不定方程和同余式的解题探索

岑中枢 著

$x^2+y^2+z^2=u^3$

$x_1^3+x_2^3+x_3^3=x_4^3$

$x^7+y^3\equiv 0 \pmod{71}$

$$w^2=\frac{(4m+1)-3n(3n^2+3n+1)}{3n+1}$$

求$(a+b)^n$展开各项系数

项序	1	2	3	4	5	6	…		
A			n−1	n−2	n−3	n−4	n−…	2	1
B	1	n						n	1
C		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	…	$\frac{1}{n}$	

海南出版社
HAINAN PUBLISHING HOUSE

不定方程和同余式的解题探索

岑中枢　著

海南出版社
HAINAN PUBLISHING HOUSE

图书在版编目（CIP）数据

不定方程和同余式的解题探索 / 岑中枢著. -- 海口：海南出版社，2014.12

ISBN 978-7-5443-5839-2

Ⅰ. ①不… Ⅱ. ①岑… Ⅲ. ①不定方程 - 题解②同余式 - 题解 Ⅳ. ①O122.2-44②O156.1-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 292122 号

不定方程和同余式的解题探索

著　　：岑中枢
责任编辑：李向阳（手机：18976196303）
封面设计：李　丹
印刷装订：海口新明印刷有限公司
海南出版社　出版发行
地　　址：海口市金盘建设三横路 2 号
邮政编码：570216
网　　址：http: //www.hncbs.cn
经　　销：全国新华书店经销
开　　本：787mm × 1092mm　1/16
字　　数：280 千字
印　　张：22.5
版　　次：2014 年 12 月第 1 版　2014 年 12 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5443-5839-2
定　　价：30.00 元

暨南大学图书馆惠存

岑中栢赠

二〇一五、二、廿九、

作者简介

岑中枢，海南澄迈人。海南省总工会退休干部。爱好数学，1994年退休时，撰写《不定方程的整数解和填数法》，获得1991—1994年度全省优秀学术论著二等奖及中南六省（市）优秀教育图书三等奖，现为中国数学会会员。

退休二十年后的今天，他已是85岁高龄的老人，但仍矢志不移，不顾年迈，坚持研究数学，如今又出版了这本数学书，用他的话说："只要不死，还要钻研下去。"，这种研究学问的精神，实难能可贵。

前 言

不定方程在数论中占有重要位置，它的意义，在有关数论书籍中已经详述，作者在1994年所写的《不定方程的整数解和填数法》一书中，也曾略述一些。因此，这里就不必重赘了。

本书内容是例题解答，但对其中一些难解的问题，也作了一些探讨，提出一些新的解法。例如第一章第七、八节，在 $x^3+y^3=M$ 中，凡是有整数解的，都可以通过第⑨、⑩、⑪通式求出，且可从中导出 $x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3=0$ 等等，最后一章也提出一些想法。当然，这方面还很不够，但不论如何，作者的目的，是使对不定方程感兴趣的青年读者在解题中，遇到困难时，有所帮助；至于一部分高次同余式题的解答，较好的方法是利用指数表。因此，在第四章第二节中，特别详细地介绍元根的计算方法和指数表的编制等等，并不惜篇幅地编制由100至300的指数表（100以内的素数指数表在王杰官老师编著的《数论基础》中已有）。特别要说的是，本书很多例题解答是从王老师的《数论基础》中汲取的，作者只是尽量用较通俗易懂的语言表达而已，也可说是作者学习的心得。在这里特向王老师致以崇高敬礼。

由于作者水平有限，加上已是耄耋之年，弥留之际，匆忙出书，错误在所难免，恳请读者原谅，并予指正，不胜感谢。

岑中枢

二〇一四年六月　　于海口

目 录

第一章　不定方程

不定方程是数论中重要组成部分，很多世界数学难题，如 $x^n=y^2\pm Z^2$，$x^n=y^m\pm Z^m$，$x^n=y^n\pm Z^n$，$x^n=y^m\pm Z^k$，…，都是多元高次不定方程。下面将由浅及深分别举例解答。

第一节　二元一次不定方程

例 1：　$x+y=7$

解：　容易得到它的正整数解是：

$\begin{cases}x=1,2,3,4,5,6\\y=6,5,4,3,2,1\end{cases}$ 或 x 和 y 互相交换。0 是整数，但不是正整数，也不是负整数。

二元一次不定方程的例子，是 $ax\pm by=M$，其中 a、b 是自然数，M 是整数。

例 2：　$5x+7y=31$

解：　$\because(5,7)=1$，$\therefore$ 方程有整数据。引用拙作《不定方程的整数解和填数法》(1994 年 10 月海南出版社出版发行)(以下简称<不>）第一章的辗除横式演算：

$5\underline{\quad 3\quad}7\underline{\quad 2\quad}1$

可得到解的表示式 $\begin{cases}x=\dfrac{31}{1}\times 3+7t\Rightarrow x=93+7t\\[2ex] y=-(\dfrac{31}{1}\times 2+5t)\Rightarrow y=-(62+5t)\end{cases}$

其中 $t=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$

若要求正整数解，即 $\begin{cases}x=93+7t>0\\ y=-(62+5t)>0\end{cases}$

要通过不等式组计算，取 $t=-13$，可得：正整数 $\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}$

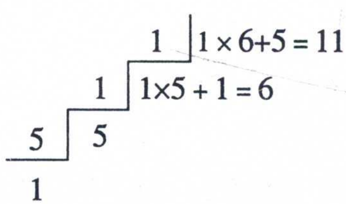
例 3： $79x-43y=5$

解： 辗除横式：

$79\underline{\quad 1\quad}43\underline{\quad 1\quad}36$

$43\underline{\quad 1\quad}36\underline{\quad 1\quad}7$

$36\underline{\quad 1\quad}7\ \underline{\quad 5\quad}1$



由图阶计算将三列缩减成一列

$79\underline{\quad 6\quad}43\underline{\quad 11\quad}1$

得到解： $x=\frac{5}{1}\times6+43t=30+43t,y=\frac{5}{1}\times11+79t=55+79t$，

其中 $t=0,\pm1\pm2,\cdots$

例 4： $11x-3xy+2y-10=0$

解： 将原式移项变形为：$x(11-3y)=10-2y\Rightarrow x=\frac{10-2y}{11-3y}$

由《不》第一章第五节引理：

$10-2y\underline{\quad 1\quad}11-3y\underline{\quad 1\quad}-1+y$

$11-3y\underline{\quad 1\quad}-1+y\underline{\quad -3\quad}8$

8 的因数：$\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8$

若 $11-3y=\pm 1$，则 $y=4$

$11-3y=\pm 2,\quad y=3$

$11-3y=\pm 4,\quad y=5$

$11-3y=\pm 8,\quad y=1$

将其分别代入 $x=\dfrac{10-2y}{11-3y}$，得到 $\begin{cases}x=-2\\y=4\end{cases}$，$\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$，$\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$，$\begin{cases}x=0\\y=5\end{cases}$，

故原方程有以上四组解。

第二节 三元一次不定方程

例 5： $2x-15y+11Z=33$

解： $2x-15y=M$ ……………………………………………… ①

用同例 2 的方法，容易得到①的解：

$$\left.\begin{aligned}x&=\frac{M}{1}\times 8+15t=8M+15t\\y&=\frac{M}{1}\times 1+2t=M+2t\end{aligned}\right\}②$$

以①代入原式：$M+11Z=33$

$$\therefore\begin{cases}M=33+11V\\-Z=0+V\Rightarrow Z=0-V\end{cases}$$

以 $M=33+11V$ 代入②

$$\therefore\begin{cases}x=8(33+11V)+15t=264+88V+15t\\y=33+11V+2t\\Z=0-V\end{cases}$$

$V,t=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots$

第三节 一元高次不定方程

例 6: $x^5-5x^3-34x-6=0$

解: 用和那综合除法,将方程各项系数进行横式计算,演解如下:

$1+0-5+0-34-6\ \boxed{3}$ ……… ①

$\underline{\quad 3+9+12+36+6}$ …………… ②

$1+3+4+12+\ \ 2\ \ 0$ …………… ③

先列出第①,然后用1,2,3…逐一计算试验,经计算用1,2,都不能使第①第②的末项相加为0,故用3计算,方法是先空出第②,将第①的首项"1"拖下来作为第③的首项,以$\boxed{3}\times 1=3$,将3记为第②的首项,将第①的次项"0"+第②的首项3=3记在第③的次项,如此不断计算,直至①②末项相加为0,这时,因第③出现都是正数,易知用同样方法不可能使末项相加为0了。

原方程 $\Rightarrow (x-3)(x^4+3x^3+4x^2+12x+2)=0$,

即$\begin{cases} x-3=0\Rightarrow x=3 \\ x^4+3x^3+4x^2+12x+2=0 \text{ 无解} \end{cases}$

故原方程唯一解:$x=3$

例 7: $2x^4-10x^3+15x^2-15x+18=0$

解: 仿例6的方法:

$2-10+15-15+18\ \boxed{2}$

$\underline{\quad +4-12+6-18\quad}$

$2-6+3-9\ \boxed{3}$

$\underline{\quad +6+0+9\quad}$

$2+0+3$

原方程 $\Rightarrow (x-2)(x-3)(2x^2+3)=0$

即$\begin{cases} x-2=0\Rightarrow x=2 \\ x-3=0\Rightarrow x=3 \\ 2x^2+3=0 \text{ 无解} \end{cases}$

故原式的解是 $x=2,3$.二个解。

第四节　多项式也可以用辗除横式解答

例 8： 有一个首项数为 $10x^4$ 的多项式，若除以 $5x+2$，余式为 $3x+32$，若除以 $2x+7$，则余式为 $x-6$，求这个多项式。

解： 设这个多项为 $f(x)$，依题意有：

$f(x)=(5x+2)A+3x+32$

$f(x)=(2x+7)B+x-6$

将上式整理移项：$(5x+2)A-(2x+7)B=-2x-38$

作以下辗除式

$5x+2 \overset{2}{\text{———}} 2x+7 \overset{5}{\text{———}} -31$

$2x+7 \overset{1}{\text{———}} -31 \overset{1}{\text{———}} 2x+38$

5 | $5\times1+1=6$

1 | 1

1

化成一列式：$5x+2 \overset{2}{\text{———}} 2x+7 \overset{6}{\text{———}} -2x-38$

得到 $A=2\times\dfrac{-2x-38}{-2x-38}+(2x+7)t=2+(2x+7)t$

$B=6\times\dfrac{-2x-38}{-2x-38}+(5x+2)t=6+(5x+2)t$

其中： t 是任意整数或任意多项式

$f(x)=(5x+2)[2+(2x+7)t]+3x+32$

或 $f(x)=(2x+7)[6+(5x+2)t]+x-6$

因原题要求这个多项式的首项数为 $10x^4$，从(A)中得知(A)的首项数必须是(A)中含有 x^2 才能符合原题要求，所以取 $t=x^2$，则

$f(x)=(5x+2)[2+(2x+7)x^2]+3x+32 \xlongequal{\text{整理得}} 10x^4+39x^3+14x^2+13x+36$ 或 $f(x)=(2x+7)[6+(5x+2)x^2]+x+-6 \xlongequal{\text{整理得}} 10x^4+39x^3+14x^2+13x+36$

第五节　二元二次不定方程

例 9：$2x^2-6xy+3y^2+13=0$ ……………………………… ①

解：这类方程的解法，都是把它化为 $u^2-by^2=m$ 来解答。

所以采用配方方法，以 $4a=4\times2=8$ 乘①的两边：$16x^2-48xy+24y^2+104=0\Rightarrow(4x-6y)^2-12y^2+104=0$

令 $u^2=(4x-6y)^2$ ……………………………… ②

可得 $u^2-12y^2=-104$ ……………………………… ③

因为 $(12,104)=4>1$，考虑先把③移项为 $u^2=-104+12y^2$，再转化为同余式 $u^2\equiv-104(\mathrm{mod}12)\Rightarrow u^2\equiv4(\mathrm{mod}12)$ 容易知道这是由 $u^2=-104+12\times9=4$ 计算出来，因此得到当 $y=3$ 时，$u=\pm2$，现在再按照解裴尔方程的方法。

（只写演解程序，详细情况留在以下第四章作专题解答）同余式：$u^2\equiv12(\mathrm{mod}104)$　　　由同余式有

$$\mathrm{I}=18\qquad h=3\qquad \eta=-1\qquad \frac{18^2-12}{-104}=-3$$

转为求方程 $u^2-12y^2=-3$ 的解

由 $\sqrt{12}$ 连分数表（见第四章）得到

③式的解是：$u+y\sqrt{12}=\pm(7+2\sqrt{12})^n(3+\sqrt{12})(18\pm\sqrt{12})/3$

整理得 $u+y\sqrt{12}=\pm(7+2\sqrt{12})^n(14\pm5\sqrt{12})$ 其中 $n=0,1,2,3,\cdots$

或 $u+y\sqrt{12}=\pm(7+2\sqrt{12})^n(22\pm7\sqrt{12})$

实际上 $(7+2\sqrt{12})(14\pm5\sqrt{12})=(22\pm7\sqrt{12})$

由以上的演解得到 $u=\pm2,\pm14,\pm22,\cdots$

再由 $u=4x-6y$（因为 u 是偶数）可得到 $\frac{u}{2}=2x-3y$，计算如表：

$u=3$ 时	
y	1 $\underline{3}$ 5 7…
$x=\frac{3y+1}{2}$	2 $\underline{5}$ 8 11…

$u=-2$ 时	
y	1 $\underline{3}$ 5 7…
$x=\frac{3y-1}{2}$	1 $\underline{4}$

$u=14$ 时	
y	1 3 $\underline{5}$ 7…
$x=\frac{3y+7}{2}$	5 8 $\underline{11}$ 14…

$u=-14$ 时	
y	1 3 $\underline{5}$ 7…
$x=\frac{3y-7}{2}$	−2 1 $\underline{4}$ 7…

$u=22$ 时	
y	1 3 5 $\underline{7}$…
$x=\frac{3y+11}{2}$	7 10 13 $\underline{16}$…

$u=-22$ 时	
y	1 3 5 $\underline{7}$…
$x=\frac{3y-11}{2}$	−4 −1 2 $\underline{5}$…

由此可知 y 是一切奇数，表中有‿记号者就是原方程的解。

表中有很多 x,y 不是原方程的解，因为那些解是②式的解，②有无限多个解，而原方程①就不具有这个条件，它只是由②的解导出来的。

例 10： $x^2+y^2=317$

解： 因为 317 是形如 $4m+1$ 的奇素数，即 $317=4\times79+1$，故方程有解，（见王杰官老师的<数论基础>p193）

先分析：$[\sqrt{317}]=17$，$[\frac{317}{2}]=158$，$[\sqrt{158}]=12$，

故知方程左边：$12<$ 大数 $\leqslant17$。

平方数的末位数字是：0，1，4，5，6，9 之一，317 的末位数数字是 7，则方程中左边两数的末位数之和是 7，而 $7=0+7=1+6=2+5=3+4$，$8+9=17$，其中只有 7=1+6 符合两数都是平方数的末位数的要求，故这两位数只在 1，11，9，4，14，16 中取舍，但大数只有 14，16 可以和小数搭对，试验：

$317-16^2=317-356=61$；61 不是平方数，

$317-14^2=317-196=121$，11^2，

故原方程 $x^2+y^2=317$ 的解是：

$\begin{cases}x=14\\y=11\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=11\\y=14\end{cases}$

由以上讨论，可知任意整数 a，都可以依照以下的演算并查表得出这类方程的解。

(1)先将 a 和 $\frac{1}{2}a$ 进行开方得到 $\sqrt{\frac{a}{2}}<$ 大数 $\leqslant\sqrt{a}$,

(2)查表选出大数范围并进行验证。

(3)若验证都不符合,则方程无解。

(每对的 x 和 y 可以互相交换)

a 的末位数字	1	2	3	4	5	6
末位数的平方数	1+0 5+6	1+1 6+6	4+9	0+4 5+9	0+5 1+4 6+9	0+6 1+5
x^2 和 y^2 的末位数	1^2+0^2 9^2+0^2 5^2+6^2 5^2+4^2	1^2+1^2 9^2+9^2 9^2+1^2 6^2+6^2 6^2+4^2	2^2+3^2 2^2+7^2 8^2+3^2 8^2+7^2	0^2+2^2 0^2+8^2 5^2+3^2 5^2+7^2	0^2+5^2 4^2+3^2 1^2+2^2 4^2+7^2 1^2+8^2 6^2+3^2 9^2+6^2 6^2+7^2 9^2+8^2	0^2+6^2 0^2+4^2 1^2+5^2 9^2+5^2

a 的末位数字	7	8	9	0	
末位数的平方数	1+6	4+4 9+9	0+9 4+5	0+0 4+6 1+9 5+5	
x^2 和 y^2 的末位数	1^2+4^2 1^2+6^2 9^2+4^2 9^2+6^2	2^2+2^2 2^2+8^2 3^2+3^2 3^2+7^2	2^2+5^2 8^2+5^2 0^2+3^2 0^2+7^2	0^2+0^2 2^2+4^2 8^2+4^2 1^2+3^2 9^2+3^2 8^2+6^2 1^2+7^2 9^2+7^2 5^2+5^2 2^2+6^2	

例: $x^2+y^2=698$

解: $[\sqrt{698}]=26$, $\left[\sqrt{\frac{698}{2}}\right]=18$　　$18<$ 大数 $\leqslant 26$,

在末数为 8 的"x^2 和 y^2 的末位数"栏 4 对数中,对照 $18<$ 大数 $\leqslant 26$ 的范围,符合验证的大数只有 22^2 和 23^2 两个,验证如下:

$698-22^2=214$ 不是平方数,舍去

$698-23^2=169=13^2$

$\therefore$ 方程的解是: $x=23, y=13$ 或交换值。

第六节 形如 $x^n = y^2 \pm Z^2$ 的不定方程

方程中的 n 是任意给定的正整数，将它分为奇数或偶数去解答。先引用杨辉三角 $(a+b)^n$，n 次方展开求各项系数，再导出方程解的表示式，这些表示式已经在拙作《不》中详细讨论，这里就不再重复了，但为了便于读者的演习，仍在例题解答的前面写出。

另方面要提出的是，方程各项的系数，依靠杨辉三角来计算，比较费时，因为若 n 很大时，(或不备有二项系数表)要从 1，2，3，…n，逐一堆磊计算费时较多，经过研究，我将它简化为一个公式(表)，就可以直接比较快地把所要求的 n 次展开的各项系数计算出来：

$(x \pm y)^n$ 展开各项系数计算表

项序	1	2	3	4	5	…			
A			$n-1$	$n-2$	$n-3$	…	2	1	
B	1	n					n	1	
C		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	…	$\frac{1}{n}$		

表中，B 就是方程各项的系数，计算方法：$B_1 = 1$，$B_2 = n$，$B_3 = A_3B_2C_2$，

$$B_4 = A_4B_3C_3, \cdots$$

例如$(x+y)^{11}$ 展开各项系数计算表

项序	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11		
A			$11-1=10$	9	8	7	6	5	4	3	2	1	
B	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
C		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$		

例 11： $x^5 = y^2 + Z^2$

解： 先求$(y+Z)^5$ 展开各项系数

项序	1	2	3	4	5	6	
A			$5-1=4$	3	2	1	
B	1	5	10	10	5	1	
C		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$		