应用数学与計算数学学報

COMMUNICATION ON APPLIED MATHEMATICS AND COMPUTATION

Vol. 1　　第一期 No. 1

1987

《应用数学与计算数学学报》编委会编辑　　上海科学技术出版社出版

《应用数学与计算数学学报》编辑委员会

（以姓氏笔划为序）

名誉主编	谷超豪
主　　编	郭本瑜
副 主 编	郑　权　俞文魮　屠规彰
编　　委	王兴华　王宗皓　王则柯　王德人　叶其孝
	冯果忱　史树中　石钟慈　朱幼兰　刘宝平
	刘彦佩　刘垂玗　祁力群　李大潜　李训经
	吴立德　张关泉　张连生　张建中　张恭庆
	陈兰荪　苏煜城　应隆安　周天孝　郑伟安
	武际可　林　群　郝柏林　高　智　徐国荣
	徐福生　唐仲华　游兆永　黄明游　戴世强
编 辑 部	王翼飞（主任）朱国勇（副主任）
	张鼎淼　韩伯顺　徐华吕

应用数学与计算数学学报

一九八七年一月　　　　第一卷　第一期

编　辑	《应用数学与计算数学学报》编委会 （编辑部设在上海科技大学数学系）
出　版	上 海 科 学 技 术 出 版 社 （上 海 瑞 金 二 路 450 号）
印　刷	常 熟 周 行 联 营 印 刷 厂
发　行	新 华 书 店 上 海 发 行 所

上海市报刊登记证第 399 号　　　　定价 1.30 元

应用数学与计算数学学报

（半 年 刊）

第 1 卷　第 1 期

目　　录

研　究　简　报

将应用数学与计算数学联在一起出刊物，
不但符合现代数学这门科学的发展规律，
还适应数学在现代化建设中所遇到的要
求。祝愿本学报前途光辉灿烂！
《应用数学与计算数学学报》
创刊誌慶

蘇步青題賀

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

第1卷 第1期 应用数学与计算数学学报 Vol. 1 No. 1
1987年1月 COMM. ON APPL. MATH. AND COMPUT. Jan., 1987

让数学更好地为四化建设服务

——发 刊 词

谷 超 豪

近二三十年来,数学在各门科学和技术中的应用越来越广泛,越来越深入. 在那些运用数学有悠久历史的领域(如力学、天文学、物理学)中,它的作用在继续加强. 与此同时,数学通过这些学科,在工程技术中发挥着更为重要的作用. 诸如医疗诊断仪器的设计,地下矿藏的勘探,机器外形的设计等等,都直接地把数学作为重要的工具. 现代新技术和高精尖技术更离不开数学. 另一方面,许多过去与数学关系不大的科学领域,现在也大量运用数学的理论和方法了. 这不仅是指化学、生命科学、地球科学等自然科学,而且也包括多门社会科学. 经济学就是一个突出的例子, 从1969年以来, 有半数的诺贝尔经济学奖是授予和数学有密切关系的工作的. 这些科学由于运用了数学的理论和方法而日新月异. 正如马克思所预言的那样,各门科学由于运用了数学而变得成熟起来了.

数学的对象是抽象的. 它所研究的并不是个别的、具体的自然现象或社会现象,而是经过抽象的思想事物. 因而,各门科学要运用数学作为工具,就得建立起所研究的对象及其运动(或平衡)规律的数学模型,从而才能利用数学的理论和方法来确定它们的运动过程(或平衡状态), 预测事物的演化(或稳定程度), 以及依一定的目的采取各种决策或进行有意识的控制.

经典力学为数学模型的建立提供了一个范例. 如果物体的尺度和形状是相对小的, 就可以把它们看成带有质量的几何学中的点. 它们的运动就由反映位置随时间而变的函数来描述, 而其运动规律即牛顿第二定律, 采取了微分方程的形式. 这便形成了质点的动力学, 这是一个相当准确、有效的模型. 接着人们又建立了刚体、弹性体、流体的数学模型. 至今这些模型还是我们进行工程设计的基本根据. 在力学之后,人们对电磁场、热的流动、微观粒子的性态等等都建立了数学模型,这些数学模型都有严格的理论基础,反映了客观世界的精确的运动规律.

一个好的数学模型需要具备两个条件,第一,它能反映客观实际;第二,在数学上应是可解的. 同时实现这两个条件并不容易, 甚至在质点动力学这样的领域, 对于三体问题, 直到今天也仍然未被完全探明. 其原因是我们的数学工具尚未能完全解决这一类非线性、长时间、多维的数学问题. 所以对于已具备第一个条件的数学模型,人们还是要作种种简化和近似,使之能够求解. 对于众多的科学技术问题来说, 精确的定量规律往往尚未形成, 建立满足这两个条件的数学模型就更为不易. 这就需要数学工作者和其他科学工作者的共同努力和不断尝试才能见效. 这两个条件实际上是密切相关、相互制约的. 应用上要立即见效的

模型不能复杂到数学上尚无法处理，也不能简化到不符合客观实际，往往要提出各种试验性的、可能的数学模型，以供检验和选择．

电子计算机的出现及其性能的迅速改善，为建立数学模型、解决相应的数学问题提供了有力的武器．许多表面上看来并不复杂的数学问题，如果没有适当的计算工具和计算方法，就得不到有效的解答．解多个未知数的线性代数方程组，以及大量的数据处理等等都是明显的例子．电子计算机是适应大量计算的需要而产生的．数学之所以能够如此广泛、深入地渗透到各门科学、技术领域，先进的计算机是一个重要的因素．

然而，光有计算机的进步还是不能解决问题的，同时还需要好的算法．一个好的算法的出现，往往能使大量的问题得到解决．有限元方法、快速富氏变换、稀疏矩阵的处理等等都是如此．此外，有许多在数学上严格地说来是尚未解决的问题（例如比较复杂的带激波的三维气体动力学问题），用巧妙的、启发性的数值方法却能求出合理的解答．关于计算复杂性的研究还表明，对有些算法，当要计算的点数增加时，计算量是依点数的指数函数而增加的，这样，大点数的计算就不可能实现．从而可见，建立一个好的算法是极其重要的．

基础数学的研究表面上似乎和应用无关，但它是一个强大的"思想库"，其中的深刻研究有时还会导致意想不到的应用．过去有些人设想的纯粹数学和应用数学间的鸿沟正在消失．例如，数论、微分拓扑等等最纯粹的数学分枝，在应用上也有很大的价值．

我国正在进行社会主义的四化建设．"七五"计划的一个鲜明特点是重视科学技术的发展．进一步使我国经济的发展建立在科学技术进步的基础上，要围绕经济建设和社会发展中提出的关键性技术课题，认真开展科技攻关，要努力掌握当代的新技术和高技术，同时要继续重视基础的研究．这一切都为我国数学工作者提出了更高的要求．我们有责任在这个伟大的任务中作出应有的贡献．可以预期，这个刊物的出版，也一定能够在交流成果，促进研究和推广应用等多方面发挥出自己的作用．

第1卷 第1期 应用数学与计算数学学报 Vol. 1 No. 1
1987年1月 COMM. ON APPL. MATH. AND COMPUT. Jan., 1987

随时间变化的区间上的抛物型方程边界元方法的误差估计

李 晋 先
(中 国 科 技 大 学)

On Error Estimate of the Boundary Element Method for Parabolic Equations in a Time-Dependent Interval

Li Jinxian
(*China University of Science and Technology*)

Abstract

This paper discusses the direct boundary element method for parabolic equations in a time-dependent interval. An optimal estimate of the error in maximum norm for the boundary element collocation scheme is given.

本文讨论随时间变化的区间上的抛物型方程的直接边界元方法，给出了对于边界元配位法格式的最优极大模误差估计.

§1. 引 言

与有限差分和有限元等“区域”方法相比,边界元方法把问题的维数降低了一维,因而计算工作量可以减少很多. 因此，近年来一些作者研究了它在抛物型方程和活动边界问题数值求解中的应用[1~3]. 但是,方法的收敛性的分析还做得很少. 据作者所知,已经发表的工作只有 K. Onishi 的文章[4]. 但是,正如作者在[5]中所指出的，他的证明是以对矩阵范数的一个错误估计为基础的，因而是不正确的. 作者在[5]中对一维热传导方程证明了边界元方法的一致收敛性，并给出了误差的极大模估计. 但是[5]中所用的矩阵分析方法并不适用于二维区域或随时间变化的区域中的问题. 在本文中,作者利用算子分析的理论,对随时间变化的区间上的热传导方程，给出了边界元配位法格式的最优极大模误差估计. 二维的情形将另行讨论.

本文1985年10月27日收到.

§2. 随时间变化的区间上的抛物型方程

为确定起见，我们考虑以下热传导方程

$$\begin{cases} k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial u}{\partial t}=0,\ 0<x<S(t),\ 0<t\leqslant T<\infty, & (2.1)\\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,t)=q_1(t),\ \dfrac{\partial u}{\partial x}(S(t),t)=q_2(t),\ 0<t\leqslant T, & (2.2)\\ u(x,0)=u_0(x),\ 0\leqslant x\leqslant S(0)\quad (S(0)=L>0). & (2.3)\end{cases}$$

其中 $k>0$ 是常数，$q_i(t)(i=1,2)$ 有界，$u_0(x)$ 为 Lipschitz 连续的，$S(t)$ 有连续的一阶导数 $\dot{S}(t)$，不失一般性，假定 $S(t)$ 为 t 的非减函数.

§3. 边界积分方程

(2.1) 的基本解是

$$u^*(x,\xi;t,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi k(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4k(t-\tau)}\right],\qquad t>\tau. \tag{3.1}$$

令

$$q^*(x,\xi;t,\tau)=\frac{\partial u^*}{\partial\xi}=\frac{(x-\xi)}{4\sqrt{\pi}(k(t-\tau))^{3/2}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4k(t-\tau)}\right],\qquad t>\tau, \tag{3.2}$$

$$g_1(t)=2\Big\{-k\int_0^t q_1(\tau)u^*(0,0;t,\tau)d\tau+k\int_0^L q_2(\tau)u^*(0,S(\tau);t,\tau)d\tau$$
$$+\int_0^t u_0(\xi)u^*(0,\xi;t,0)d\xi\Big\}, \tag{3.3a}$$

$$g_2(t)=2\Big\{-k\int_0^t q_1(\tau)u^*(S(t),0;t,\tau)d\tau+k\int_0^t q_2(\tau)u^*(S(t),S(\tau);t,\tau)d\tau$$
$$+\int_0^L u_0(\xi)u^*(S(t),\xi;t,0)d\xi\Big\}, \tag{3.3b}$$

相应于 (2.1)～(2.3) 的边界积分方程是[1]

$$\frac{1}{2}u(0,t)-k\int_0^t q^*(0,0;t,\tau)u(0,\tau)d\tau+k\int_0^t q^*(0,S(\tau);t,\tau)u(S(\tau),\tau)d\tau$$
$$-\int_0^t u^*(0,S(\tau);t,\tau)\dot{S}(\tau)u(S(\tau),\tau)d\tau=\frac{1}{2}g_1(t), \tag{3.4a}$$

$$\frac{1}{2}u(S(t),t)-k\int_0^t q^*(S(t),0;t,\tau)u(0,\tau)d\tau+k\int_0^t q^*(S(t),S(\tau);t,\tau)u(S(\tau),\tau)d\tau$$
$$-\int_0^t u^*(S(t),S(\tau);t,\tau)\dot{S}(\tau)u(S(\tau),\tau)d\tau=\frac{1}{2}g_2(t). \tag{3.4b}$$

定义列向量 $G(t)=(g_1(t),g_2(t))^T$ 和 $U(t)=(u_1(t),u_2(t))^T$，其中 $u_1(t)=u(0,t)$，$u_2(t)$

$=u(S(t),t)$. 再定义矩阵 $K(t,\tau)=(k_{ij}(t,\tau))_{2\times 2}$, 其中

$$\begin{cases} k_{ij}=0,\ 1\leqslant i,j\leqslant 2,\ 0\leqslant t<\tau\leqslant T; \\ k_{11}=q^*(0,0;t,\tau),\ k_{12}=\dfrac{1}{k}u^*(0,S(\tau);t,\tau)\dot{S}(\tau)-q^*(0,S(\tau);t,\tau), \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0\leqslant\tau<t\leqslant T \\ k_{21}=q^*(S(t),0;t,\tau),k_{22}=\dfrac{1}{k}u^*(S(t),S(\tau);t,\tau)\dot{S}(t)-q^*(S(t),S(\tau);t,\tau). \end{cases} \tag{3.5}$$

令 $\lambda=2k$, 则边界积分方程可写成以下形式:

$$U(t)-\lambda\int_0^T K(t,\tau)U(\tau)d\tau=G(t). \tag{3.6}$$

令 $R[0.T]$ 为区间 $[0,T]$ 上的黎曼可积函数空间, 定义赋范线性空间 $X=(R[0,T])^2$, 对 $AV(t)=(v_1(t),v_2(t))^T\in X$, 配以极大模范数

$$\|V\|_\infty=\max_{i=1,2}\max_{t\in[0,T]}|v_i(t)|, \tag{3.7}$$

再定义积分算子 $K:X\to X$, 对 $\forall V(t)\in X$, 使得

$$(KV)(t)=\int_0^T K(t,\tau)V(\tau)d\tau, \tag{3.8}$$

容易验证, K 的范数是

$$\|K\|_\infty=\max_{i=1,2}\max_{t\in[0,T]}\left\{\sum_{j=1}^{2}\int_0^T|k_{ij}(t,\tau)|d\tau\right\}. \tag{3.9}$$

在 (3.5) 中可以看到 $k_{11}(t,\tau)=q^*(0,0;t,\tau)=0$, 而

$$k_{12}(t,\tau)=\left[\frac{S(\tau)}{4\sqrt{\pi}(k(t-\tau))^{3/2}}+\frac{\dot{S}(\tau)}{2k\sqrt{\pi k(t-\tau)}}\right]\exp\left[-\frac{S(\tau)^2}{4k(t-\tau)}\right],\quad t>\tau.$$

由假定知 $S(\tau)\geqslant L>0$, 所以当 $t-\tau\to 0$ 时, $k_{12}\to 0$. 这意味着 $k_{12}(t,\tau)$ 在 $0\leqslant t,\tau\leqslant T$ 上是连续的. 类似地, $k_{21}(t,\tau)$ 也在 $0\leqslant t,\tau\leqslant T$ 上连续. 再者, 我们有 $k_{22}(t,\tau)=H(t,\tau)/\sqrt{t-\tau}$, 其中

$$H(t,\tau)=\left[\frac{\dot{S}(t)}{2k\sqrt{\pi k}}-\frac{S(t)-S(\tau)}{4\sqrt{\pi}k^{3/2}(t-\tau)}\right]\exp\left[-\frac{(S(t)-S(\tau))^2}{4k(t-\tau)}\right],\quad t>\tau.$$

当 $t-\tau\to 0$ 时, $H(t,\tau)\to\dot{S}(t)/4k\sqrt{\pi k}$. 这意味着 $H(t,\tau)$ 在 $0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T$ 上是连续的. 由以上分析, 我们可知 $K(t,\tau)$ 是弱奇异的. 不难验证算子 K 是紧的.

现在 (3.6) 可以写成算子形式

$$(I-\lambda K)U=G \tag{3.10}$$

容易验证 $\lambda\|K\|_\infty<1$, 因此 $(I-\lambda K)$ 有有界逆.

§4. 边界元配位法格式

为了定义 (3.6) 的边界元离散格式, 我们把时间区间 $[0,T]$ 细分成 N 个相等的小区间 $J^n=[t^{n-1},t^n]$, $1\leqslant n\leqslant N$, 其长度 $h=T/N$. 令 $S_h(t)$ 为 $S(t)$ 的分段 m 次插值多项式, 满

足条件 $S_h(t^{n-1}+\frac{j}{m}h)=S(t^{n-1}+\frac{j}{m}h)$, $0\leqslant j\leqslant m$, $1\leqslant n\leqslant N$, 且 $S_h(t)$ 在每个小区间 J^n 上是 $m\geqslant1$ 次多项式. 然后我们定义分段 $r\geqslant0$ 次多项式的空间 R_N^r 如下:

(1) $r=0$. R_N^0 中的每个函数在每个半闭区间 $\tilde{J}^n=(t^{n-1},t^n]$ $(1\leqslant n\leqslant N)$ 上是常数. 我们取 $\{t_i=t^i, 1\leqslant i\leqslant N\}$ 为结点集. 与每个结点 t_i 相联系, 定义函数

$$\phi_i(t)=\begin{cases}1, & t\in\tilde{J}^n\ (\text{或 } t=0 \text{ 而 } i=1),\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{4.1}$$

函数集合 $\{\phi_i(t), 1\leqslant i\leqslant N\}$ 构成了 R_N^0 的一组基, 很明显, 任何函数 $v(t)\in R_N^0$ 都有唯一的展开式

$$v(t)=\sum_{i=1}^{N}v(t_i)\phi_i(t).\tag{4.2}$$

(2) $r\geqslant1$. $R_N^r=\{v(t)\in C^0[0,T]; v|_{J^n}\in P_r(J^n), 1\leqslant n\leqslant N\}$. 我们定义结点

$$t_j^n=t^{n-1}+\frac{j}{m}h,\ 0\leqslant j\leqslant r,\ 1\leqslant n\leqslant N.$$

与每个结点 t_j^n (注意 $t_r^n=t_0^{n+1}=t^n$) 相联系, 定义一个函数 $\phi_j^n(t)\in R_N^r$, 它在结点 t_j^n 处取值为 1 而在其他的结点上都取值为 0. 按以下顺序把全部结点 $\{t_j^n\}$ 进行编号:

$$t_0^1,\cdots,t_r^1,t_1^2,\cdots,t_r^2,\cdots,t_1^N,\cdots,t_r^N.\tag{4.3}$$

结点函数 $\{\phi_j^n\}$ 也按同样的顺序编号. 这样 i_j^n (或 $\phi_j^n(t)$) 就是第 $i=(n-1)r+j$ 个结点 t_i (或结点函数 $\phi_i(t)$). 集合 $\{\phi_i(t), 0\leqslant i\leqslant N_r\}$ 是 R_N^r 的一组基. 任何函数 $v(t)\in R_N^r$ 有唯一的展开式

$$v(t)=\sum_{i=1}^{Nr}v(t_i)\phi_i(t).\tag{4.4}$$

函数 ϕ_j^n 的表达式为

$$\phi_j^n(t)=\begin{cases}\prod\limits_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{r}\dfrac{(t-t_i^n)}{(t_j^n-t_i^n)}, & t\in J^n, j\neq0,r;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

$$\phi_r^n(t)=\phi_0^{n+1}(t)=\begin{cases}\prod\limits_{i=0}^{r-1}\dfrac{(t-t_i^n)}{(t_r^n-t_i^n)}, & t\in J^n,\\ \prod\limits_{i=1}^{r}\dfrac{(t-t_i^{n+1})}{(t_n^{n+1}-t_i^{n+1})}, & t\in J^{n+1}\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}\tag{4.5}$$

以下用 $\{t_i, 1\leqslant i\leqslant I\}$ 表示 $R_N^r(r\geqslant0)$ 的全部结点的集合. 对于每一个函数 $v(t)\in R[0,T]$, 我们如下定义其分段插值多项式 $v^I(t)\in R_N^r$:

$$v^I(t)=\sum_{i=1}^{I}v(t_i)\phi_i(t).\tag{4.6}$$

注意, 如果 $v(t)$ 在 $t=t_i$ 处有间断, 则在 (4.6) 中取 $v(t_i)=\lim\limits_{t\to t_i-0}v(t)$. 为了近似初值函数 $u_0(\xi)$, 我们把空间区间 $[0,L]$ 分成 M 个相等的小区间, 其长度为 $\Delta x=L/M$. 然后, 与上面

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

类似地定义分段 r 次多项式空间 Y_M^r 和相应于 $u_0(\xi)$ 的插值多项式 $u_0^I(\xi)\in Y_M^r$.

现在我们定义向量函数空间 $\tilde{X}_N^r=(R_N^r)^2\subset X$，则任何向量函数 $\tilde{V}(t)\in\tilde{X}_N^r$ 都有唯一的展开式

$$\tilde{V}(t)=\sum_{i=1}^{I}\phi_i(t)\tilde{V}(t_i). \tag{4.7}$$

而(3.6)的边界元配位法离散格式可以定义如下

求 $\tilde{U}(t)\in\tilde{X}_N^r$，使得

$$\tilde{U}(t_i)-\lambda\int_0^T K_h(t_i,\tau)\tilde{U}(\tau)d\tau=\tilde{G}(t_i),\qquad i=1,\cdots,I, \tag{4.8}$$

其中 $K_h(t_i,\tau)$ 和 $\tilde{G}(t_i)$ 是在 $K(t_i,\tau)$ 和 $G(t_i)$ 的定义式中以 $S_h(t_i)$, $S_h(\tau)$, $\dot{S}_h(\tau)$, $u_0^I(\xi)$ 和 $q_j^I(\tau)$,$(j=1,2)$ 分别代替 $S(t_i)$, $S(\tau)$, $\dot{S}(\tau)$, $u_0(\xi)$ 和 $q_j(\tau)$,$(j=1,2)$ 后得到的.

令 $K_h^I(t,\tau)=\sum_{i=1}^{I}\phi_i(t)K_h(t_i,\tau)$, $\tilde{G}(t)=\sum_{i=1}^{I}\phi_i(t)\tilde{G}(t_i)$. 我们可定义积分方程

$$\tilde{U}(t)-\lambda\int_0^T K_h^I(t,\tau)\,\tilde{U}(\tau)d\tau=\tilde{G}(t), \tag{4.9}$$

因为很显然,对 $\forall V(t)\in X$, $\int_0^T K_h^I(t,\tau)V(\tau)d\tau\in\tilde{X}_N^r$.

引理 3.1　如果 $\tilde{U}(t)\in\tilde{X}_N^r$ 是(4.9)的解，则它满足(4.8). 反之，如 $\tilde{U}(t)\in\tilde{X}_N^r$ 是(4.8)的解,则它也满足(4.9). 因此,(4.8)和(4.9)是等价的.

证明　利用(4.7),我们由(4.9)可得

$$\sum_{i=1}^{I}\phi_i(t)\left\{\tilde{U}(t_i)-\lambda\int_0^T K_h(t_i,\tau)\tilde{U}(\tau)d\tau\right\}=\sum_{i=1}^{I}\phi_i(t)\tilde{G}(t_i).$$

这导致(4.8). 反之,(4.8)的两边同乘以 $\phi_i(t)$,并对 i 从 1 到 I 求和,即得(4.9),证毕.

定义积分算子 $K_h^I:X\to\tilde{X}_N^r$,对 $\forall V(t)\in X$,使得

$$(K_h^I V)(t)=\int_0^T K_h^I(t,\tau)V(\tau)d\tau.$$

因为 K_h^I 的值域是有限维的,当然 K_h^I 是紧的. 现在(4.9)可以写成算子形式

$$(I-\lambda K_h^I)\tilde{U}=\tilde{G}. \tag{4.10}$$

我们定义投影(插值)算子 $P_N^r:X\to\tilde{X}_N^r$,对 $\forall V\in X$,使得

$$(P_N^r V)(t)=V^I(t)=\sum_{i=1}^{I}\phi_i(t)V(t_i). \tag{4.11}$$

如果 $V(t)$ 在 $t=t_i$ 处有间断，则与(4.6)类似，我们在(4.11)中取 $V(t_i)=\lim\limits_{t\to t_i-0}V(t)$. 令

$K^I(t,\tau)=\sum\limits_{i=1}^{I}\phi_i(t)K(t_i,\tau)$. 我们再定义积分算子 $K^I:X\to\tilde{X}_N^r$, 对 $\forall V(t)\in X$, 使得

$$(K^I V)(t)=\int_0^T K^I(t,\tau)V(\tau)d\tau.$$

则显然有

$$K^I=P_N^r K. \tag{4.12}$$

§5. 边界元配位法格式的误差估计

现在我们着手分析边界元配位方程(4.9)的解的误差. 首先, 我们证明与投影 P_N^r 有关的三个引理.

引理 5.1 (i) $\|P_N^r\|_\infty=1, r=0,1$; (ii) $\|P_N^r\|_\infty\leqslant L_r, r\geqslant 2$. (5.1)

这里 L_r 是与分段 r 次插值多项式相应的 Lebesgue 常数. 注意, 如果 $r=0,1$, 则 $L_r=1$.

证明 (i) 设 $r=0,1$, 则有

$$\|P_N^r V\|_\infty=\left\|\sum_{i=1}^{I}\phi_i(t)V(t_i)\right\|_\infty\leqslant\|V\|_\infty\max_{t\in[0,T]}\sum_{i=1}^{I}|\phi_i(t)|=\|V\|_\infty.$$

但对于 $V\in\tilde{X}_N^r, P_N^r V=V$. 因此有 $\|P_N^r\|_\infty=1$.

(ii) 令 $\|V\|_\infty=1$. 如果 $r\geqslant 2$, 则

$$\begin{aligned}\|P_N^r V\|_\infty&=\max_{i=1,2}\max_{1<n<N}\max_{t\in J^n}\left|\sum_{j=0}^{r}\phi_j^n(t)v_j(t_j^n)\right|\\&\leqslant\max_{1<n<N}\max_{t\in J^n}\sum_{j=0}^{r}|\phi_j^n(t)|\\&=\max_{s\in[0,T]}\sum_{j=0}^{r}\left|\prod_{\substack{i=0\\i\neq j}}^{r}\frac{(s-i/r)}{(j-i)i/r}\right|=L_r.\end{aligned}$$

因此, $\|P_N^r\|_\infty\leqslant L_r$. 证毕.

引理 5.2 设 $V(t)\in(C^0[0,T])^2$. 定义它的连续性模量

$$\omega(V,h)=\max_{i=1,2}\max_{\substack{|t_1-t_2|<h\\0<t_1,\,t_2<T}}|v_i(t_1)-v_i(t_2)| \tag{5.2}$$

则有

(i) $\|V-P_N^r V\|_\infty\leqslant\omega(V,h)$, $r=0,1$; (5.3a)

(ii) $\|V-P_N^r V\|_\infty\leqslant(1+L_r)\omega(V,h)$, $r\geqslant 2$. (5.3b)

证明 (i) $\|V-P_N^0 V\|_\infty=\max\limits_{i=1,2}\max\limits_{1<n<N}\max\limits_{t\in J^n}|v_i(t)-v_i(t^n)|\leqslant\omega(V,h)$.

而

$$\|V-P_N^1 V\|_\infty=\max_{i=1,2}\max_{1<n<N}\max_{t\in J^n}|v_i(t)-v_i^I(t)|.$$

当 $r=1$ 时, 由中值定理, 对任何 $t\in J^n$, 存在 $\tau_i(t)\in J^n$, 使得 $v_i^I(t)=v_i(\tau_i(t))$. 因此,

$$\begin{aligned}\max_{t\in J^n}|v_i(i)-v_i^I(t)|&\leqslant\max_{t\in J^n}|v_i(t)-v_i(\tau_i(t))|\\&\leqslant\max_{|t_1-t_2|<h}|v_i(t_1)-v_i(t_2)|.\end{aligned}$$

由此即可推出 $\|V-P_N^1 V\|_\infty\leqslant\omega(V,h)$.

(ii) 设 $r\geqslant 2$. 我们有 $P_N^r(P_N^1 V)=P_N^1 V$, 因为 $P_N^1 V\in\tilde{X}_N^r$. 由此得

$$\begin{aligned}\|V-P_N^r V\|_\infty&\leqslant\|V-P_N^1 V\|_\infty+\|P_N^r(V-P_N^1 V)\|_\infty\\&\leqslant(1+\|P_N^r\|_\infty)\|V-P_N^1 V\|_\infty\leqslant(1+L_r)\omega(V,h),\end{aligned}$$

这里我们应用了引理 5.1. 证毕.

引理 5.3 (i) $\|K-K^I\|_\infty \leqslant \Omega(K,h),\ r=0,1,$ (5.4a)

$$\|K-K^I\|_\infty \leqslant (1+L_r)\Omega(K,h),\ r\geqslant 2. \tag{5.4b}$$

其中

$$\Omega(K,h)=\max_{i=1,2}\max_{\substack{|t_1-t_2|<h\\ 0<t_1,t_2<T}}\left\{\sum_{j=1}^{2}\int_0^T |k_{ij}(t_1,\tau)-k_{ij}(t_2,\tau)|\,d\tau\right\}. \tag{5.5}$$

(ii) 当 $h\to 0$ 时, $\Omega(K,h)\leqslant C\sqrt{h}$. (5.6)

我们用字母 C 表示各种不依赖于 h 和 Δx 的正常数, 下同.

注　应用 (5.6), 容易验证对 $\forall V\in X$, $KV\in(C^0[0,T])^2$, 且算子 K 是紧的.

证明 (i) 由引理 5.2 知, 如果 $r=0,1$, 则

$$\|KV-K^IV\|_\infty=\|KV-P_N^rKV\|_\infty\leqslant\omega(KV,h). \text{ 但}$$

$$\omega(KV,h)=\max_{i=1,2}\max_{\substack{|t_1-t_2|<h\\ 0<t_1,t_2<T}}\left|\sum_{j=1}^{2}\int_0^T(k_{ij}(t_1,\tau)-k_{ij}(t_2,\tau))v_j(\tau)\,d\tau\right|$$

$$\leqslant\Omega(K,h)\|V\|_\infty.$$

由此得 (5.4a). 类似地可推出 (5.4b).

(ii) (5.6) 可以由估计 (5.5) 中的每个积分 $I_{ij}=\int_0^T|k_{ij}(t_1,\tau)-k_{ij}(t_2,\tau)|\,d\tau$ 而得证. 下面不妨设 $t_2<t_1$.

① 因为 $k_{11}(t,\tau)=0$, 我们有

$$I_{11}=0. \tag{5.7}$$

② 容易验证 $\dfrac{\partial k_{12}(t,\tau)}{\partial t}$ 和 $\dfrac{\partial k_{21}(t,\tau)}{\partial t}$ 在 $0\leqslant t,\tau\leqslant T$ 上连续. 由此即得

$$I_{12}\leqslant C(t_1-t_2)\leqslant Ch,\ I_{21}\leqslant C(t_1-t_2)\leqslant Ch. \tag{5.8}$$

③ $I_{22}=\displaystyle\int_0^{t_2}\left|\frac{H(t_1,\tau)}{\sqrt{t_1-\tau}}-\frac{H(t_2,\tau)}{\sqrt{t_2-\tau}}\right|d\tau+\int_{t_2}^{t_1}\frac{|H(t_1,\tau)|}{\sqrt{t_1-\tau}}d\tau\equiv I_1+I_2.$

$H(t,\tau)$ 在 $0\leqslant\tau\leqslant t\leqslant T$ 上是连续的, 因而是有界的. 我们有

$$I_2\leqslant C\int_{t_2}^{t_1}\frac{1}{\sqrt{t_1-\tau}}d\tau\leqslant C\sqrt{t_1\cdot t_2}\leqslant C\sqrt{h}. \tag{5.9}$$

$$I_1\leqslant\int_0^{t_2}\frac{|H(t_1,\tau)-H(t_2,\tau)|}{\sqrt{t_1-\tau}}d\tau+\int_0^{t_2}|H(t_2,\tau)|\left(\frac{1}{\sqrt{t_2-\tau}}-\frac{1}{\sqrt{t_1-\tau}}\right)d\tau$$

$$\equiv I_1'+I_1''.$$

$$I_1''\leqslant C(\sqrt{t_1-t_2}-(\sqrt{t_1}-\sqrt{t_2}))\leqslant C\sqrt{t_1-t_2}\leqslant C\sqrt{h}. \tag{5.10}$$

$|H(t_1,\tau)-H(t_2,\tau)|$

$$\leqslant C\left|\frac{S(t_1)-S(\tau)}{t_1-\tau}\exp\left(-\frac{(S(t_1)-S(\tau))^2}{4k(t_1-\tau)}\right)-\frac{S(t_2)-S(\tau)}{t_2-\tau}\exp\left(-\frac{(S(t_2)-S(\tau))^2}{4k(t_2-\tau)}\right)\right|$$

$$+C\left|\exp\left(-\frac{(S(t_1)-S(\tau))^2}{4k(t_1-\tau)}\right)-\exp\left(-\frac{(S(t_2)-S(\tau))^2}{4k(t_2-\tau)}\right)\right|$$

$$\leqslant C\left|\frac{S(t_1)-S(\tau)}{t_1-\tau}-\frac{S(t_2)-S(\tau)}{t_2-\tau}\right|+C\left|\exp\left(-\frac{(S(t_1)-S(\tau))^2}{4k(t_1-\tau)}\right)\right.$$

$$\left.-\exp\left(-\frac{(S(t_2)-S(\tau))^2}{4k(t_2-\tau)}\right)\right|$$

$$\leqslant C\left\{\frac{S(t_1)-S(t_2)}{t_1-\tau}+|S(t_2)-S(\tau)|\left(\frac{1}{t_2-\tau}-\frac{1}{t_1-\tau}\right)\right.$$

$$\left.+\left|\frac{(S(t_1)-S(\tau))^2}{t_1-\tau}-\frac{(S(t_2)-S(\tau))^2}{t_2-\tau}\right|\right\}$$

$$\leqslant C\left\{\frac{t_1-t_2}{t_1-\tau}+1-\frac{t_2-\tau}{t_1-\tau}+\frac{S(t_1)-S(\tau)+S(t_2)-S(\tau)}{t_1-\tau}(S(t_1)-S(t_2))\right.$$

$$\left.+(S(t_2)-S(\tau))^2\left(\frac{1}{t_2-\tau}-\frac{1}{t_1-\tau}\right)\right\}$$

$$\leqslant C\left(\frac{1}{t_1-\tau}+1\right)(t_1-\tau_2).$$

因此

$$I_1'\leqslant C(t_1-t_2)\int_0^{t_2}\left(\frac{1}{\sqrt{t_1-\tau}}+\frac{1}{(t_1-\tau)^{3/2}}\right)d\tau$$

$$=2C(t_1-t_2)\left(\sqrt{t_1}-\sqrt{t_1-t_2}+\frac{1}{\sqrt{t_1-t_2}}-\frac{1}{\sqrt{t_1}}\right)$$

$$\leqslant C(t_1-t_2)\left(\sqrt{t_1}+\frac{1}{\sqrt{t_1-t_2}}\right)$$

$$\leqslant C\sqrt{t_1-t_2}\leqslant C\sqrt{h}. \tag{5.11}$$

由 (5.9)～(5.11) 即可推出

$$I_{22}\leqslant C\sqrt{h}. \tag{5.12}$$

结合估计式 (5.7)、(5.8) 和 (5.12)，即得 (5.6). 证毕.

下面我们证明关于边界近似的两个引理.

引理 5.4 若 $S(t)\in C^{m+1}[0,T]$，则

$$\|K^I-K_h^I\|_\infty\leqslant Ch^m,\quad 当\ h\to 0. \tag{5.13}$$

证明 $\|K^I-K_h^I\|_\infty=\max\limits_{n=1,2}\max\limits_{t\in[0,T]}\left\{\sum\limits_{j=1}^{2}\int_0^T\left|\sum\limits_{i=1}^{I}\phi_i(t)(k_{nj}(t_i,\tau)-k_{hnj}(t_i,\tau))\right|d\tau\right\}$

$$\leqslant L_r\max_{n=1,2}\max_{1\leqslant i\leqslant I}\left\{\sum_{j=1}^{2}\int_0^T|k_{nj}(t_i,\tau)-k_{hnj}(t_i,\tau)|d\tau\right\}. \tag{5.14}$$

(5.13) 可以由估计每个积分 $I_{nj}=\int_0^T|k_{nj}(t_i,\tau)-k_{hnj}(t_i,\tau)|d\tau$ 而得证.

(i) 因为 $k_{11}(t_i,\tau)=k_{h11}(t_i,\tau)=0$，我们得

$$I_{11}=0. \tag{5.15}$$

(ii) $$I_{12}\leqslant\int_0^{t_i}\frac{1}{4\sqrt{\pi}(k(t_i-\tau))}\left|S(\tau)\exp\left(-\frac{S(\tau)^2}{4k(t_i-\tau)}\right)\right.$$
$$\left.-S_h(\tau)\exp\left(-\frac{S_h(\tau)^2}{4k(t_i-\tau)}\right)\right|d\tau$$
$$+\int_0^{t_i}\frac{1}{2k\sqrt{\pi k(t_i-\tau)}}\left|\dot{S}(\tau)\exp\left(-\frac{S(\tau)^2}{4k(t_i-\tau)}\right)\right.$$
$$\left.-\dot{S}_h(\tau)\exp\left(-\frac{S_h(\tau)^2}{4k(t_i-\tau)}\right)\right|d\tau\equiv I_1+I_2$$

$$I_1\leqslant\int_0^{t_i}\frac{|S(\tau)-S_h(\tau)|}{(t_i-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{S(\tau)^2}{4k(t_i-\tau)}\right)d\tau$$
$$+C\int_0^{t_i}\frac{S_h(\tau)}{(t_i-\tau)^{3/2}}\left|\exp\left(-\frac{S(\tau)^2}{4k(t_i-\tau)}\right)\right.$$
$$\left.-\exp\left(-\frac{S_h(\tau)^2}{4k(t_i-\tau)}\right)\right|d\tau\equiv I_1'+I_1''.$$

因为 $S(t)\in C^{m+1}[0,T]$，我们有[6]

$$\max_{\tau\in[0,T]}|S(\tau)-S_h(\tau)|\leqslant Ch^{m+1}.$$

由此得

$$I_1'\leqslant Ch^{m+1}. \tag{5.16}$$

应用中值定理，我们有

$$\left|\exp\left(-\frac{S(\tau)^2}{4k(t_i-\tau)}\right)-\exp\left(-\frac{S_h(\tau)^2}{4k(t_i-\tau)}\right)\right|$$
$$\leqslant\frac{\theta(\tau)}{2k(t_i-\tau)}\exp\left(-\frac{\theta(\tau)^2}{4k(t_i-\tau)}\right)\cdot|S(t)-S_h(\tau)|,$$

其中 $\min(S(\tau),\ S_h(\tau))\leqslant\theta(\tau)\leqslant\max(S(\tau),S_h(\tau))$. 因为 $S(t)\geqslant L>0$，所以 $\min\limits_{\tau\in[0,T]}\theta(\tau)>0$. 由此可推得

$$I_1''\leqslant Ch^{m+1}. \tag{5.17}$$

因此

$$I_1\leqslant Ch^{m+1}. \tag{5.18}$$

因为 $\max\limits_{\tau\in[0,T]}|\dot{S}(\tau)-\dot{S}_h(\tau)|\leqslant Ch^m$[6]，我们可类似地推出

$$I_2\leqslant Ch^m. \tag{5.19}$$

结合 (5.18) 和 (5.19) 即得

$$I_{12}\leqslant Ch^m. \tag{5.20}$$

类似地有

$$I_{21}\leqslant Ch^{m+1}. \tag{5.21}$$

(iii) $$I_{22}\leqslant C\int_0^{t_i}\frac{1}{\sqrt{t_i-\tau}}\Big|\dot S(\tau)\exp\Big(-\frac{(S(t_i)-S(\tau))^2}{4k(t_i-\tau)}\Big)$$

$$-\dot S_h(\tau)\exp\Big(-\frac{(S_h(t_i)-S_h(\tau))^2}{4k(t_i-\tau)}\Big)\Big|d\tau$$

$$+C\int_0^{t_i}\frac{1}{(t_i-\tau)^{3/2}}\Big|(S(t_i)-S(\tau))\exp\Big(-\frac{(S(t_i)-S(\tau))^2}{4k(t_i-\tau)}\Big)$$

$$-(S_h(t_i)-S_h(\tau))\exp\Big(-\frac{(S_h(t_i)-S_h(\tau))^2}{4k(t_i-\tau)}\Big)\Big|d\tau\equiv I_3+I_4,$$

$$I_4\leqslant C\int_0^{t_i}\frac{|(S(t_i)-S(\tau))-(S_h(t_i)-S_h(\tau))|}{(t_i-\tau)^{3/2}}d\tau$$

$$+C\int_0^{t_i}\frac{|S_h(t_i)-S_h(\tau)|}{(t_i-\tau)^{3/2}}\Big|\exp\Big(-\frac{(S(t_i)-S(\tau))^2}{4k(t_i-\tau)}\Big)$$

$$-\exp\Big(-\frac{(S_h(t_i)-S_h(\tau))^2}{4k(t_i-\tau)}\Big)\Big|d\tau\equiv I_4'+I_4''.$$

与 (ii) 类似地进行推理，我们可得

$$I_j\leqslant Ch^m,\quad I_4''\leqslant Ch^{m+1}. \tag{5.22}$$

除非 $t_i=0$ (此时 $I_{22}=0$)，我们有 $t_i\geqslant h$，对 $r=0,1$；或 $t_i\geqslant h/r$，对 $r\geqslant 2$．利用分部积分推出

$$I_4'\leqslant\frac{C}{\sqrt{t_i}}|S(t_i)-S_h(t_i)|+C\int_0^{t_i}\frac{|\dot S(t)-\dot S_h(\tau)|}{\sqrt{t_i-\tau}}d\tau$$

$$\leqslant Ch^{m+\frac12}+Ch^m\leqslant Ch^m. \tag{5.23}$$

结合 (5.22)、(5.23)，即得

$$I_{22}\leqslant Ch^m. \tag{5.24}$$

最后，把各个 I_{nj} $(1\leqslant n,j\leqslant 2)$ 的估计综合起来，就得到 (5.13)．证毕．

引理 5.5 令 $G^I(t)=P_N^rG(t)=\sum\limits_{i=1}^{I}\phi_i(t)G(t_i)$，$G_h^I=P_N^rG_h(t)=\sum\limits_{i=1}^{I}\phi_i(t)G_h(t_i)$，其中 $G_h(t)$ 是在 $G(t)$ 的定义式 (3.3) 中用 $S_h(t)$、$S_h(\tau)$ 和 $\dot S_h(\tau)$ 分别代替 $S(t)$，$S(\tau)$ 和 $\dot S(\tau)$ 后得到的．如果 $S(t)\in C^{m+1}[0,T]$，则当 $h\to 0$ 时，有

$$\|G^I-G_h^I\|_\infty\leqslant Ch^{m+\frac12}. \tag{2.25}$$

证明 $$\|G^I-G_h^I\|_\infty=\Big\|\sum_{i=1}^{I}\phi_i(t)(G(t_i)-G_h(t_i))\Big\|_\infty$$

$$\leqslant L_r\cdot\max_{1<i<I}\max_{j=1,2}|g_j(t_i)-g_{jh}(t_i)|,$$

$$I_1=|g_1(t_i)-g_{1h}(t_i)|$$

$$\leqslant 2k\int_0^{t_i}|q_2(\tau)|\frac{1}{2\sqrt{\pi k(t_i-\tau)}}\Big|\exp\Big(-\frac{S(\tau)^2}{4k(t_i-\tau)}-\exp\Big(-\frac{S_h(\tau)^2}{4k(t_i-\tau)}\Big)\Big|d\tau;$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com