概率与统计

新编中学数学解题方法1000招丛书

高中版 16

刘培杰数学工作室 编

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高中版 16

新编中学数学解题方法1000招丛书

概率与统计

刘培杰数学工作室 编

连篇的算术练习和重复的“实际生活”问题比没有价值更糟糕，它们阻碍了学习的进程。我们以为，直到最近还在小学中讲授的那种算术，在智力内容上就是如此贫乏的，而常见的对该学科的反感并不是对于困难问见的完全合

idge Report

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书以专题的形式对高中数学中概率与统计的重点、难点进行了归纳与总结，涵盖面广，内容丰富，可使学生深入理解概率与统计的概念，灵活使用解题方法，可较大程度地提高学生在各类考试中的应试能力.

本书适合高中学生、教师以及数学爱好者阅读参考.

图书在版编目(CIP)数据

新编中学数学解题方法1000招丛书. 概率与统计/刘培杰数学工作室编. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2014.1

ISBN 978-7-5603-4467-6

Ⅰ.①新… Ⅱ.①刘… Ⅲ.①中学数学课-高中-题解 Ⅳ.①G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第291519号

策划编辑 刘培杰 张永芹
责任编辑 张永芹 钱辰琛
封面设计 孙茵艾
出版发行 哈尔滨工业大学出版社
社　　址 哈尔滨市南岗区复华四道街10号 邮编150006
传　　真 0451－86414749
网　　址 http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷 哈尔滨市石桥印务有限公司
开　　本 787mm×1092mm 1/16 印张8.75 字数226千字
版　　次 2014年1月第1版 2014年1月第1次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5603-4467-6
定　　价 28.00元

总序

俗话说:"自古华山一条路",如果将学数学比作爬山,那么精通之道也只有一条,那就是做题,做大量的习题.

华罗庚曾将光看书不做习题比作"入宝山而空返".

著名数学家苏步青教授读书时为学好微积分,光是不定积分题就做了近万道.近年来,参加国际中学生数学奥林匹克的中国选手们,则更是因为遍解难题,才得以屡获金牌.正所谓"踏遍坎坷成大路".

然而解数学题却不是一件容易的事,世界级解题专家、美国数学教育家波利亚曾不无悲观地说:"解题同钓鱼术一样永远不会学会".但解题作为一项有规则的活动还是有一些方法可学的,至少是可模仿的.华侨大学的王志雄教授曾说出这样的体会:"相对于问题似欲爆炸,题型不断更新,方法是较少也较稳定,如能较深入地、熟练地、灵活地掌握一些重要的解题方法,将使我们如乘快艇,得以优游于题海之上,达到数学王国的彼岸."

近年来,由《美国数学月刊》前主编、美籍加拿大老数学家哈尔莫斯(Paul Richard Halmos)一句"问题是数学的心脏"的惊人之语,将解题运动推向高潮.1987年在上海举行的国际数学教育研讨会上,美国南伊利诺伊大学的J·P·贝克(Baker)教授在他的以《解题教学——美国当前数学教学的新动向》为题的报告论文中指出:"如果说确有一股贯穿20世纪80年代初期的潮流的话,那就是强调解题(Problem Solving)的潮流".

为了配合这股潮流，世界各国大量出版有关数学问题与解题的丛书，真是汗牛充栋，精品纷现．光是著名的斯普林格出版社(Springer Verlug)从 1981 年开始出版的一套高水平的《数学问题丛书》至今就已出版了 20 多种．我国教育界及出版界十分重视这类书的出版工作，早在 1949 年 2 月，旧中国教育部曾举行会议为补救当时数学教育质量低下提出了四点建议，其中一条是提倡学生自己动手解题并“希望各大书局大量编印中学解题参考用书”．近些年我国各大出版社出版了一些中学数学教育方面的丛书，如江苏教育出版社的《数学方法论丛书》(13 册)，北京大学出版社的《数学奥林匹克》系列及翻译的美国的《新数学丛书》，湖南教育出版社的《走向数学丛书》，但直至今天似乎还没有迹象表明要推出一套大型解题方法丛书．

哈尔滨工业大学出版社作为一“边陲小社”，出版这样一套丛书，尽管深感力所不逮，但总可算作一块引玉之砖．

最后编者有两点忠告：一是本丛书是一套入门书，不能包解百题，本丛书在编写之初曾以“贪大求全”为原则，试图穷尽一切方法，妄称“解题精技，悉数其间”．然而这实在是不可能的，也是不必要的．正所谓“有法法有尽，无法法无穷”．况且即使是已有的方法也不能生搬硬套．我国继徐光启和李善兰之后的清末第三大数学家华衡芳(1835—1902)曾指出：解题要随机应变，不能“执一而论”，死记硬背为“呆法”，“题目一变即无所用之矣”，须“兼综各法”以解之，方可有效．数学家惠特霍斯(Whitworth)说过“一般的解题之成功，在很大的程度上依赖于选择一种最适宜的方法”．

二是读者读本丛书一定要亲自动手解题．正如陕西师大罗增儒教授所指出：解题具有探索性与实战性的特征，解题策略要在解题中掌握．

最后，我们送给读者一句德国著名数学家普林斯海姆(1850—1941，Alfred Pringsheim)的名言：“不下苦功是不能获得数学知识的，而下苦功却是每个人自己的事，数学教学方法的逻辑严格性并不能在较大程度上去增强一个人的努力程度．”

愿读完本丛书后，解题对你不再是难事．

刘培杰

2013 年 12 月 15 日

于哈工大

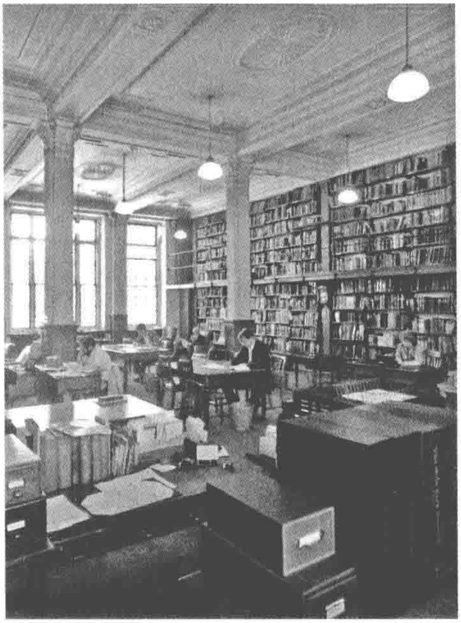
⊙ 目 录

第一编　解题方法编

第二编　试题精粹编

第一编

解题方法编



怎样赏析高考中的概率问题

1. 以四种典型概率的计算为核心，考查基础知识.

四种典型概率的计算(即等可能性事件的概率、互斥事件有一个发生的概率、相互独立事件同时发生的概率、事件 A 在 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率)是高考考查概率问题的重点. 解决这类问题，关键是根据概率的基本概念，分清问题的类型，再选择相应的概率公式进行计算.

例 1　在正方体上任选 3 个顶点连成三角形，则所得的三角形是直角非等腰三角形的概率为(　　).

(A) $\frac{1}{7}$　　(B) $\frac{2}{7}$　　(C) $\frac{3}{7}$　　(D) $\frac{4}{7}$

解　这是一个等可能事件的概率. 在正方体上任选 3 个顶点连成三角形可得 C_8^3 个三角形. 每个顶点上可得到 3 个直角非等腰三角形(即正方体的一边与过此点的一条面对角线)，共有 24 个. 根据等可能事件的概率公式，所求概率为 $P=\frac{24}{C_8^3}=\frac{3}{7}$，所以选(C).

注　求解等可能事件的概率，一般思维方法是：先分析随机试验的结果是否有限；若有限，再分析试验的每一个结果(即每一个基本事件)是否为等可能的；若是，则算出试验中所有可能出现的结果数 n 及事件 A 包含的结果数 m，进而算出 $P(A)=\frac{m}{n}$.

例 2　在一个口袋中装有 5 个白球和 3 个黑球，这些球除颜色外完全相同. 从中摸出 3 个球，至少摸到 2 个黑球的概率等于(　　).

(A) $\frac{2}{7}$　　(B) $\frac{3}{8}$　　(C) $\frac{3}{7}$　　(D) $\frac{9}{28}$

解　记至少摸到 2 个黑球为事件 A，恰好摸到 2 个黑球为事件 B，恰好摸到 3 个黑球为事件 C，则 B 和 C 是互斥事件，且 $A=B+C$，$P(B)=\frac{C_3^2C_5^1}{C_8^3}=\frac{15}{56}$，$P(C)=\frac{C_3^3}{C_8^3}=\frac{1}{56}$. 由互斥事件有一个发生的概率公式，得 $P(A)=P(B)+P(C)=\frac{15}{56}+\frac{1}{56}=\frac{2}{7}$，所以选(A).

注　互斥事件有一个发生的概率计算问题，常常是一个复合事件的求解问题. 一般思维方法是：先分析所述事件能否分解为彼此互斥的一些简单事件的和，如果能的话，可以先求出这些简单事件的概率，然后再利用概率的加法公式得出所求事件的概率.

例 3　接种某疫苗后，出现发热反应的概率为 0.80. 现有 5 人接种该疫苗，至少有 3 人出现发热反应的概率为________. (精确到 0.01)

解　5 人中的每个人发生发热反应是相互独立的，根据事件 A 在 n 次独立重复试验中恰好发生 k 次的概率公式，5 人接种该疫苗，至少有 3 人出现发热反应的概率为 $C_5^3\times0.80^3\times0.20^2+C_5^4\times0.80^4\times0.20+C_5^5\times0.80^5=0.94$，所以填0.94.

注 独立重复试验的概率问题在高考中一般不单独设题，它常与互斥事件中有一个发生的概率和相互独立事件同时发生的概率综合起来进行考查. 求解此类问题的关键是将问题情景转化为独立重复试验的概率模型，即确定出 n,k,p，再运用公式计算.

2. 以概率的有关问题为载体，考查数学思想方法.

在概率问题中，蕴涵着丰富的数学思想方法，例如，等价转化的思想，分类讨论的思想，数形结合的思想，正难则反的思想，等等. 以概率的问题为载体，考查学生运用数学思想方法分析问题、解决问题的能力，已成为高考对概率知识进行考查的一大特色，在各地的高考试题中屡见不鲜.

例 4 从 0～9 这 10 个数字中任取 3 个数字组成一个没有重复数字的三位数，这个数不能被 3 整除的概率为（　　）.

(A) $\frac{41}{60}$　　(B) $\frac{35}{54}$　　(C) $\frac{38}{54}$　　(D) $\frac{19}{54}$

解 直接计算事件 A 即“这个数不能被 3 整除”的概率比较麻烦，不妨从问题的反面入手，考虑其对立事件 $\overline{A}$:“这个数能被 3 整除”的概率，有

$$P(\overline{A})=\frac{30\times 3\times 2\times 1+12\times 2\times 2\times 1}{9\times 9\times 8}=\frac{19}{54}$$

故得

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{19}{54}=\frac{35}{54}$$

所以选(B).

注 当一个问题从正面入手难以求解的时候，往往可以改从问题的反面入手，间接求解，这就是正难则反的数学思想方法. 反映在概率问题中，常通过对立事件的概率公式 $P(A)=1-P(\overline{A})$ 来体现. 对于具有“至少有一个发生”等形式的概率问题，我们也可以运用这一思想方法来简化解题.

例 5 将 7 个人（含甲、乙）分成三个组，一组 3 人，另两组分别 2 人，不同的分组数为 a，甲、乙分到同一组的概率为 P，则 a,P 的值分别为（　　）.

(A) $a=105,P=\frac{5}{21}$　　(B) $a=105,P=\frac{4}{21}$

(C) $a=210,P=\frac{5}{21}$　　(D) $a=210,P=\frac{4}{21}$

解 有

$$a=\frac{C_7^3C_4^2C_2^2}{2!}=105$$

甲、乙分到同一组的方法种数有：

(1) 若甲、乙分在 3 人组，有 $\frac{C_5^1C_4^2C_2^2}{2!}=15$ 种；

(2) 若甲、乙分在 2 人组，有 $C_5^3=10$ 种.

由此，可得 $P=\frac{25}{105}=\frac{5}{21}$，所以选(A).

注 本题在计算甲、乙分到同一组的方法种数时，运用了分类讨论的思想，将其分为“甲、乙分在 3 人组”和“甲、乙分在 2 人组”两种情况，达到了分而治之，各个击破的目的. 事

实上，这也是一种转化，体现了等价转化思想的运用.

3. 在知识的交汇点处设计命题，考查学生综合运用概率的有关知识解决问题的能力.

将不同类型的概率问题与函数、不等式以及统计初步等其他数学知识交汇在一起，命制与概率有关的综合问题，考查学生综合运用概率的有关知识分析问题和解决问题的能力，体现了高考数学在知识网络的交汇点设计命题的特点. 这类试题中的事件，大多是复合事件，在认真审题的基础上，学会对复合事件进行分解，将其转化为简单事件来处理，是实现解题的关键.

例 6　某公司招聘员工，指定三门考试课程，有两种考试方案.

方案一：考三门课程，至少有两门及格为考试通过；

方案二：在三门课程中，随机选取两门，这两门都及格为考试通过.

假设某应聘者对三门指定课程考试及格的概率分别是 a,b,c，且三门课程考试是否及格相互之间没有影响.

(1) 分别求该应聘者用方案一和方案二时考试通过的概率；

(2) 试比较该应聘者在上述两种方案下考试通过的概率的大小.(说明理由)

解　记应聘者对三门指定课程考试及格的事件分别为 A,B,C，则 $P(A)=a,P(B)=b,P(C)=c$.

(1) 应聘者用方案一考试通过的概率

$$\begin{aligned}P_1 &= P(A\cdot B\cdot \overline{C})+P(\overline{A}\cdot B\cdot C)+P(A\cdot \overline{B}\cdot C)+P(A\cdot B\cdot C)=\\ &ab(1-c)+a(1-b)c+(1-a)bc+abc=\\ &ab+bc+ca-2abc\end{aligned}$$

应聘者用方案二考试通过的概率

$$P_2=\frac{1}{3}P(A\cdot B)+\frac{1}{3}P(B\cdot C)+\frac{1}{3}P(A\cdot C)=\frac{1}{3}(ab+bc+ac)$$

(2) 因为

$$\begin{aligned}P_1-P_2 &= (ab+bc+ca-2abc)-\frac{1}{3}(ab+bc+ca)=\\ &\frac{2}{3}(ab+bc+ca-3abc)\geqslant\frac{2}{3}[3\sqrt[3]{(abc)^2}-3abc]=\\ &2\sqrt[3]{(abc)^2}(1-\sqrt[3]{abc})\geqslant 0\end{aligned}$$

当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等号，所以 $P_1\geqslant P_2$（当且仅当 $a=b=c=1$ 时取等号）.

注　第(1)问是相互独立事件、互斥事件和对应事件的概率的综合运用，第(2)问则将概率与大小比较以及基本不等式的应用联系起来，这样设计，既考查了学生灵活运用知识、综合解决问题的能力，同时，也是对学生的理性思维和创新意识的一个综合考查，耐人寻味.

4. 联系生活实际，紧跟时代脉搏，考查学生的应用意识和阅读、理解、迁移的能力.

通过对基础知识的重新组合、拓展，命制立意高、情境新、设问巧，并充满时代气息、贴近学生生活的实际问题，体现概率理论的广泛应用性. 解决这类问题，必须具备一定的阅读理解能力、信息迁移能力和数学建模的能力.

例 7　图 1 中有 1 个信号源和 5 个接收器. 接收器与信号源在同一个串联线路中时，就

能接收到信号,否则就不能接收到信号.若将图中左端的6个接线点随机地平均分成三组,将右端的6个接线点也随机地平均分成三组,再把所有六组中每组的2个接线点用导线连接,则这5个接收器能同时接收到信号的概率是(　　).

(A) $\frac{4}{45}$　　(B) $\frac{1}{36}$　　(C) $\frac{4}{15}$　　(D) $\frac{8}{15}$

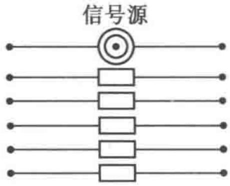


图1

解　由题意,左端的6个接线点随机地平均分成三组有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$种分法,同理右端的6个接线点也随机地平均分成三组有$\frac{C_6^2C_4^2C_2^2}{A_3^3}=15$种分法.要使5个接收器能同时接收到信号,则需5个接收器与信号源串联在同一个线路中,即5个接收器的一个全排列,再将排列后的第一个元素与信号源左端连接,最后一个元素与信号源右端连接,所以符合条件的连接方式共有$A_5^5=120$种,所求的概率是$\frac{120}{225}=\frac{8}{15}$,故选(D).

注　本题将概率的计算、排列组合的知识、物理学中的串联电路以及生活实际有机地联系在一起,充满了时代气息,解决这个问题的关键是要能够在认真阅读、正确理解题意的基础上,构造出等可能性事件的概率模型,将问题转化为排列、组合中平均分组的具体计数和利用等可能事件的概率公式进行计算的问题,对学生的阅读理解能力、信息迁移能力和数学建模能力等都提出了较高的要求.

(高源　钱军先)

怎样解交汇型概率试题

一、与函数交汇

将离散型随机变量和函数问题融合在数学问题之中，使随机变量的取值规律建立在函数知识的基础上，进而利用函数的性质及思想方法分析解决是这类问题的主要特征.

例1　某城市有甲、乙、丙3个旅游景点，一位客人游览这3个景点的概率分别是0.4，0.5，0.6，且客人是否游览哪个景点互不影响，设ξ表示客人离开该城市时游览的景点数与没游览的景点数之差的绝对值.

(1) 求ξ的分布及数学期望；

(2) 记"函数$f(x)=x^2-3\xi x+1$在区间$[2,+\infty)$上单调递增"为事件A，求事件A的概率.

解　(1) 分别记"客人游览甲景点""客人游览乙景点""客人游览丙景点"为事件A_1，A_2，A_3. 由已知A_1，A_2，A_3相互独立，且$P(A_1)=0.4$，$P(A_2)=0.5$，$P(A_3)=0.6$，客人游览的景点数的可能取值为0，1，2，3；相应地，客人没有游览的景点数的可能取值为3，2，1，0，所以ξ的可能取值为1，3，故

$$P(\xi=3)=P(A_1\cdot A_2\cdot A_3)+P(\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3)=$$
$$P(A_1)\cdot P(A_2)\cdot P(A_3)+P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot P(\overline{A}_3)=$$
$$2\times0.4\times0.5\times0.6=0.24$$
$$P(\xi=1)=1-0.24=0.76$$

所以ξ的分布列为

ξ	1	3
P	0.76	0.24

故
$$E\xi=1\times0.76+3\times0.24=1.48$$

(2) 因为$f(x)=(x-\frac{3}{2}\xi)^2+1-\frac{9}{4}\xi^2$，所以函数$f(x)=x^2-3\xi x+1$在区间$[\frac{3}{2}\xi,+\infty)$上单调递增. 要使$f(x)$在$[2,+\infty)$上单调递增，当且仅当$\frac{3}{2}\xi\leqslant2$，即$\xi\leqslant\frac{4}{3}$. 从而$P(A)=P(\xi\leqslant\frac{4}{3})=P(\xi=1)=0.76$.

二、与方程、不等式交汇

将随机变量的变化规律渗透到方程、不等式中，通过对方程、不等式的求解，揭示变量中蕴涵的某种关系，从而明确随机变量的概率分布，使问题得以解决.

例2　(2005年全国高考题) 设甲、乙、丙三台机器是否需要照顾相互之间没有影响. 已知在某一小时内，甲、乙都需要照顾的概率为0.05，甲、丙都需要照顾的概率为0.1，乙、丙都

需要照顾的概率为0.125. 问甲、乙、丙每台机器在这个小时内需要照顾的概率分别为多少?

解 记甲、乙、丙三台机器在一小时内需要照顾的事件为A,B,C. 由题设,事件A,B,C是相互独立事件,由题意得方程组

$$\begin{cases}P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)=0.05\\P(A\cdot C)=P(A)\cdot P(C)=0.1\\P(B\cdot C)=P(B)\cdot P(C)=0.125\end{cases}$$

解得$P(A)=0.2,P(B)=0.25,P(C)=0.5$.

注 与常见的概率题不同,本题给出了复合事件的概率,要求单一事件的概率,所以需通过列方程和解方程求解.

例3 某商店采用凡一次购物在$[50,100]$元者均可参加"购物摸球中奖"的促销活动,摸球袋中装有10个号码为$n(1\leqslant n\leqslant 10,n\in\mathbf{N}^*)$的球,球的质量为$f(n)=n^2-9n+21(\mathrm{g})$,摸奖方案如表1所示.

表1

方案	摸奖办法	奖金/元
一	摸球1个,若球的质量小于该球的号码数,则中奖	10
二	摸球2个,若2球的质量相等,则中奖	40

(1) 试比较两种方案的中奖概率的大小;

(2) 若甲、乙两人分别购物80元和85元,设两人中奖次数的和为ξ,求$E\xi$.

(说明:每个球以等可能性(不受质量的影响)从袋中摸出;假定符合条件的顾客均参加摸奖)

解 当球的质量小于号码数时,有$n^2-9n+21<n$,解得$3<n<7$,即$n=4,5,6$,则所求概率$P_1=\dfrac{3}{10}$.

设第n号与第m号两个球的质量相等,不妨设$n<m$,则有

$$n^2-9n+21=m^2-9m+21$$

即

$$(n-m)(m+n-9)=0\Leftrightarrow n+m=9$$

得(n,m)取值为$(1,8),(2,7),(3,6),(4,5)$. 所求概率为

$$P_2=\frac{4}{C_{10}^2}=\frac{4}{45}$$

所以$P_1>P_2$,即方案一的中奖概率大.

(2)ξ的取值为0,1,2,则$\xi\sim B(2,\dfrac{3}{10})$,所以$E\xi=np=0.6$.

例4 (2005年江西高考题)A,B两位同学各有五张卡片,现以投掷均匀硬币的形式进行游戏,当出现正面朝上时A赢得B一张卡片,否则B赢得A一张卡片. 规定掷硬币的次数达9次时,或在此前某人已赢得所有卡片时游戏终止. 设ξ表示游戏终止时掷硬币的次数.

(1) 求ξ的取值范围;

(2) 求 ξ 的数学期望 $E\xi$.

解 (1) 设正面出现的次数为 m,反面出现的次数为 n,则

$$\begin{cases}|m-n|=5\\ m+n=\xi\\ 1\leqslant\xi\leqslant 9\end{cases}$$

所以当 $m=5,n=0$ 或 $m=0,n=5$ 时,$\xi=5$;当 $m=6,n=1$ 或 $m=1,n=6$ 时,$\xi=7$;当 $m=7,n=2$ 或 $m=2,n=7$ 时,$\xi=9$.

所以 ξ 的所有可能取值为 5,7,9.

(2) 有

$$P(\xi=5)=2\times(\frac{1}{2})^5=\frac{2}{32}=\frac{1}{16}$$

$$P(\xi=7)=2C_5^1(\frac{1}{2})^7=\frac{5}{64}$$

$$P(\xi=9)=1-\frac{1}{16}-\frac{5}{64}=\frac{55}{64}$$

所以
$$E\xi=5\times\frac{1}{16}+7\times\frac{5}{64}+9\times\frac{55}{64}=\frac{275}{32}$$

注 从方程的角度来处理随机变量的取值问题避免了复杂的思维过程.

例 5 (2006 年合肥市高考模拟题)一个篮球运动员投篮一次得 3 分的概率为 a,得 2 分的概率为 b,不得分的概率为 $c(a,b,c\in(0,1))$,已知他投篮一次得分的数学期望为 2,则 $\frac{2}{a}+\frac{1}{3b}$ 的最小值为( ).

(A) $\frac{32}{3}$ (B) $\frac{28}{3}$ (C) $\frac{14}{3}$ (D) $\frac{16}{3}$

解 由已知得 $3a+2b+0\times c=2$,即 $3a+2b=2$,其中 $0<a<\frac{2}{3}$,$0<b<1$.

$$\frac{2}{a}+\frac{1}{3b}=\frac{3a+2b}{2}\cdot(\frac{2}{a}+\frac{1}{3b})=3+\frac{1}{3}+\frac{2b}{a}+\frac{a}{2b}\geqslant$$

$$\frac{10}{3}+2\sqrt{\frac{2b}{a}\cdot\frac{a}{2b}}=\frac{16}{3}$$

当且仅当 $a=2b=\frac{1}{2}$ 时取等号,即 $\frac{2}{a}+\frac{1}{3b}$ 的最小值为 $\frac{16}{3}$,故选(D).

三、与数列交汇

例 6 如图 1,$\frac{n(n+1)}{2}$ 个不同的数随机排成一个三角数阵,设 M_k 是从上往下数第 k 行中的最大数,求 $M_1<M_2<\cdots<M_n$ 的概率.

解 设所求概率为 P_n,则 $M_1<M_2<\cdots<M_{n-1}$,而最大数在第 n 行的概率为 $\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}=\frac{2}{n+1}$,于是 $P_n=\frac{2}{n+1}P_{n-1}$. 则有递推关系 $P_1=1$ 且 $P_n=\frac{2}{n+1}P_{n-1}(n\geqslant 2)$,

故

$$P_n=\frac{2}{n+1}\cdot\frac{2}{n}\cdot\frac{2}{n-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2^n}{(n+1)!}$$

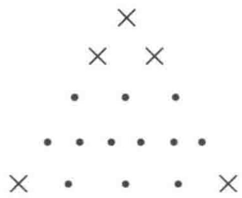


图 1

例 7 抛一枚均匀硬币,正面或反面出现的概率都是$\frac{1}{2}$,反复这样的投掷.数列$\{a_n\}$定义如下:$a_n=\begin{cases}1,\text{第 } n \text{ 次投掷出现正面}\\-1,\text{第 } n \text{ 次投掷出现反面}\end{cases}$.设$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n(n\in\mathbf{N}^*)$,试求$S_2\neq 0$,且$S_8=2$的概率.

解 当$S_2\neq 0$,即$a_1=a_2=1,S_2=2$,或$a_1=a_2=-1,S_2=-2$,分类讨论.

当$S_2=2$时,$S_8-S_2=0$,即从第3次开始的6次中,正面出现3次,反面出现3次,因此这种情况共有C_6^3种;当$S_2=-2$时,$S_8-S_2=4$,即从第3次开始的6次中,正面出现5次,反面出现1次,因此这种情况共有C_6^5种,而任意投掷一枚硬币,有两种可能,反复投8次,共有2^8种可能,故概率为$\frac{C_6^5+C_6^3}{2^8}=\frac{13}{128}$.

注 概率与数列的结合,对于培养学生对高中数学不同分支重要基础知识联系的深层次的理解是极为重要的.

例 8 (2005年广东高考题)箱中装有大小相同的黄、白两种颜色的乒乓球,黄、白乒乓球的数量比为$s:t$.现从箱中每次任意取出一个球,若取出的是黄球则结束,若取出的是白球,则将其放回箱中,并继续从箱中任意取出一个球,但取球的次数最多不超过n次.以ξ表示取球结束时已取到白球的次数.

(1) 求ξ的分布列;

(2) 求ξ的数学期望.

解 (1)ξ的可能取值为$0,1,2,\cdots,n$($\xi=n$表示n次取出的全是白球),如果A_i表示第i次取出的球是白球的事件,依题意有

$$P(A_i)=\frac{t}{s+t}$$

则

$$P(\overline{A}_i)=1-\frac{t}{s+t}=\frac{s}{s+t},i=1,2,\cdots,n$$

$$P(\xi=k)=P(A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1})=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_k)P(\overline{A}_{k+1})=$$

$$\frac{t}{(s+t)^k}\frac{s}{s+t}$$

$$P(\xi=n)=P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)=(\frac{t}{s+t})^n$$

故 ξ 的分布列为

ξ	0	1	2	$\cdots$	$n-1$	n
P	$\frac{s}{s+t}$	$\frac{st}{(s+t)^2}$	$\frac{st^2}{(s+t)^3}$	$\cdots$	$\frac{st^{n-1}}{(s+t)^n}$	$\frac{t^n}{(s+t)^n}$

(2) 有

$$E\xi=0\cdot\frac{s}{s+t}+1\cdot\frac{st}{(s+t)^2}+2\cdot\frac{st^2}{(s+t)^3}+\cdots+$$
$$(n-1)\cdot\frac{st^{n-1}}{(s+t)^n}+n\cdot\frac{t^n}{(s+t)^n}$$

$$\frac{t}{s+t}E\xi=0\cdot\frac{st}{(s+t)^2}+1\cdot\frac{st^2}{(s+t)^3}+\cdots+(n-2)\cdot\frac{st^{n-1}}{(s+t)^n}+$$
$$(n-1)\cdot\frac{st^n}{(s+t)^{n+1}}+n\cdot\frac{t^{n+1}}{(s+t)^{n+1}}$$

两式相减,得

$$\frac{s}{s+t}E\xi=\frac{st}{(s+t)^2}+\frac{st^2}{(s+t)^3}+\cdots+\frac{st^{n-1}}{(s+t)^n}+n\cdot\frac{t^n}{(s+t)^n}-$$
$$(n-1)\cdot\frac{st^n}{(s+t)^{n+1}}-n\cdot\frac{t^{n+1}}{(s+t)^{n+1}}=$$
$$\frac{\frac{st}{(s+t)^2}[1-(\frac{t}{s+t})^{n-1}]}{1-\frac{t}{s+t}}+n\cdot\frac{t^n}{(s+t)^n}-$$
$$(n-1)\cdot\frac{st^n}{(s+t)^{n+1}}-n\cdot\frac{t^{n+1}}{(s+t)^{n+1}}=$$
$$\frac{t}{s+t}+(n-1)\cdot\frac{t^n}{(s+t)^n}-$$
$$(n-1)\cdot\frac{st^n}{(s+t)^{n+1}}-n\cdot\frac{t^{n+1}}{(s+t)^{n+1}}=$$
$$\frac{t}{s+t}-\frac{t^{n+1}}{(s+t)^{n+1}}=\frac{t}{s+t}[1-\frac{t^n}{(s+t)^n}]$$

所以

$$E\xi=\frac{t}{s}[1-\frac{t^n}{(s+t)^n}]$$

四、与线性规划交汇

例 9　两个人约定 7 点到 8 点在某地会面,先到者等候后到者 20 min,过时就离去,试求这两人能会面的概率.

解　以 x,y 分别代表两人到达会面地点的时刻,则两人能会面的充要条件为

$$|x-y|\leqslant 20,x,y\in[0,60]$$