MATLAB

高等院校应用型人才培养规划教材——统计学类
GAODENG YUANXIAO YINGYONGXING RENCAI PEIYANG GUIHUA JIAOCAI TONGJIXUE LEI

Gailü Tongji Jisuan Jiqi MATLAB Shixian

概率统计计算及其MATLAB实现

常振海 刘薇 王丙参 编著

SWJTUP 西南交通大学出版社

高等院校应用型人才培养规划教材——统计学类

概率统计计算
及其 MATLAB 实现

常振海　刘　薇　王丙参　编著

西南交通大学出版社
·成　都·

内容简介

本书的编写从实例出发，淡化理论，突出方法，图文并茂，突出 MATLAB 的程序实现（版本为 7.11.0(R2010b))；程序注释多，通俗易懂，不需要读者事先学习 MATLAB 的相关知识，适合初次接触 MATLAB 的读者阅读．全书插图 80 多幅，例题 150 多道，几乎全部配有实现的程序．为了加深理解，全书还对常见的概率统计问题进行了模拟，如投硬币试验（投掷骰子）、生日问题、摸球问题、蒲丰投针问题、赌徒输光问题、Galto 板实验等．

全书共分为六章和一个附录，前两章主要介绍概率论和随机变量的基本知识，第三章至第五章是数理统计内容，第六章是随机过程计算及其仿真，最后，附录部分对 MATLAB 的基本知识进行了简介．主要内容涉及概率及其计算、变量分布及其相关计算、数字特征和中心极限定理、描述统计、参数估计和假设检验、方差分析和回归分析、泊松过程、马氏链、布朗运动、风险模型等的计算和模拟．另外还涉及 MATLAB 矩阵的运算和操作、微积分运算、代数方程（组）求解、画图和程序流程控制等内容．

本书可作为普通高等院校的统计学教材，或者是 MATLAB 软件的入门书籍，也可作为相关专业学习 MATLAB 的参考用书，也较适合自学使用．

图书在版编目（CIP）数据

概率统计计算及其 MATLAB 实现 / 常振海，刘薇，王丙参编著．—成都：西南交通大学出版社，2015.1
高等院校应用型人才培养规划教材．统计学类
ISBN 978-7-5643-3598-4

Ⅰ．①概… Ⅱ．①常… ②刘… ③王… Ⅲ．①Matlab 软件－应用－概率统计计算法－高等学校－教材 Ⅳ．①0242.28-39

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 290544 号

高等院校应用型人才培养规划教材——统计学类

概率统计计算及其 MATLAB 实现

常振海　刘　薇　王丙参　编著

*

责任编辑　张宝华
特邀编辑　曹　嘉
封面设计　何东琳设计工作室

西南交通大学出版社出版发行
成都市金牛区交大路 146 号　邮政编码：610031　发行部电话：028-87600564
http：//www. xnjdcbs. com
成都中铁二局永经堂印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸：185 mm × 260 mm　印张：17.25
字数：431 千字
2015 年 1 月第 1 版　2015 年 1 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5643-3598-4
定价：36.00 元

课件咨询电话：028-87600533
图书如有印装质量问题　本社负责退换

前　言

概率论与数理统计是高等院校数学系与统计系的基础课程，同时也是财经管理类部分专业和工科类部分专业的必修课之一．但随着计算机的快速发展，概率统计中许多涉及大计算量的有效方法也得到了广泛应用与迅猛发展，可以说，计算统计已是统计中一个很重要的研究方向．

本书写作的指导思想是在不失严谨的前提下，淡化理论，突出方法和软件实现，突出一个完整问题的解决，突出实际案例的应用和概率统计思想的渗透．这明显不同于纯数理类教材，即明显不同于把知识和软件命令分开讲解的教材，努力把我们在实践中应用 MATLAB 解决概率统计问题的经验和体会融入其中．本书中的几乎每一道例题和每一幅图都加注了 MATLAB 的实现程序（版本为 7.11.0(R2010b)），并且这些程序中配备了大量的解释性语句，便于阅读和理解，即使读者从没有接触过 MATLAB 软件，也一定能很快掌握 MATLAB 软件的基本用法和简单程序的编写，从而能借助 MATLAB 软件实现自己的一些想法．

本书分六章和一个附录．其中前两章主要介绍概率论的基本知识，包括事件的概率及其计算、一维和多维随机变量的概率分布及其计算、常见的离散型分布、常见的连续型分布、数字特征和中心极限定理等；第三章至第五章是数理统计内容，主要包括数据的描述统计、三大抽样分布、参数估计和假设检验、方差分析和回归分析等内容；第六章是随机过程计算及其仿真，主要包括泊松过程、马氏链、布朗运动、风险模型等的计算和模拟；最后，附录部分对 MATLAB 的基本知识作了简要介绍，主要包括矩阵的运算和操作、微积分运算、代数方程（组）求解、画图和程序流程控制等内容．

本书讲授 54 课时较为合适，主要借助于计算机上机操作和多媒体进行教学．

在本书的编写过程中，得到了天水师范学院数学与统计学院的大力支持，在此，向他们表示衷心的感谢，感谢数学与统计学院统计教研室同事们提出的意见和建议．书中的大部分程序是我们多年从事教学和科研工作的经验积累，部分实现程序引用了其他人的著作．同时对西南交通大学出版社表示衷心的感谢！

本书由天水师范学院的常振海、刘薇和王丙参共同编写．其中前三章由刘薇编写，第六章由王丙参编写，其余章节由常振海编写，全书由常振海统稿审定．

由于水平有限，书中不当之处在所难免，恳请读者批评指正．

邮箱：changzhenhai2012@163.com 或 liuwei20072012@163.com.

作　者

2014 年 4 月

目 录

1 概率计算及变量分布

1.1 概率定义及其计算

由于事件是Ω的某些子集, 如果把"是事件"这些子集归在一起, 可得到一个类, 记作$\mathscr{F}$, 称为**事件域**, 即$\mathscr{F}=\{A:A\subset\Omega, A\text{是事件}\}$. 事件域$\mathscr{F}$应满足下列要求:

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$;

(2) 若$A\in\mathscr{F}$, 则$\overline{A}\in\mathscr{F}$;

(3) 若$A_i\in\mathscr{F}, i=1,2,\cdots,n$, 则$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\in\mathscr{F}$.

在集合论中, 满足上述三个条件的集合类, 称为**布尔 (Borel) 代数**. 所以, 事件域是一个布尔代数. 由此有下面的公理化定义.

定义 1.1.1 设Ω为样本空间, $\mathscr{F}$为Ω的一些子集所组成的一个事件域, 如果对任一事件$A\in\mathscr{F}$, 定义在$\mathscr{F}$上的一个实值函数$P(\cdot)$满足下列条件:

(1) 非负性: $P(A)\geqslant 0$ ($\forall A\in\mathscr{F}$);

(2) 规范性: $P(\Omega)=1$;

(3) 可列可加性: 若$A_i\in\mathscr{F}(i=1,2,\cdots)$, 且$A_iA_j=\varnothing(i\neq j)$, 有$P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$,

则称$P(A)$为事件A的概率 (probability), 称$(\Omega,\mathscr{F},P)$为**概率空间**.

1.1.1 频率 古典概型与几何概型

1) 频率与概率

大量的试验发现, 尽管每做一串(n次) 试验, 事件A所得到的频率$f_n(A)$可以各不相同, 但是只要n相当大, $f_n(A)$总在某个数值附近摆动, 这个数值称为**频率的稳定值**. 频率的稳定值反映了事件A发生的可能性大小.

例 1.1.1 (抛硬币试验) 在投掷硬币的试验中, 历史上曾有许多著名的科学家对投掷结果为正面这一事件A发生的频率做了观测, 结果见表 1.1.1.

表 1.1.1 投硬币试验结果

实验者	投掷次数	出现正面次数	频率
De Morgan(德·摩根)	2 048	1 061	0.518 1
Buffon (蒲丰)	4 040	2 048	0.506 9
Feller (费勒)	10 000	4 979	0.497 9
Pearson (皮尔逊)	12 000	6 019	0.501 6
Pearson (皮尔逊)	24 000	12 012	0.500 5

模拟的思想和程序如下.

(1) 若记出现反面为 0, 出现正面为 1, 则需产生服从 0-1 分布的随机数. 命令为

binornd(1, p, M, N),

意即产生 M 行 N 列的服从 0-1 分布的随机数. 实际上是 M 行 N 列矩阵, 不妨记为 A.

(2) 分别计算 A 中 0 和 1 的个数, 分别代表出现反面和正面的次数, 从而计算出现正面或反面的频率.

例 1.1.1 模拟程序:

```
>>n=2048;  %投掷次数
>>X=binornd(1,0.5,1,n);  %产生服从 0-1 分布的随机数 n 个
>>n1=0;  %出现反面次数的初始值
>>n2=0;  %出现正面次数的初始值
>>for i=1:n;
    if  X(i)==0;
      n1=n1+1;
  else
      n2=n2+1;
  end
end
>>n1;  %出现反面的次数
>>n2;  %出现正面的次数
>>pn1=n1/n;  %出现反面频率
>>pn2=n2/n;  %出现正面频率
>>jieguo=[pn1,pn2]
```

运行结果为

```
jieguo=0.4922    0.5078
```

同理, 改变 n 的值就可以模拟表 1.1.1 中剩余的试验情形. 我们也可以改变程序一次性地把表 1.1.1 中的结果全部模拟出来, 也可以针对某一种情形的试验进行多次模拟, 这些留给读者做练习.

2）古典概型

若随机试验 E 具有下述特征:

(1) 样本空间的元素（即基本事件）只有有限个, 不妨设 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$.

(2) 每个基本事件出现的可能性是相等的, 即有

$$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n),$$

这种等可能性的数学模型称为**古典概型**（classical probability model）.

对上述的古典概型, 事件域 $\mathscr{F}$ 为 Ω 的所有子集的全体. 这时, 连同 $\varnothing$ 和 Ω 在内, $\mathscr{F}$ 中含有 2^n 个事件, 并且从概率的有限可加性知

$$1=P(\Omega)=P(\omega_1)+P(\omega_2)+\cdots+P(\omega_n).$$

于是 $$P(\omega_1)=P(\omega_2)=\cdots=P(\omega_n)=\frac{1}{n}.$$
对任一随机事件 $A\in\mathscr{F}$，如果 A 含有 k 个基本事件，即 $A=\omega_{i_1}\cup\omega_{i_2}\cup\cdots\cup\omega_{i_k}$，则
$$P(A)=\frac{k}{n}.$$

不难验证，上述概率 $P(\cdot)$ 具有非负性、规范性和可列可加性.

例 1.1.2 箱中有 100 件外形一样的同批产品，其中正品 60 件，次品 40 件. 现按下列两种方法抽取产品:

(1) 每次任取一件，经观察后放回箱中，再任取下一件，这种抽取方法叫作**有放回抽样**.

(2) 每次任取一件，经观察后不放回，在剩下的产品中再任取一件，这种抽取方法叫作**无放回抽样**.

试分别对这两种抽样方法，求从这 100 件产品中任意抽取 3 件，其中有两件次品的概率.

解 (1) 由于每次抽取后都放回，故每次抽取产品都是从原 100 件中抽取，则从 100 件中任意抽取 3 件的所有可能的取法共有100^3种. 因此，样本空间的基本事件总数 $n=100^3$. 再考虑事件 $A=$“3 件中有 2 件次品”所含的基本事件数. 由于任取 3 件中有 2 件次品的所有可能取法有 C_3^2 种，而 2 件次品是从 40 件次品中任意取出的，可能的取法有 40^2 种，另一件正品是从 60 件正品中任意抽取的，有 60 种取法. 因此，由排列组合的加法原理和乘法原理，A 包含的基本事件数 $k=\mathrm{C}_3^2\cdot 40^2\cdot 60$. 因此有：
$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_3^2\cdot 40^2\cdot 60}{100^3}=0.288.$$

例 1.1.2(1)实现程序：

```
>> PA21=(nchoosek(3,2)*40^2*60)/100^3    %计算 P(A)
```

运行结果为

```
    PA21=0.2880    %输出的结果
```

%注: nchoosek(n,k)= $\mathrm{C}_n^k=\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$

(2) 由于每抽取一件经观察后不放回，因此第一次是从 100 件中任取 1 件，第二次是从第一次取后剩下的 99 件中任取 1 件，第三次是从第二次取后剩下的 98 件中任取 1 件，从而样本空间总数 $n=100\cdot 99\cdot 98$. A 中所含的基本事件数 $k=\mathrm{C}_3^2\cdot 40\cdot 39\cdot 60$. 因此有：
$$P(A)=\frac{\mathrm{C}_3^2\cdot 40\cdot 39\cdot 60}{100\cdot 99\cdot 98}\approx 0.289.$$

例 1.1.2(2)实现程序：

```
>> PA22=(nchoosek(3,2)*40*39*60)/(100*99*98)    %计算 P(A)
```

运行结果为

```
PA22=0.2894    %输出的结果
```

一般地，采用有放回与无放回抽样计算的概率结果是不同的. 当抽取对象的数目较少时，差异较大，但当被抽取的数目较大，而抽取的数目又较小时，在这两种抽样方式下所计算的概率数值相差不大.

例 1.1.3（生日问题） 某班级有 n 个人（$n \leqslant 365$），问至少有两个人的生日在同一天的概率为多少？

解 假定一年按 365 天计算，由于每个人在 365 天的每一天过生日都是可能的，所以 n 个人可能的生日情况为 365^n 种，且每一种出现的可能性是相等的．设 $A=$“n 个人中至少有两个人的生日相同”，则 $\overline{A}=$“n 个人的生日全不相同”，所以 $\overline{A}$ 所包含的样本点数为

$$365 \times 364 \times \cdots \times (365-n+1)=\frac{365!}{(365-n)!}.$$

因此
$$P(\overline{A})=\frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!}.$$

于是
$$P(A)=1-\frac{365!}{365^n \cdot (365-n)!}.$$

实现程序：

```
>> PA3=1-(factorial(365))/(365^n*factorial(365-n))    %计算 P(A)
%注  factorial(n)=n!
```

注：这个例子是历史上有名的“生日问题”．对这个例子，如果直接求 $P(A)$，是比较麻烦的，而利用对立事件求解就简便多了．对一些不同的 n 值，可计算相应的概率值，结果见表 1.1.2.

表 1.1.2 至少有两人生日在同一天

n	10	20	23	30	40	50	60
$P(A)$	0.12	0.41	0.51	0.71	0.89	0.97	0.99

表 1.1.2 运算程序：

```
>> x=[10 20 23 30 40 50 60];   %向量 x，准备让 n 分别取向量 x 中的值
>>for i=1:length(x)   %length(x)计算向量 x 的长度
        PA(i)=1-(factorial(365))/(365^x(i)*factorial(365-x(i)));
   end
>>PA;   %计算的概率 P 值
>>biaoge=[x;PA]   %以表格形式显示结果，第一行为 x，第二行为相应概率
```

%注：因为 factorial(365)的值太大，超出了 MATLAB 中能显示的最大数值，因此这里 factorial(365)的运算结果为 inf，即无穷大的意思．建议除一个常数减小之，然后再等价变回去．

这个结果和人们平时的感觉有出入，说明人的“直觉”有时并不可靠．

3）几何概型

设试验结果可用某一区域 Ω 内的点的随机位置来确定，且点落在 Ω 的任意位置是等可能的．事件 A 表示点落在 Ω 的某一子区域内，该子区域仍记为 A，用 S_A 表示子区域 A 的度量（若区域属于一维空间，S_A 表示 A 在线段上的长度；若区域属于二维空间，S_A 表示 A 在平面区域 A 内的面积．依此类推，同理解释 S_Ω），则

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega},$$

由此定义的概率为**几何概型**（geometric probability model）.

例 1.1.4（会面问题）　甲、乙两人约定在 6 时到 7 时之间在某处会面，并约定先到者应等候另一个人一刻钟，过时即可离去，求两人能会面的概率.

解　以 x 和 y 分别表示甲、乙到达约会地点的时间（单位: min），在平面上建立直角坐标系，由于两人到达时刻是随机的，因此 (x,y) 的所有可能结果是边长为 60 的正方形，即

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 60, 0\leqslant y\leqslant 60\}.$$

记 $A=$ "两人能会面"，则能会面的充要条件是

$$A=\{(x,y)\mid |x-y|\leqslant 15\},$$

如图 1.1.1 所示的阴影部分. 这是一个几何概率问题，由等可能性知

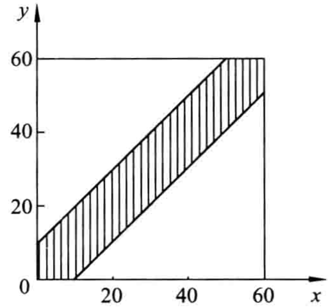

图 1.1.1

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{60^2-45^2}{60^2}=\frac{7}{16}.$$

例 1.1.4 实现程序：

```
>>plot([0,60],[60,60],'k','LineWidth',1)   %画(0,60)和(60,60)两点的连线, 'k'表示黑色显示线条, 'LineWidth',1 表示图形的线条宽度限定为 1, 默认为 0.5
>>hold on   %在上面的图像中加入下面将要画出的图形
>>plot([60,60],[0,60],'k','LineWidth',1)   %画(60,0)和(60,60)两点的连线, 黑色, 线宽为 1
>>x1=15:60;y1=x1-15;
  plot(x1,y1,'k','LineWidth',1)   %画横坐标范围在[15,60]的直线 y1=x1-15
>>x2=0:45;y2=x2+15;
  plot(x2,y2,'k','LineWidth',1)   %画横坐标范围在[0,45]的直线 y2=x2+15
>>for i=1:15
      plot([i,i],[0,i+15],'k','LineWidth',1);
  end   %这个循环画的是横坐标在[1,15]的阴影部分竖线
>>for i=45:60
      plot([i,i],[i-15,60],'k','LineWidth',1);
  end   %这个循环画的是横坐标在[45,60]的阴影部分竖线
>>for i=16:44
      plot([i,i],[i-15,i+15],'k','LineWidth',1);
  end   %这个循环画的是横坐标在[16,44]的阴影部分竖线
>>hold off   %和 hold on 对应, 表示添加图像结束
```

1.1.2　条件概率及其相关公式

1）条件概率

定义 1.1.2　若 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 是一个概率空间，$B\in\mathscr{F}$，且 $P(B)>0$，则对任意的 $A\in\mathscr{F}$，称

$$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在已知事件 B 发生的条件下，事件 A 发生的**条件概率**.

同理，当 $P(A)>0$ 时，也可类似地定义 B 关于 A 的条件概率：

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

计算条件概率 $P(A\mid B)$ 一般有两种方法：

(1) 在缩减的样本空间 Ω_B 中计算事件 A 发生的概率，就能得到 $P(A\mid B)$；

(2) 在原样本空间 Ω 中，先计算 $P(AB), P(B)$，再由定义中的公式求得 $P(A\mid B)$.

例 1.1.5　100 件产品，其中有 5 件不合格品，5 件不合格品中又有 3 件是次品，2 件废品. 在 100 件产品中任意抽 1 件，求：

(1) 抽得的是废品 B 的概率；

(2) 已知抽得的是不合格品 A，它是废品的概率 $P(B\mid A)$.

解　(1) 在 100 件产品中任意抽 1 件，共有 C_{100}^1 种可能，而抽得的是废品，共有 C_2^1 种可能. 由古典概率知

$$P(B)=\frac{C_2^1}{C_{100}^1}=\frac{1}{50}.$$

例 1.1.5(1) 实现程序：

```
>> PB=nchoosek(2,1)/nchoosek(100,1)    %计算命令
   PB=0.0200   %输出的结果
```

(2) 解法一（定义法）：由 $AB=B$ 知

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{100}}{\frac{5}{100}}=\frac{2}{5}.$$

例 1.1.5(2)实现程序：

```
>> PBA=(2/100)/(5/100)   %计算命令
   PBA=0.4000     %输出的结果
```

（解法二：在缩减的样本空间上由古典概率计算）

事件 $A=$“抽得的是不合格品”已经发生，所以样本空间就可以从 100 件产品缩减至 A 中的 5 件产品，抽一件不合格品共有 C_5^1 种可能，而 $B=$“抽得的是废品”，共有 C_2^1 种可能，故由 $AB=B$ 和古典概率知

$$P(B\mid A)=\frac{N_{AB}}{N_{\Omega A}}=\frac{2}{5}.$$

2）**乘法公式**

由条件概率定义可知，对任意两个事件 A 和 B，若 $P(B)>0$，则有

$$P(AB)=P(B)P(A\mid B),$$

称之为概率的**乘法公式**.

概率的乘法公式给出了求积事件概率的一种算法. 概率的乘法公式可推广到 n 个事件的情形.

定理 1.1.1（乘法公式） 一般地，若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 $n(n \geqslant 2)$ 个事件，则

$$P(A_1 A_2 A_3 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_3 \mid A_1 A_2) \cdots P(A_n \mid A_1 A_2 \cdots A_{n-1}).$$

例 1.1.6 10 个考签中有 4 个难签，三个人参加抽签（无放回）：甲先，乙次，丙最后，试问：
(1) 甲、乙、丙均抽得难签的概率为多少？
(2) 甲、乙、丙抽得难签的概率各为多少？

解 令 A, B, C 分别表示甲、乙、丙抽得难签的事件.

(1) 由乘法公式知，所求事件的概率为

$$P(ABC) = P(A)P(B \mid A)P(C \mid AB).$$

由条件概率和古典概率定义知

$$P(ABC) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} = \frac{1}{30}.$$

例 1.1.6(1)实现程序：

```
>> PABC=(4/10)*(3/9)*(2/8)   %计算命令
   PABC=0.0333   %输出结果
```

下面的计算程序类似，只是数据不同，不再给出.

(2) 因为甲、乙、丙按次序抽签，因此，甲抽得难签的概率为

$$P(A) = \frac{4}{10} = 0.4.$$

考虑乙抽得难签时，要先考虑甲是否抽得难签两种情况，因此，乙抽得难签的概率为

$$\begin{aligned} P(B) &= P(AB \cup \bar{A}B) = P(AB) + P(\bar{A}B) \\ &= P(A)P(B \mid A) + P(\bar{A})P(B \mid \bar{A}) = \frac{4}{10} \times \frac{3}{9} + \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} = 0.4. \end{aligned}$$

同理，考虑丙抽得难签时，要先考虑甲和乙是否抽得难签的四种情况，因此，丙抽得难签的概率为

$$P(C) = P(ABC \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}\bar{B}C) = P(ABC) + P(\bar{A}BC) + P(A\bar{B}C) + P(\bar{A}\bar{B}C).$$

而

$$P(\bar{A}BC) = P(\bar{A})P(B \mid \bar{A})P(C \mid \bar{A}B) = \frac{6}{10} \times \frac{4}{9} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{10}.$$

同理，

$$P(A\bar{B}C) = \frac{1}{10}, \quad P(\bar{A}\bar{B}C) = \frac{1}{6}.$$

由(1)知：$P(ABC) = \dfrac{1}{30}$，因此，

$$P(C) = \frac{1}{30} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{6} = \frac{4}{10} = 0.4.$$

3）全概率公式和 Bayes 公式

定义 1.1.3 如果一个事件组 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 在每次试验中必发生且仅发生一个，即 $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$, $B_i B_j = \varnothing (i \neq j)$，则称 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 为 Ω 的一个**完备事件组**或一个**分割**.

定理 1.1.2(全概率公式) 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 Ω 的一个分割, 且有 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$, 则对任一事件 A, 有

$$P(A)=\sum_{i=1}^{n}P(B_i)P(A\mid B_i).$$

定理 1.1.3(Bayes 公式) 设 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 是 Ω 的一个分割, 且 $P(B_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$, $P(A)>0$, 则有

$$P(B_i\mid A)=\frac{P(B_i)P(A\mid B_i)}{\sum_{j=1}^{n}P(B_j)P(A\mid B_j)}\quad(i=1,2,\cdots,n).$$

例 1.1.7 某工厂有四条流水线生产同一种产品, 该四条流水线分别占总产量的 15%, 20%, 30%和 35%, 又这四条流水线的不合格率依次为 0.05, 0.04, 0.03 和 0.02. 现在从出厂产品中任取一件, 问恰好抽到不合格品的概率为多少? 若该厂规定, 出了不合格品要追究有关流水线的经济责任, 现在在出厂产品中任取一件, 结果为不合格品, 但标志已脱落, 问第四条流水线应承担多大责任?

解 令 A={任取一件, 恰好抽到不合格品}, B_i={任取一件, 恰好抽到第 i 条流水线的产品}($i=1,2,3,4$). 由全概率公式可得

$$P(A)=\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A\mid B_i)=0.15\times0.05+0.20\times0.04+0.30\times0.03+0.35\times0.02=0.0315.$$

由 Bayes 公式知

$$P(B_4\mid A)=\frac{P(B_4)P(A\mid B_4)}{\sum_{i=1}^{4}P(B_i)P(A\mid B_i)}=\frac{0.35\times0.02}{0.0315}\approx22.22\%.$$

例 1.1.7 实现程序:

```
>> PA=0.15*0.05+0.20*0.04+0.30*0.03+0.35*0.02
>>PB4A=(0.35*0.02)/PA
```

运行结果为

```
PA=0.0315
PB4A=0.2222
```

4)**独立事件**

定义 1.1.4 对任意的两个事件 A,B, 若

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

成立, 则称事件 A,B 是**相互独立**的, 简称为**独立**的.

注: (1) 公式意味着事件 B 的发生不受事件 A 的影响, 即 $P(B)=P(B\mid A)$;

(2) 必然事件 Ω 与不可能事件 $\varnothing$ 与任何事件都是相互独立的.

定义 1.1.5 对任意三个事件 A,B,C, 如果有

$$P(AB)=P(A)P(B),$$
$$P(BC)=P(B)P(C),$$
$$P(CA)=P(C)P(A),$$
$$P(ABC)=P(A)P(B)P(C),$$

四个等式同时成立，则称事件 A，B，C 相互独立.

一般地，设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个事件，如果对于任意的 $k(1<k\leqslant n)$ 和任意的一组 $1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n$ 都有等式

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k})$$

成立，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 n 个相互独立的事件.

由此可知，n 个事件的相互独立性，需要有 $\sum\limits_{k=2}^{n}\mathrm{C}_n^k=2^n-n-1$ 个等式来保证.

1.2 随机变量及其分布

1.2.1 一维随机变量及其分布

样本空间中的基本事件有的是用数值描述的，有的不是，为了便于研究，人们把样本空间中的每一个样本点都对应为唯一的一个实数值，这个对应法则就是函数. 因为做一次随机试验，会出现哪个结果是随机的，因此这个函数的取值也是随机的，常称之为随机变量.

定义 1.2.1 设 E 为随机试验，$\Omega=\{\omega\}$ 为其样本空间，若对任意的 $\omega\in\Omega$，有唯一的实数 $X=X(\omega)$ 与之对应，则称 $X(\omega)$ 为**随机变量**.

在不引起混淆的情况下，常省去样本点 ω，记为 X. 随机变量常用 X,Y,Z 等表示，也常用 ξ,η,γ 等表示，其实现值常用 x,y,z 等表示.

若一个随机变量仅取有限个或可列个值，则称其为**离散型随机变量**；若一个随机变量的可能取值能充满数轴上的某一个区间，则称其为**连续型随机变量**.

因为 $\{a<X\leqslant b\}=\{X\leqslant b\}-\{X\leqslant a\}$，$\{X>c\}=\Omega-\{X\leqslant c\}$，所以，要掌握 X 的分布规律，只要对 $\forall x\in\boldsymbol{R}$，知道事件 $\{X\leqslant x\}$ 的概率就够了，意即其他事件的概率最终都可以转化为求事件 $\{X\leqslant x\}$ 的概率. 这样我们有下面的定义.

定义 1.2.2 设 X 是一个随机变量，对 $\forall x\in\mathbf{R}$，称

$$F(x)=P(X\leqslant x)$$

为 X 的**分布函数**，也常称 X 服从 $F(x)$，记为 $X\sim F(x)$.

定理 1.2.1 任一分布函数 $F(x)$ 具有如下 3 条性质:

(1) 有界性. 对 $\forall x\in\mathbf{R}$，$0\leqslant F(x)\leqslant 1$，且

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,\quad F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$

(2) 单调性. 对任意的 $x_1<x_2$，有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$.

(3) 右连续性. 对任意的 $x_0\in\mathbf{R}$，有 $F(x_0+0)=F(x_0)$.

例 1.2.1 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=A+B\arctan x\ (-\infty<x<+\infty)$，试求常数 A, B.

解 由分布函数的性质，我们有

$$0=\lim_{x\to-\infty}F(x)=\lim_{x\to-\infty}(A+B\arctan x)=A-\frac{\pi}{2}B,$$

$$1=\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(A+B\arctan x)=A+\frac{\pi}{2}B.$$

解方程组
$$\begin{cases}A-\dfrac{\pi}{2}B=0,\\ A+\dfrac{\pi}{2}B=1.\end{cases}$$

得解 $A=\dfrac{1}{2}, B=\dfrac{1}{\pi}$.

例 1.2.1 计算程序：

```
>>syms x A B    %定义参数
>>f1=limit(A+B*atan(x),x,+inf)    %计算极限 lim_{x→+∞}(A+B arctan x)
>>f0=limit(A+B*atan(x),x,-inf)    %计算极限 lim_{x→-∞}(A+B arctan x)
```

运行结果为

```
f1=A+1/2*pi*B
f0=A-1/2*pi*B
>>clear;   %清除前面的参数定义
>>syms pi   %定义参数 pi，否则下面的计算将把 pi 当作数值进行运算
%下面解方程组 A-(π/2)B=0, A+(π/2)B=1
>>X=[1,-1/2*pi;1,1/2*pi];   %系数阵
>>C=transpose([0,1]);   %常数向量
>>ab=inv(X)*C    %求解  A, B
```

运行结果为

```
ab=
    1/2
    1/pi
```

1.2.2 一维随机变量的概率分布

1）离散型随机变量的分布列

定义 1.2.3 设 X 是一维离散型随机变量，其所有可能取值为 $x_i(i=1,2,\cdots)$，则称

$$P(X=x_i)=p_i,\quad i=1,2,\cdots$$

为随机变量 X 的**概率分布列**，也称为**分布律**.

离散型随机变量 X 的分布列常常习惯地把它们写成表格的形式：

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_i	$\cdots$

由概率的性质可知，任一离散型随机变量的分布列都具有下述两个性质：

(1) 非负性. $p_i \geqslant 0, i=1,2,\cdots$;

(2) 正则性. $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$.

反过来，任意一个具有以上两个性质的数列 $\{p_i\}$ 都有资格作为某一个随机变量的分布列.

由概率的可列可加性有：

$$P(X\in I)=\sum_{x_i\in I}P(X=x_i)=\sum_{x_i\in I}p_i \quad (\forall I\subset \mathbf{R}).$$

由此可知，X 取各种值的概率都可以由它的分布列通过计算而得到，这件事实常常说成是：分布列全面地描述了离散型随机变量的统计规律.

例 1.2.2　设离散型随机变量 X 的分布列为

X	-1	2	3
P	0.25	0.5	0.25

求 $P(X\leqslant 0.5)$, $P(1.5<X\leqslant 2.5)$，并写出 X 的分布函数，画出其图形.

解　因为

$$P(X\leqslant 0.5)=P(X=-1)=0.25\text{；}\quad P(1.5<X\leqslant 2.5)=P(X=2)=0.5.$$

所以

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.25, & -1\leqslant x<2,\\ 0.75, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

例 1.2.2 计算程序：

```
>> X=[-1 2 3];P=[0.25 0.5 0.25];
>>for i=1:length(X)   %循环开始，对 X 的每个取值做如下判断
     if  X(i)<=0.5   %逻辑判断
       gailv(i)=P(i);   %若逻辑条件为真，就执行该命令，否则，执行下一条命令
     else  gailv(i)=0;
     end  %条件语句判断结束
>>end  %循环结束
>>p1=sum(gailv)   %计算 P(X≤0.5)
>>a=1.5; b=2.5;
>>for i=1:length(X)
       if  X(i)>a&X(i)<=b
           gailv(i)=P(i);
       else  gailv(i)=0;
       end
>>end
>>p2=sum(gailv)
```