21世纪高等院校创新规划教材

线性代数

LINEAR ALGEBRA

主编　李曦　郑华盛

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

21世纪高等院校创新规划教材

线 性 代 数

主 编 李 曦 郑华盛
副主编 胡结梅 王卫东 邹 群

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/李曦,郑华盛主编. —杭州:浙江大学出版社,2013.7

ISBN 978-7-308-11810-1

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①李… ②郑… Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材 Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 159807 号

线性代数

主编 李 曦 郑华盛

责任编辑 邹小宁

文字编辑 李凤慧

封面设计 王聪聪

出　　版 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310007)

(网址:http://www.zjupress.com)

排　　版 杭州教联文化发展有限公司

印　　刷 浙江云广印业有限公司

开　　本 787mm×1092mm 1/16

印　　张 9.5

字　　数 237 千

版 印 次 2013 年 7 月第 1 版 2013 年 7 月第 1 次印刷

书　　号 ISBN 978-7-308-11810-1

定　　价 18.00 元

前　言

随着我国经济建设和科学技术的迅速发展,高等教育从精英教育转向大众化教育,高等学校教育教学观念、内容、方法也随之发生了较大的变化,为了适应这一变化的需要,我们编写了这本适合一般工科院校非数学专业学生使用的线性代数,该书也适合需提高数学素质和能力的人员使用。

线性代数是高等院校一门重要的公共基础课程,具有较强的逻辑性和抽象性,本书是根据高等学校对线性代数教学的基本要求,并参考国内外一些优秀教材编写的。本书具有以下特点:1)由浅入深、由易及难;2)强调课程内容的逻辑连贯性,淡化定理的推导;3)强调课程方法的思想和应用,每一章都给出了应用与小结。

本书的编写工作由南昌航空大学李曦主持,胡结梅编写第1章,王卫东编写第2章,李曦编写第3、6章,邹群编写第4章,郑华盛编写第5章,最后由李曦和郑华盛统稿。

本书由南昌航空大学教材建设基金资助,在此深表感谢!

由于编者水平有限,加之时间匆忙,书中难免有错误及不妥之处,恳请使用本书的教师和学生提出宝贵意见。

编　者

2013年06月

目　录

第1章 行列式

行列式是一类很重要的数学工具,它在其他学科中有广泛的应用. 本章在引入二、三阶行列式的基础上给出n阶行列式的定义、性质及计算方法,并把n阶行列式应用于求解n元线性方程组.

§1.1 二阶与三阶行列式

1.1.1 三阶行列式

本节从二元与三元线性方程组的解引出二阶与三阶行列式的定义.

例如,对于二元线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}\tag{1-1}$$

用消元法求解,当$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$时,可求得解为

$$x_1=\frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\ ,\ x_2=\frac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}\tag{1-2}$$

定义1 设有4个数排成二行二列的数表

$$\begin{matrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{matrix}\tag{1-3}$$

表达式$a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$称为数表(1-3)所确定的二阶行列式,并记为

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\tag{1-4}$$

由定义知
$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\tag{1-5}$$

数$a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为行列式(1-4)的元素或元,元素a_{ij}的第一个下标i称为行标,表明该元素位于第i行,第二个下标j称为列标,表明该元素位于第j列. 位于第i行第j列的元素称为行列式(1-4)的(i,j)元.

注 二阶行列式$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$的结果就是一个数,也可用对角线法则计算其值.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

把 a_{11} 与 a_{22} 的实联线称为主对角线，a_{12} 与 a_{21} 的虚联线称为副对角线，二阶行列式就是主对角线上的两元素之积减去副对角线上两元素之积所得的差.

利用二阶行列式的概念，(1–2)式中分子和分母可表示为

$$b_1a_{22}-a_{12}b_2=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq D_1\text{，}a_{11}b_2-b_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} \triangleq D_2\text{，}a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \triangleq D$$

因此线性方程组(1–1)的解可写成

$$x_1=\frac{D_1}{D}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}\text{，}x_2=\frac{D_2}{D}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{1–6}$$

从这里看出 x_1，x_2 为两个二阶行列式的商，且分母的行列式都为 D，D 是由线性方程组(1–1)中未知量 x_1，x_2 的系数按其在原方程组的相对位置所确定的二阶行列式(称为系数行列式)，x_1 的分子是用常数项 b_1，b_2 分别替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21} 所得的二阶行列式，x_2 的分子 D_2 是由常数项 b_1，b_2 分别替换 D 中 x_2 的系数 a_{12}，a_{22} 所得的二阶行列式.

例 1 解二元线性方程组

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ -2x_1+3x_2=12 \end{cases}$$

解 由于

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=3-(-4)=7\neq 0\text{，}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 12 & 3 \end{vmatrix}=3-24=-21\text{，}$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 12 \end{vmatrix}=12-(-2)=14\text{，}$$

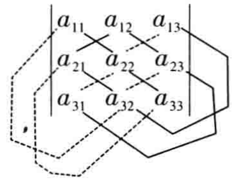
因此 $x_1=\dfrac{D_1}{D}=\dfrac{-21}{7}=-3$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}=\dfrac{14}{7}=2$.

定义 2 设有 9 个数排成三行三列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} \tag{1–7}$$

记 $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1–8}$$

称(1–8)式为数表(1–7)所确定的三阶行列式，同样可用对角线法则来计算三阶行列式.



上述定义表明三阶行列式由6项构成，每项都是不同行不同列的3个元素的乘积冠以正负号，其规律遵循如图所示的对角线法则，平行于主对角线的3条实联线上的三个元素乘积冠以正号，平行于副对角线上的3条虚联线上的3个元素乘积冠以负号.

例2　计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

解　按对角线法则，有

$$\begin{aligned} D&=1\times1\times(-1)+(-2)\times(-3)\times(-1)+1\times2\times1-1\times1\times(-1)-(-2)\times2\times(-1)-1\times(-3)\times1 \\ &=-5 \end{aligned}$$

对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases} \tag{1-9}$$

可以用消元法得出类似于(1-6)的解结构，也可以用行列式表示其解. 记系数行列式为 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，当 $D\neq0$ 时，用常数项 b_1，b_2，b_3 替换 D 中 x_1 的系数 a_{11}，a_{21}，a_{31} 所得的三阶行列式记作 D_1，即 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，类似可得 $D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$，$D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$，则可以验证 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}$ 为线性方程组(1-9)的解.

1.1.2　全排列与逆序数

二元与三元线性方程组可用行列式表示的公式 $x_j=\dfrac{D_j}{D}$ 求解，为了研究四阶及四阶以上线性方程组的用行列式表示的公式解，我们需引入 n 阶行列式. 但四阶及四阶以上的行列式就不能用直观的对角线法则来定义了，下节用全排列与逆序的方法来定义 n 阶行列式，为此先介绍全排列与逆序数的定义.

定义3　由 n 个自然数 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个有序数组，称为这 n 个数的一个全排列，简称排列.

n 个不同元素的所有排列的种数通常用 P_n 表示，则有 $P_n=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times$

$3\times2\times1=n!$

例如，1234，4312都是4个数1，2，3，4的一个排列，且1，2，3，4这4个数的所有排列的种数有 $4!=24$ 种，除了排列1234按自然顺序从小到大排列以外，其余排列中都有较大的数会排在较小的数前面的情况，如4312中4排在3，1，2的前面，3排在1，2的前面.

定义4 在一个排列中，如果某一个较大的数排在某一个较小的数前面，就称这两个数构成一个逆序. 一个排列中出现逆序的总数称为这个排列的逆序数. 排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序数用 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$ 表示，并且把逆序数为奇数的排列称为奇排列，逆序数为偶数的排列称为偶排列.

例如，排列4312中，4与3，4与1，4与2，3与1，3与2都构成逆序，$\tau(4312)=5$. 排列4312为奇排列.

特别，自然数1，2，3，…，n 按从小到大的标准次序排成 $123\cdots n$ 的自然排列，逆序数为0.

例3 求排列543261的逆序数 $\tau(543261)$.

解 在排列543261中：5排在首位，不与前面的数构成逆序，逆序为0；4的前面有数5比它大，故逆序为1；3的前面有数5和4比它大，故逆序为2；2的前面有数5，4，3比它大，故逆序为3；6的前面没有更大的数，故逆序为0；1的前面有数5，4、3、2，6比它大，故逆序为5；故该排列的逆序数为 $\tau(543261)=0+1+2+3+0+5=10$.

习题 1-1

1. 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数：

(1)3712456；　　(2) $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$.

2. 计算 $\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & -4\end{vmatrix}$.

3. 计算 $\begin{vmatrix}3 & 2 & -4\\ 4 & 1 & -2\\ 5 & 2 & -3\end{vmatrix}$.

4. 计算 $\begin{vmatrix}1 & x & x\\ x & 2 & x\\ x & x & 3\end{vmatrix}$.

5. 证明 $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$.

§1.2　n阶行列式的定义

由三阶行列式的定义

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (1-10)$$

可以看出：

(1)(1-10)式的每一项都是位于不同行不同列的3个元素的乘积冠以正负号；

(2)(1-10)式的每一项除正负号外的三个元素的行标按自然数从小到大排列，列标也是1，2，3的一个排列，而且当列标排列为偶排列时对应的乘积取正号，当列标排列为奇排列时对应的乘积取负号.

(3)(1-10)式的右边是6项的和，总项数正好是列标排列的种数$P_3=3!=6$.

因此，三阶行列式可以写成$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\sum\limits_{p_1p_2p_3}(-1)^{\tau(p_1p_2p_3)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$，其中$\tau(p_1p_2p_3)$为排列$p_1p_2p_3$的逆序数，$\Sigma$表示对1，2，3三个数的所有排列$p_1p_2p_3$求和；类似的，二阶行列式可以写成$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\sum\limits_{p_1p_2}(-1)^{\tau(p_1p_2)}a_{1p_1}a_{2p_2}$，如此可以把行列式的定义推广到一般$n$阶行列式的定义.

1.2.1　n阶行列式的定义

定义5　设有n^2个数排成n行n列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \quad (1-11)$$

$$\text{记 } D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n} \quad (1-12)$$

其中$p_1p_2\cdots p_n$为自然数$1,2,\cdots,n$的一个排列，$\tau(p_1p_2\cdots p_n)$为排列$p_1p_2\cdots p_n$的逆序数，数a_{ij}称为行列式D的(i,j)元. 称(1-12)式为数表(1-11)所确定的n阶行列式，简记为$\det(a_{ij})$.

由于$1,2,\cdots,n$的全排列共有$n!$个，因而(1-12)中求和的项共有$n!$项.

特别地，一阶行列式$|a|=a$，例如$|-3|=-3$，$|3|=3$.

例 4 证明上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

证明 因为当$j<i$时，$a_{ij}=0$，故D中可能不为0的元素a_{ip_i}的下标应有$p_i\geqslant i$，即$p_1\geqslant 1$，$p_2\geqslant 2$，…，$p_n\geqslant n$，于是$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$中不为0的项只有$a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$，故由定义$D=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

同理可证，下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

对角行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix}=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$$

由定义5，$D=\det(a_{ij})=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，这里求和是对所有列标排列求和的，那么我们是否可以对所有行标排列求和呢？为此，先讨论对换及对换与排列奇偶性的关系.

1.2.2 对换

定义 6 在n个数的一个排列中任意两个元素变换位置，其他元素保持不动，那么它就得到一个新的排列，对于排列所作的这样的一个变换称为一个对换，把对相邻两个元素的对换称为相邻对换.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换，改变排列的奇偶性.

证明 先证相邻对换的情形.

设排列为$a_1\cdots a_labb_1\cdots b_m$，对换$a$与$b$，变成$a_1\cdots a_lbab_1\cdots b_m$，这两个排列除$a$与$b$这两个数组成的元素对的逆序改变外，其余各元素对构成的逆序相同，且当$a<b$时，对换后新排列的逆序数增加1，当$a>b$时，对换后新排列的逆序数减少1，所以排列$a_1\cdots a_labb_1\cdots b_m$与排列$a_1\cdots a_lbab_1\cdots b_m$的奇偶性发生改变.

再证一般对换的情形：

设排列为$a_1\cdots a_lab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$，将$a$与$b$对换看成通过以下相邻对换来实现：先作$m$次相邻对换，变成$a_1\cdots a_labb_1\cdots b_mc_1\cdots c_n$，再作$m+1$次相邻对换，变成$a_1\cdots a_lbb_1\cdots b_mac_1\cdots c_n$，总之经过$2m+1$次相邻对换后，排列的奇偶性发生改变，所以作一般对换后排列的奇偶性会

发生改变.

记 $D=\det(a_{ij})=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，交换 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}$ (1–13)

中两元素 a_{ip_i} 与 a_{jp_j} 变成

$$a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \tag{1–14}$$

显然(1–13)式与(1–14)式的值相等.

(1–13)式的行标排列为自然排列 $1\cdots i\cdots j\cdots n$，(1–14)式的行标排列为 $1\cdots j\cdots i\cdots n$，由定理1可知，(1–13)式与(1–14)式行标排列的逆序数的奇偶性改变. 且(1–13)式的列标排列为 $p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n$，(1–14)的列标排列为 $p_1p_2\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n$，由定理1可知，(1–13)式与(1–14)式列标排列的逆序数的奇偶性也发生改变. 而经过变换后(1–13)式与(1–14)式的行标与列标排列的逆序数之和的奇偶性不变.

若经若干次对换后使(1–13)式的列标变成自然排列，此时行标排列为 $q_1q_2\cdots q_n$，(1–13)式变成

$$a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn} \tag{1–15}$$

显然(1–13)式与(1–15)式的值相等. 而经过变换后(1–13)式与(1–15)式的行标与列标排列的逆序数之和的奇偶性也不变. 即

$$\begin{aligned}
&(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}\\
&=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(p_1p_2\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n}\\
&=(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)+\tau(12\cdots n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}\\
&=(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}
\end{aligned} \tag{1–16}$$

由于 $q_1q_2\cdots q_n$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，因此 $a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$ 是取自不同行不同列的元素的乘积，故由(1–16)式知

$$D=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn}$$

故

$$D=\det(a_{ij})=\sum_{q_1q_2\cdots q_n}(-1)^{\tau(q_1q_2\cdots q_n)}a_{q_11}a_{q_22}\cdots a_{q_nn} \tag{1–17}$$

(1–17)可作为行列式定义5的等价定义，由此可看出，行列式对行排列求和与对列排列求和是一样的.

习题 1–2

1. 在四阶行列式中，$a_{21}\ a_{32}\ a_{14}\ a_{43}$应带什么符号.
2. 在六阶行列式中，$a_{23}\ a_{42}\ a_{14}\ a_{56}\ a_{65}\ a_{31}$应带什么符号.
3. 设排列 $x_1x_2\cdots x_n$ 的逆序数为 k，求排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_1$ 的逆序数.
4. 选择 k,l，使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为五阶行列式中带有负号的项.
5. 设 n 阶行列式中有多于 n^2-n 个元素为零，证明这个行列式为零.

§1.3 行列式的性质

三阶以上行列式用定义计算往往是较麻烦的,本节先介绍行列式的一些性质,利用这些性质,可简化行列式的计算.

将行列式D的行与列互换后得到的行列式,称为D的转置行列式,记为D^{T}

记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,　　则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

性质1　行列式与其转置行列式相等.

证明　记$D=\det(a_{ij})$的转置行列式为$D^{\mathrm{T}}=\det(b_{ij})$,则有$b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

故由定义5中(1–12)式及(1–17)式得

$$D^T=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}=\sum_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}=D\ .$$

此性质说明行列式的行与列具有同等的地位,行列式的性质凡是对行成立的,对列也成立,反之亦然.

性质2　互换行列式的两行(列),行列式变号.

证明　设行列式

$$D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

是由行列式$D=\det(a_{ij})$对换i,j两行得到的,即当$k\neq i,j$时,$b_{kp}=a_{kp}$;当$k=i$时,$b_{ip}=a_{jp}$;当$k=j$时$b_{jp}=a_{ip}$ 于是

$$\begin{aligned} D&=\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{np_n} \\ &=\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{jp_j}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n} \\ &=\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_i\cdots p_j\cdots p_n)}b_{1p_1}\cdots b_{ip_j}\cdots b_{jp_i}\cdots b_{np_n} \\ &=-\sum(-1)^{\tau(p_1\cdots p_j\cdots p_i\cdots p_n)}b_{1p_1}\cdots b_{ip_j}\cdots b_{jp_i}\cdots b_{np_n} \\ &=-D_1 \end{aligned}$$

以r_i表示行列式的第i行,以c_i表示第i列,以$r_i\leftrightarrow r_j$表示交换i,j两行,以$c_i\leftrightarrow c_j$表示交换i,j两列.

推论　若行列式有两行(列)完全相同,则此行列式等于零.

证明　把行列式的相同两行互换后,互换后的行列式与原行列式变号,又由于相同两行互换,互换后行列式与原行列式相同,故$D=-D$,因此$D=0$.

性质3　行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一数k,等于用数k乘此行列

式,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

证明 左式$=\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots(ka_{ip_i})\cdots a_{np_n}=k\sum(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots a_{ip_i}\cdots a_{np_n}=kD$

以$r_i\times k$表示第i行乘以k,以$c_i\times k$表示第i列乘以k.

推论 如果行列式某一行(列)的所有元素有公因子,则公因子可以提到行列式符号的外面. 以$r_i\div k$或$c_i\div k$表示第i行或第i列提出公因式k.

性质4 若行列式有两行(列)元素对应成比例,则行列式等于零.

性质5 若行列式的某一行(列)的每一个元素都写成两个数的和,则行列式可以写成两个行列式的和,这两个行列式分别以这两个数作为所在行(列)对应位置的元素,其他位置的元素与原行列式相同,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明 左式$=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots(b_{ip_i}+c_{ip_i})\cdots a_{np_n}$

$=\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots b_{ip_i}\cdots a_{np_n}+\sum\limits_{p_1p_2\cdots p_n}(-1)^{\tau(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}\cdots c_{ip_i}\cdots a_{np_n}$

$=$右式

性质6 把行列式的某列(行)的各元素乘以同一数,然后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变.

以c_i+kc_j表示行列式的第j列乘以数k后加到第i列上,以r_i+kr_j表示行列式的第j行乘以数k后加到第i行上.

注 (1)D中所作运算r_i+kr_j与D中所作运算kr_i+r_j区别在于,作运算r_i+kr_j后D中的第i行元素改变为$a_{ip}+ka_{jp}(p=1,2,\cdots,n)$行列式还等于$D$,而作运算$kr_i+r_j$后$D$中的第$j$行元素变为$ka_{ip}+a_{jp}(p=1,2,\cdots,n)$,行列式仍等于$D$.

(2)D中所作运算r_i+r_j与D中所作运算r_j+r_i区别在于,作运算r_i+r_j后D中的第i行元素改变,第j行元素保持不变,而作运算r_j+r_i后D中的第j行元素改变,第i行元素保持不变.

(3) $\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & b \\ z & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & y \\ c & w \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$,而

$$\begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+w \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & w \end{vmatrix}$$

根据上述性质及上三角行列式的计算结果,可以得到计算行列式常用的一种方法:利

用行列式的运算，$r_i \leftrightarrow r_j$ 或 $r_i + kr_j$ 把行列式化为上三角行列式，再计算行列式的值.

例5 计算 $D=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -6 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

解 $D \xlongequal{r_1 \leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -6 & 1 \\ -1 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3+r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-2r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 2 & -4 & -3 \end{vmatrix}$

$$\xlongequal{r_4-2r_2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & -14 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal{r_4-\frac{14}{5}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{57}{5} \end{vmatrix} = 57$$

注 (1)第一步把元素 a_{11} 变为1，可以避免分数的运算，这里用的是通过对换 r_1 与 r_2 实现，也可以用 r_1-r_2 来实现；最后一步 $r_4-\frac{14}{5}r_3$ 就无法避免分数的运算.

(2)第二步把元素 a_{21}，a_{31}，a_{41} 变为0，实际做了三步运算.

(3)类似地，可进行列运算把行列式化为下三角行列式.

例6 计算 $D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

解法一

$$D \xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4} \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 & 1 \\ 6 & 3 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1 \div 6} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[\substack{r_3-r_1 \\ r_4-r_1}]{r_2-r_1} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48$$

解法二

$$D=\begin{vmatrix} 1+2 & 1+0 & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+2 & 1+0 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+2 & 1+0 \\ 1+0 & 1+0 & 1+0 & 1+2 \end{vmatrix}$$

利用性质5，拆开后共有 $2\times2\times2\times2$ 个行列式，因为当出现有2列所有元素都取1时，行列式为0. 拆开后非零的行列式有两种：只有一列全为元素1的列与不含有所有元素全为1的列.

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$=2^3+2^3+2^3+2^3+2^4$

$=48$

例7 计算 $D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$

解

$$D\xlongequal[\substack{r_3-r_2\\ r_2-r_1}]{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}\xlongequal[r_3-r_2]{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}\xlongequal{r_4-r_3}\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}=a^4$$

例8 设 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$，$D_1=\det(a_{ij})=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}$

$D_2=\det(b_{ij})=\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$，证明 $D=D_1D_2$

证明 对 D_1 进行若干次运算 r_i+kr_j 后，可以把 D_1 化为下三角形行列式，设为

$$D_1=\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk}\ ;$$

对 D_2 进行若干次运算 c_i+kc_j 后，可以把 D_2 化为下三角形行列式，设为

$$D_2=\begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}$$

于是，对 D 的前 k 行作与 D_1 相同的运算 r_i+kr_j，再对后 n 列作与 D_2 相同的运算 c_i+kc_j，可把 D 化为下三角形行列式

$$D=\begin{vmatrix} p_{11} & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{k1} & \cdots & p_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & q_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & q_{n1} & \cdots & q_{nn} \end{vmatrix}=p_{11}\cdots p_{kk}q_{11}\cdots q_{nn}=D_1D_2.$$