj. dim } M$	模 M 的内射维数
$\sqrt{I}$	理想 I 的根理想
$\mathcal{I}(B)$	A^n 的子集 B 的理想, 或 $\text{Spec } S$ 的闭集 B 中所有素理想的交
$K[[x_1, x_2, \dots]]$	域 K 上的形式幂级数环
$K((x_1, x_2, \dots))$	$K[[x_1, x_2, \dots]]$ 的比域
$K\{\{x_1, x_2, \dots\}\}$	赋值域 K 上的收敛幂级数环
$\text{length}(M)$	模 M 的长度
$\mathfrak{m}_v$	赋值 v 的极大理想
$\text{mspec } S$	环 S 的极大谱集
$M \otimes_R N$	R 模 M 和 N 的张量积
$\text{nil rad}(S)$	环 S 的幂零根理想
$\text{proj. dim } M$	模 M 的投射维数
$P(M, t)$	模 M 的 Poincaré 级数
$\text{rad}(S)$	环 S 的 Jacobson 根理想
$\text{rank } v$	赋值 v 的秩
$\text{res-dim}_k v$	k 赋值 v 对 k 的剩余维数
R_v	赋值 v 的赋值环
$R[[x_1, x_2, \dots]]$	环 R 上的形式幂级数环
$\text{Spec } S$	环 S 的素谱集
S_D	环 S 对分母系 D 的局部化环
$S_{\mathfrak{p}}$	环 S 对素理想 $\mathfrak{p}$ 的局部化环
v	赋值
v_p	p -adic 赋值
Z_i	i 阶闭链
Z^i	i 阶上闭链
$\delta_{T/R}$	T 对 R 的判别式

现代数学基础图书清单

(书号前缀为 978-7-04-0xxxxx-x)

序号	书号	书名	作者
1	21717-9	代数和编码 (第三版)	万哲先 编著
2	22174-9	应用偏微分方程讲义	姜礼尚、孔德兴、陈志浩
3	23597-5	实分析 (第二版)	程民德、邓东皋、龙瑞麟 编著
4	22617-1	高等概率论及其应用	胡迪鹤 著
5	24307-9	线性代数与矩阵论 (第二版)	许以超 编著
6	24465-6	矩阵论	詹兴致
7	24461-8	可靠性统计	茆诗松、汤银才、王玲玲 编著
8	24750-3	泛函分析第二教程 (第二版)	夏道行 等编著
9	25317-7	无限维空间上的测度和积分 ——抽象调和分析 (第二版)	夏道行 著
10	25772-4	奇异摄动问题中的渐近理论	倪明康、林武忠
11	27261-1	整体微分几何初步 (第三版)	沈一兵 编著
12	26360-2	数论 I —— Fermat 的梦想和类域论	[日]加藤和也、黑川信重、斎藤毅 著
13	26361-9	数论 II —— 岩泽理论和自守形式	[日]黑川信重、栗原将人、斎藤毅 著
14	38040-8	微分方程与数学物理问题 (中文校订版)	[瑞典]纳伊尔·伊布拉基莫夫 著
15	27486-8	有限群表示论 (第二版)	曹锡华、时俭益
16	27431-8	实变函数论与泛函分析 (上册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
17	27248-2	实变函数论与泛函分析 (下册, 第二版修订本)	夏道行 等编著
18	28707-3	现代极限理论及其在随机结构中的应用	苏淳、冯群强、刘杰 著
19	30448-0	偏微分方程	孔德兴
20	31069-6	几何与拓扑的概念导引	古志鸣 编著
21	31611-7	控制论中的矩阵计算	徐树方 著
22	31698-8	多项式代数	王东明 等编著
23	31966-8	矩阵计算六讲	徐树方、钱江 著
24	31958-3	变分学讲义	张恭庆 编著
25	32281-1	现代极小曲面讲义	[巴西]F. Xavier、潮小李 编著
26	32711-3	群表示论	丘维声 编著
27	34675-6	可靠性数学引论 (修订版)	曹晋华、程侃 著
28	34311-3	复变函数专题选讲	余家荣、路见可 主编
29	35738-7	次正常算子解析理论	夏道行
30	34834-7	数论 —— 从同余的观点出发	蔡天新
31	36268-8	多复变函数论	萧荫堂、陈志华、钟家庆
32	36168-1	工程数学的新方法	蒋耀林

续表

序号	书号	书名	作者
33	34525-4	现代苏斯勒几何初步	沈一兵、沈忠民
34	36472-9	数论基础	潘承洞 著
35	36950-2	Toeplitz 系统预处理方法	金小庆 著
36	37037-9	索伯列夫空间	王明新
37	37252-6	伽罗瓦理论 —— 天才的激情	章璞 著
38	37266-3	李代数 (第二版)	万哲先 编著
39	38651-6	实分析中的反例	汪林
40	38890-9	泛函分析中的反例	汪林
41	37378-3	拓扑线性空间与算子谱理论	刘培德
42	31845-6	旋量代数与李群、李代数	戴建生 著
43	33260-5	格论导引	方捷
44	39503-7	李群讲义	项武义、侯自新、孟道骥
45	39502-0	古典几何学	项武义、王申怀、潘养廉
46	40458-6	黎曼几何初步	伍鸿熙、沈纯理、虞言林
47	41057-0	高等线性代数学	黎景辉、白正简、周国晖
48	41305-2	实分析与泛函分析 (续论) (上册)	匡继昌
49	41285-7	实分析与泛函分析 (续论) (下册)	匡继昌
50	41223-9	微分动力系统	文兰
51	41350-2	阶的估计基础	潘承洞、于秀源
52	41513-1	非线性泛函分析 (第三版)	郭大钧
53	41408-0	代数学 (上) (第二版)	莫宗坚、蓝以中、赵春来
54	41420-2	代数学 (下) (修订版)	莫宗坚、蓝以中、赵春来

网上购书: academic.hep.com.cn, www.china-pub.com, 卓越, 当当, www.landraco.com

其他订购办法:

各使用单位可向高等教育出版社读者服务部
汇款订购。书款通过邮局汇款或银行转账
均可。购书免邮费, 发票随后寄出。

单位地址: 北京西城区德外大街 4 号

电 话: 010-58581118/716/5/4

传 真: 010-58581113

通过邮局汇款:

地 址: 北京西城区德外大街 4 号

户 名: 高等教育出版社销售部综合业务部

通过银行转账:

户 名: 高等教育出版社有限公司

开 户 行: 交通银行北京马甸支行

银行账号: 110060437018010037603

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任；构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人进行严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话 (010) 58581897 58582371 58581879

反盗版举报传真 (010) 82086060

反盗版举报邮箱 dd@hep.com.cn

通信地址 北京市西城区德外大街4号 高等教育出版社法务部

邮政编码 100120

下册目录

第六章 环论	1
§1 环的局部化	1
§2 整数扩充	7
§3 零点定理	14
§4 环的谱集	20
§5 理想的分解	29
§6 维数论 (1)	36
§7 分次环及分次模	45
§8 拓扑环	56
§9 维数论 (2)	72
第七章 赋值论	83
§1 定义	83
§2 赋值的存在及扩充	95
§3 实赋值	102
§4 Hensel 引理	109
§5 代数扩充	116
§6 因子类群	130

第八章 Dedekind 整环	143
§1 定义	143
§2 整数扩充	156
§3 判别式及差积	163
§4 分歧论	184
第九章 同调代数	194
§1 复合形	194
§2 同调序列	202
§3 模的化解	211
§4 Ext	222
§5 张量积与 Tor	234
§6 同调维数	245
附录一 代数曲线论简介	252
附录二 快速的有限 Fourier 系列算法	260
汉英名词索引	264

第六章 环论

§1 环的局部化

本书所说的环都是有么元的交换环. 读者请参考第三章 §2 关于“比域”的讨论, 特别是定义 3.7 中提出了“局部化环”的概念. 在那里, 我们假定了 S 是一整环, 在本节中, 我们将讨论一般环的情形.

定义 6.1 设 S 为一环. S 的一个非空子集 D 如果满足下列条件:

1) $0 \notin D$;

2) $d_1, d_2 \in D \implies d_1 \cdot d_2 \in D$,

则称为一分母系.

讨论 类似于定义 3.7, 我们想要定义 s/d , 这里 $s \in S, d \in D$. 自然地, 就像从整数环 $\mathbf{Z}$ 引出有理数域 $\mathbf{Q}$ 的情形一样, 我们要求

$$\frac{s_1}{d_1} + \frac{s_2}{d_2} = \frac{s_1 d_2 + s_2 d_1}{d_1 d_2}, \quad \frac{s_1}{d_1} \cdot \frac{s_2}{d_2} = \frac{s_1 s_2}{d_1 d_2}.$$

麻烦的问题是 $d \in D$ 可能是一个零因子, 即有 $s \in S, s \neq 0$, 但 $sd = 0$. 则我们不免得出下面的自相矛盾的算式:

$$s = s \cdot 1 = s \cdot \left(d \cdot \frac{1}{d}\right) = (s \cdot d) \frac{1}{d} = 0 \cdot \frac{1}{d} = 0.$$

解决之道是通过商环的步骤消除这个难点. 请见下定理.

定理 6.1 令 D 为环 S 的一个分母系. 又令

$$I = \{s : s \in S, \text{ 存在一个 } d \in D, \text{ 使 } sd = 0\}.$$

则有

- 1) I 是 S 的一个理想;
- 2) 令 $\sigma: S \rightarrow S/I$ 为典型映射, 则 $\sigma(D)$ 是 S/I 的一个分母系, 而且, 如果 $\sigma(s)\sigma(d) = 0$, 必有 $\sigma(s) = 0$, 此处 $d \in D$.

证明 1) 如果 $s_1, s_2 \in I$, 则有 $d_1, d_2 \in D$, 使

$$s_1 d_1 = 0, \quad s_2 d_2 = 0.$$

显然立得

$$(s_1 \pm s_2) d_1 d_2 = 0,$$

$$(s s_1) d_1 = s(s_1 d_1) = s \cdot 0 = 0, \quad \forall s \in S.$$

于是 I 是理想.

2) 显然, $\sigma(d_1)\sigma(d_2) = \sigma(d_1 d_2) \in \sigma(D)$. 又如果 $0 = \sigma(d) \in \sigma(D)$, 立得 $d \in I$, 即存在 $d_1 \in D$, 使 $0 = dd_1 \in D$. 这与 D 的性质不合, 所以 $0 \notin \sigma(D)$. 因此 $\sigma(D)$ 是一个分母系.

现设 $\sigma(s)\sigma(d) = 0$, 则 $\sigma(sd) = 0$, 即 $sd \in I$. 故必存在 $d_1 \in D$, 使 $s(dd_1) = (sd)d_1 = 0$. 立得 $s \in I$, 即 $\sigma(s) = 0$. $\square$

讨论 从上面的定理, 我们知道: 给定一个分母系 D 以后, 我们从环 S 转移到环 S/I 来考虑, 则 $\sigma(D)$ 中没有零因子. 因此, 零因子所产生的难点也即消失.

定义 6.2 设 S 是环, D 是分母系. 令 I, σ 如定理 6.1 所设. 又令 $S' = S/I, D' = \sigma(D)$. 则我们定义 S 对 D 的局部化环 S_D 为下面的集合

$$S_D = S'_{D'} = \left\{ \frac{s'}{d'} : s' \in S', d' \in D' \right\},$$

及其运算规则

$$\frac{s'_1}{d'_1} + \frac{s'_2}{d'_2} = \frac{s'_1 d'_2 + s'_2 d'_1}{d'_1 d'_2},$$

$$\frac{s'_1}{d'_1} \cdot \frac{s'_2}{d'_2} = \frac{s'_1 s'_2}{d'_1 d'_2}, \quad \frac{s'_1 d'_2}{d'_1 d'_2} = \frac{s'_1}{d'_1}.$$

又如果 $s' = \sigma(s), d' = \sigma(d)$, 则定义

$$\frac{s}{d} = \frac{s'}{d'}.$$

讨论 1) 如果 S 为整环, 则定义 6.2 与定义 3.7 相同.

2) 对于分母系的规定, 我们也可以取消 $0 \in D$ 的限制. 自然, 如果 $0 \in D$ 时, $S_D = 0$.

例 1 令 $S = \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, $D = \{(n, 0) : n \neq 0\}$. 则显然 D 是一个分母系. 此时, 不难看出

$$I = \{(0, m) : m \in \mathbf{Z}\},$$

$$S/I \approx \mathbf{Z}, \quad \sigma(D) = \{n : n \neq 0\}.$$

于是, 我们得出 $S_D \approx \mathbf{Q}$. □

我们任取 $s \in S$. 一般可以考虑

$$s \mapsto \sigma(s) \mapsto \frac{\sigma(s)\sigma(d)}{\sigma(d)}.$$

这样把 S 的元素 s , 认同为 S_D 的元素 $\frac{\sigma(s)\sigma(d)}{\sigma(d)}$. 例如, 在例 1 中, 把元素 (nm, m) 认同为 $n/1 = n$. 显然, 这个认同映射不是单射.

在下面的讨论中, 我们将证明, 环的局部化法与取商环法是可以交换的.

定理 6.2 设 S 是环, D 是分母系, J 是 S 的理想, $D \cap J = \emptyset$. 令 $\tau: S \rightarrow S_D$ 是认同映射. 再令 $J' = \tau(J) \cdot S_D$, 即 J' 是 J 的元素在认同映射下的像所生成的理想. 又令 $\pi: S \rightarrow S/J$ 是典型映射. 则恒有

$$\pi(S)_{\pi(D)} \approx S_D/J'.$$

证明 我们先要说明上面的式子是有意义的. 换句话说, $\pi(D)$ 是 $\pi(S)$ 的分母系. 事实上, 因为 $D \cap J = \emptyset$, 自然 $0 \notin \pi(D)$. 又有 $\pi(d_1)\pi(d_2) = \pi(d_1d_2) \in \pi(D)$ ($\forall d_1, d_2 \in D$), 所以 $\pi(D)$ 是一个分母系.

我们定义一个映射 α 如下:

$$\alpha: \pi(S)_{\pi(D)} \rightarrow S_D/J',$$

$$\alpha\left(\frac{\pi(s)}{\pi(d)}\right) = \frac{s}{d} + J'.$$

请读者自行证明, 这确实是个单满映射, 故为同构. □

我们常见的局部化环, 是取 $D = S \setminus \mathfrak{p}$, 此处 $\mathfrak{p}$ 是 S 的一个素理想. 请注意, 按照素理想的定义, 我们有

$$ab \in \mathfrak{p} \implies a \in \mathfrak{p} \text{ 或 } b \in \mathfrak{p},$$

也即

$$a \in \mathfrak{p}, b \in \mathfrak{p} \implies ab \in \mathfrak{p},$$

$$a \in D, b \in D \implies ab \in D,$$

因此, $D = S \setminus \mathfrak{p}$ 确是一个分母系.

符号 设 $D = S \setminus \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$ 是素理想, 则我们用 $S_{\mathfrak{p}}$ 表示 S_D . 又设 $J \subset S, \tau: S \rightarrow S_{\mathfrak{p}}$ 是认同映射, 则我们用 $JS_{\mathfrak{p}}$ 表示 $\tau(J)S_{\mathfrak{p}}$, 即由 $\tau(J)$ 生成的理想.

例 2 令 $S = \mathbb{C}[x, y], \mathfrak{p} = (x - a, y - b)$, 则有

$$S_{\mathfrak{p}} = \left\{ \frac{f(x, y)}{g(x, y)} : f, g \in S, g(a, b) \neq 0 \right\}.$$

不难看出, $S_{\mathfrak{p}}$ 即是在点 (a, b) 有定义的有理函数的集合.

又令 $R = \{(f(x), g(y)) : f, g \in S, f(0) = g(0)\}$, 即定义在 x 轴及 y 轴上的多项式组 (任何一组中的两个多项式在原点取值相等) 的集合. 令 $\mathfrak{q} = \{(xf(x), yg(y))\}$, 则有

$$R_{\mathfrak{q}} = \left\{ \left(\frac{f(x)}{r(x)}, \frac{g(y)}{s(y)} \right) : r(0) \neq 0, s(0) \neq 0, \frac{f(0)}{r(0)} = \frac{g(0)}{s(0)} \right\}.$$

不难看出, $R_{\mathfrak{q}}$ 即是在原点有定义的 x 轴及 y 轴上的有理函数组 (每组中的两个有理函数在原点取值相等) 的集合. $\square$

定义 6.3 设环 S 中只有唯一的极大理想 $\mathfrak{m}$, 则称 S 为局部环.

讨论 定理 3.23 中已经证明, 在任意环 S 中必有一极大理想. 在局部环的定义中, 我们强调只有唯一的极大理想.

定理 6.3 1) 环 S 是局部环 $\iff J = \{s \in S : s \text{ 非可逆元} \}$ 是一个理想. 于是 J 是 S 的唯一的极大理想;

2) 设 $\mathfrak{p}$ 是环 S 的素理想, 则 $\mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}}$ 是 $S_{\mathfrak{p}}$ 的唯一的极大理想. 于是 $S_{\mathfrak{p}}$ 是局部环.

证明 1) $\implies$. 令 $\mathfrak{m}$ 是 S 的极大理想, 则显然 $\mathfrak{m} = J$.

$\Leftarrow$. 任取理想 $I \neq S$, 显然有 $I \subset J$. 于是 J 是 S 的唯一的极大理想.

2) 令 $s/d \in S_{\mathfrak{p}}$, 其中 $d \in \mathfrak{p}$. 显然

$$\frac{d}{s} \in S_{\mathfrak{p}} \iff s \in \mathfrak{p}.$$

所以 s/d 为可逆元当且仅当 $s \notin \mathfrak{p}$, 也即 s/d 为非可逆元当且仅当 $s \in \mathfrak{p}$. 于是, $\mathfrak{p}S_{\mathfrak{p}}$ 是 $S_{\mathfrak{p}}$ 中的所有非可逆元的集合, 它显然是 $S_{\mathfrak{p}}$ 的一个理想. 由 1), 即知 2) 成立. $\square$