

GNSS Geodetic Boundary Value Problem and
Its Application

GNSS大地边值问题 及其应用研究

张利明 著



测绘出版社

GNSS 大地边值问题及其应用研究

GNSS Geodetic Boundary Value Problem and Its Application

张利明 著

测绘出版社

· 北京 ·

© 张利明 2014

所有权利(含信息网络传播权)保留,未经许可,不得以任何方式使用。

内 容 提 要

GNSS 技术的快速发展和广泛应用,为物理大地测量带来了全新发展机遇,GNSS 大地边值问题由此走向实用阶段,我们完全可以利用其固定边值的优势确定更为精确的(似)大地水准面。同时由于 GNSS 大地边值问题的全球区域特征,为解决高程基准不统一这个世界性难题提供了可行方案。基于此,本书系统研究了 GNSS 大地边值问题(原名为“GPS/重力边值问题”),从理论上推导了 GNSS 大地边值问题的 Molodensky 级数解、连续趋近解及实用解等,从实用的角度研究了利用 GNSS 大地边值问题计算似大地水准面的方法和具体流程,并选择两个区域进行了实例验证。本书研究了基于 GNSS 大地边值问题的全球高程基准统一理论和方法,理论上的严密性、实例验证的可行性,对实现全球高程基准统一具有重要的意义和现实作用。

图书在版编目(CIP)数据

GNSS 大地边值问题及其应用研究/张利明著. —北京:测绘出版社,2014.12
ISBN 978-7-5030-3579-1

I. ①G… II. ①张… III. ①卫星导航—全球定位系统—应用—大地测量—边值问题—研究 IV. ①P228.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 286105 号

责任编辑	赵福生	封面设计	李 伟	责任校对	董玉珍	责任印制	喻 迅
出版发行	测绘出版社			电 话	010—83543956(发行部)		
地 址	北京西城区三里河路 50 号				010—68531609(门市部)		
邮政编码	100045				010—68531363(编辑部)		
电子信箱	smp@sinomaps.com			网 址	www.chinasmp.com		
印 刷	三河市世纪兴源印刷有限公司			经 销	新华书店		
成品规格	169mm×239mm						
印 张	7.25			字 数	140 千字		
版 次	2014 年 12 月第 1 版			印 次	2014 年 12 月第 1 次印刷		
印 数	0001—1000			定 价	26.00 元		

书 号 ISBN 978-7-5030-3579-1/P·763

本书如有印装质量问题,请与我社门市部联系调换。

前 言

在物理大地测量研究中,大地边值问题一直是非常重要的研究内容。从 1849 年英国科学家 Stokes 解算了大地边值问题以来,人们一直在探索更完善、更准确的边值问题理论,从而出现最具有代表性的 Stokes 理论和 Molodensky 理论。随着科技的进步,尤其是 GNSS 技术的出现,为物理大地测量学科的发展注入了新的活力,GPS/重力边值问题(在本书称为 GNSS 大地边值问题)应运而生。我们完全可以利用其优势确定更为精确的(似)大地水准面,进一步为利用 GNSS 代替传统耗时费力的水准测量创造条件。同时 GPS/重力边值问题的全球区域特征,为我们解决高程基准不统一这个世界性问题提供了现实的可能性。

本书系统研究了 GNSS 大地边值问题。首先从理论上论述了该问题的数学特征,推导了多种解式或表达,同时给出了其在顾及地球扁率平方量级相对误差的椭球改正公式。其次论述了利用 GNSS 大地边值问题在似大地水准面确定中的详细计算方案,给出了一些在实用计算中的关键技术和 Hotine 积分中的奇异点处理方法。然后对抗动重力进行了重新定义,指出了利用 DTM 数据的 GNSS 大地边值问题优点所在。最后进行了实际数据验证。验证结果表明,利用 GNSS 大地边值问题确定的似大地水准面都达到了厘米级精度。同时验证了利用 DTM 数据的 GNSS 大地边值问题具有有效性和可行性。作者提出了利用 GNSS 大地边值问题统一全球高程基准的理论。在利用 GNSS 大地边值问题求解似大地水准面时,并不需要高程信息。因此在一定意义上讲,GNSS 大地边值问题求解的似大地水准面具有全球区域特征,这为全球高程基准存在的问题提供了统一的参考基准。本书利用深圳和香港的数据对该理论进行了验证,与水准联测的结果相互验证表明,该方法具有非常高的精度和实用价值。同时本书利用位理论知识推导出不同高程基准和不同高程系统之间相互转化的严密理论公式,具有积极意义。

本书力求在理论和实用方法方面有所突破,但由于涉及数据保密等问题,最经典的例证未列其中,但这并不影响读者的理解,读者可以借助本书方法计算似大地水准面。作者热切希望与大家共勉。

在撰写本书时,作者力求使本书具有较高的学术水平,而又不失其实用性。但由于水平有限,难免存在不足之处,希望批评指正。同时,在文献方面可能存在漏引等问题,希望给予谅解支持。

目 录

第 1 章 绪 论	1
§ 1.1 物理大地测量研究现状	2
§ 1.2 GNSS 后的物理大地测量	9
§ 1.3 本书研究意义及主要内容	11
第 2 章 物理大地测量的基本原理	13
§ 2.1 位理论与地球重力场概述	13
§ 2.2 物理大地测量边值问题	18
§ 2.3 经典边值问题的比较与分析	20
§ 2.4 本章小结	23
第 3 章 GNSS 大地边值问题理论	24
§ 3.1 GNSS 大地边值问题的定义及数学表达	25
§ 3.2 GNSS 大地边值问题的 Molodensky 级数解	26
§ 3.3 GNSS 大地边值问题的连续趋近解	30
§ 3.4 GNSS 大地边值问题的实用公式推导及分析	31
§ 3.5 Hotine 边值问题的椭球改正公式	35
§ 3.6 本章小结	44
第 4 章 基于 GNSS 大地边值问题的大地水准面计算理论与方法研究	45
§ 4.1 大地水准面计算方法概述及适用性分析	45
§ 4.2 扰动重力归算方法讨论	50
§ 4.3 GNSS 大地边值问题确定大地水准面的计算方法研究	52
§ 4.4 基于 GNSS 大地边值问题的大地水准面计算方法讨论	62
§ 4.5 本章小结	64

第 5 章 基于 GNSS 大地边值问题的大地水准面精化与误差分析	65
§ 5.1 GNSS 大地边值问题的实例验证	65
§ 5.2 扰动重力数据精度与似大地水准面误差关系研究	75
§ 5.3 扰动重力数据分辨率与大地水准面误差关系研究	80
§ 5.4 本章小结	85
第 6 章 基于 GNSS 大地边值问题的全球高程基准统一理论及应用	86
§ 6.1 全球高程基准统一理论概述	86
§ 6.2 位理论和高程基准	89
§ 6.3 基于 GNSS 大地边值问题的全球高程基准统一理论及实例 验证	92
§ 6.4 本章小结	96
第 7 章 结束语	97
参考文献	99

Contents

Chapter 1	Introduction	1
§ 1.1	Research progress of physical geodesy	2
§ 1.2	Physical geodesy after GNSS	9
§ 1.3	The significance and main contents of the Research	11
Chapter 2	The basic principle of physical geodesy	13
§ 2.1	Potential theory and gravity field	13
§ 2.2	Geodetic boundary value problem	18
§ 2.3	Comparison of classic boundary value problem	20
§ 2.4	The summary of this chapter	23
Chapter 3	GNSS geodetic boundary value problem	24
§ 3.1	The definition and the mathematical expression	25
§ 3.2	Molodensky series solution	26
§ 3.3	Continuous approach solution	30
§ 3.4	The derivation and analysis of the practical formula	31
§ 3.5	The ellipsoidal correction of Hotine boundary value problem	35
§ 3.6	The summary of this chapter	44
Chapter 4	The geoid method based on GNSS geodetic boundary value problem	45
§ 4.1	Computation method of (quasi)geoid	45
§ 4.2	The reduction method of gravity disturbance	50
§ 4.3	The quasi-geoid computation based on GNSS geodetic boundary value problem	52
§ 4.4	Discussion of the quasi-geoid computation method	62
§ 4.5	The summary of this chapter	64

Chapter 5	Quasi-geoid computation and precision analysis	65
§ 5.1	Quasi-geoid computation	65
§ 5.2	Study of the relationship between data error and geoid accuracy	75
§ 5.3	Study of the relationship between data resolution and geoid accuracy	80
§ 5.4	The summary of this chapter	85
Chapter 6	The height datum unification theory based on GNSS geodetic boundary value problem	86
§ 6.1	The methods of height datum unification	86
§ 6.2	Potential theory and height datum	89
§ 6.3	The height datum unification method using GNSS geodetic boundary value problem	92
§ 6.4	The summary of this chapter	96
Chapter 7	Conclusion	97
References		99

第1章 绪 论

空间大地测量的迅速崛起,使大地测量发生了巨大变化。现代大地测量学已经跨越原有经典大地测量局域性和静态性等特征,发展成为全球的、动态的、精度更高、理论更严密的一门科学技术。物理大地测量学作为大地测量的重要组成部分,已随着空间技术的革新而发生了翻天覆地的变化。物理大地测量学的主要目标是研究、应用物理方法确定地球形状和外部重力场。而确定地球形状和外部重力场的问题一般都归结为解算大地测量边值问题(geodetic boundary value problem, GBVP)。因此,大地测量边值问题是物理大地测量学的主要理论方法,是研究地球形状和外部重力场的理论基础。传统上,由于重力异常数据的可获得性,人们一般是以重力异常为基本输入数据,通过第三边值问题解算地球形状与外部重力场。随着空间卫星技术的出现,尤其是 GNSS 技术及卫星重力技术的成功应用,如何科学高效利用这些新型对地观测技术及成果来确定高精度、高分辨率的地球重力场是摆在我们面前一项非常迫切的任务。结合当前技术发展状况,本书从理论和实践两方面探索科学有效地利用 GNSS 数据的这一类边值问题——GPS/重力边值问题(李斐等,2003a,2003b),并在此基础上发展和完善。本书由作者博士论文改编形成。由于书名命名规则原因,本书命名为 GNSS 大地边值问题,理论上还是 GPS/重力边值问题,属于物理大地测量的第二边值问题(Neumann 问题)范畴。在 GNSS 技术出现之前扰动重力不能准确获得,第二边值问题应用受到了很大的限制,尤其是在实际应用方面。GNSS 的出现,为物理大地测量边值问题提供了一个固定的边界面,由此物理大地测量由自由边值问题转化为实际可应用的固定边值问题,也为物理大地测量学科发展提供了新的机遇。当前,如何在实际中合理应用 GNSS 的技术优势是一项迫切需要研究的课题。因此本书主要研究对象为 GNSS 大地边值问题,通过全面系统的阐述和深入的理论研究,为其进一步推广应用提供理论和实际两方面的支持。

在本章中,通过大量查阅文献,归纳总结了物理大地测量研究现状,阐述了 GNSS 技术的出现给物理大地测量学带来的变革,结合 GNSS 大地边值问题的内容指出本书的研究目的、意义所在。

§ 1.1 物理大地测量研究现状

1.1.1 物理大地测量发展概述

物理大地测量是一门较为古老的学科(管泽霖等,1997)。具有现代含义的物理大地测量发展历史最早可追溯到 1785 年,当年法国科学家 Legendre 提出了位的概念,这一概念巧妙地将引力矢量归结为一个函数表示,而又不失其物理属性,这一函数被称为位函数,它为研究地球形状和外部重力场开辟了有效的途径。事实上,真正将地球形状和位理论结合起来的研究是在 19 世纪。1837 年,科学家 Listing 首次提出了地球形状的新概念——大地水准面,这就有了雏形的大地测量坐标系统中的参考面。1849 年,英国科学家 G.G.Stokes 在前人研究的基础上,发展和完善了 Newton 和 Clairaut 关于地球形状的理论,建立了著名的 Stokes 定理,即通过假设大地水准面外部无质量,且已知一个封闭水准面上的重力值,就可以确定大地水准面。以大地水准面为边界面的 Stokes 问题是第一次提出的大地边值问题,并由此导出了著名的 Stokes 公式。严格意义上讲,Stokes 公式是第三边值问题的球近似解,它要求重力异常数据必须在大地水准面上,因此出现了许多重力归算方法,如空间改正、布格(Bouguer)改正、法耶(Faye)改正及均衡改正等多种方法(Heiskanen et al,1967)。

在重力归算过程中,Stokes 边值问题不可避免地存在地壳密度假设的问题。为克服密度假设带来的不严密,Molodensky 巧妙地利用地球表面代替 Stokes 理论中的大地水准面,以地球表面为边界面,提出了直接使用不加归算的地面重力观测数据计算地球形状和外部重力场的理论,由此产生了著名的 Molodensky 理论。该理论以地球自然表面为边界面,以其上重力数据为边界条件,直接求解满足 Laplace 方程的地球形状和外部重力场问题。它从根本上克服了 Stokes 边值问题需要假设地壳密度的困难,可以在理论上解算出真正的地球形状。因此,Molodensky 边值问题的重大意义在于提出了一种几乎没有任何假设的研究地球形状和外部重力场的严密方法。实际上,Molodensky 边值问题是一个非线性自由边值问题,问题本身的求解非常复杂,一般是通过线性化、迭代及逼近等手段求得。因此,看似严密的理论在实际求解和应用中是以某些假设为前提的。

为避免 Molodensky 理论求解的复杂性,瑞典学者 Bjerhammar 在 1964 年提出了一种以某一虚拟球作为边界面,将地球表面上离散分布的重力异常向下延拓到一个完全处于地球内部的 Bjerhammar 虚拟球上,使问题本身变为一个非常简单的球外部边值问题。其数学本质就是以正则调和函数的 Runge-Krarp 定理为基础,借助于 Poisson 核函数的再生性,将问题变为球外部边值问题。Bjerhammar

方法是 Molodensky 理论的新发展,是将解析延拓理论用于求解 Molodensky 边值问题的方法之一,与 Moritz 的解析延拓解在理论上是等价的(Moritz,1980)。它的明显优点在于避开了 Molodensky 边值问题涉及的复杂地形表面及斜向导数问题。由于地面重力异常求解虚拟球面重力异常需要迭代,同时向下延拓总是存在不适定性问题,因此在实践中此方法的应用仍然不是很普遍。

Hotine 边值问题最早可追溯到 1850 年,是由 Neumann 父子提出的最初被称为 Neumann 问题(Hofmann et al,2005),后来数学家 Hotine 于 1969 年给出了 Neumann 问题积分核函数的推导过程与结果。在此基础上,Koch 于 1971 年深入讨论了在地球表面已知情况下的 Neumann 问题及其对物理大地测量的重要意义,因此 Neumann 问题也被称为 Neumann-Koch 公式,而在我国仍习惯称之为 Hotine 公式(李建成等,2003)。但由于当时扰动重力不能准确获取,因此后期研究较少。

另外,在物理大地测量研究方面,Krarp 和 Moritz 等创建和发展了最小二乘配置法(least square collocation method,LSC method)。该方法将统计分析方法引入到物理大地测量学,是综合利用不同类型的大地测量资料确定异常重力场的一种有效方法(Moritz,1980)。在实际计算过程中,由于利用最小二乘配置法需要解算高阶协方差矩阵及求解逆矩阵,计算量非常巨大,这极大地限制了配置法的广泛应用。但最小二乘配置可联合多种数据并能较为准确地提供精度估计等显著优点,随着大型计算机的广泛应用,这一方法将有望得到空前发展。

1.1.2 大地边值问题研究进展

自从 Stokes 按球近似得出 Stokes 公式以来,大地测量边值问题得到了迅猛的发展。特别是近 40 年来,人们试图得到数学上严密、物理上完善、符合实际情况的计算模型,Molodensky 理论与 Bjerhammar 理论是其典型代表。在 Molodensky 边值问题的研究方面,有著名的 Molodensky 级数解、Brovar 解、解析延拓解等多种形式,后来 Pellinen 对这三种解式进行了等值性证明(Moritz,1980)。丹麦科学家 Krarp(1973)严密推导了线性化的 Molodensky 问题边值条件的精确数学表示,同时证明了严格的导数方向为正常场等天顶线方向,理论上应归结为线性化斜向导数问题。Hormander(1976)首次给出了 Molodensky 边值问题解的存在性与唯一性证明,并推证其在数学上的精确结果。虽然 Hormander 定理还不能直接用于地球,但它的意义和影响是重大而深远的。Sanso 在 1977 年提出一种完全不同的研究非线性 Molodensky 问题的方法——重力空间法。该方法是一个思路新颖有重要意义的新方法。它是经典 Molodensky 边值问题研究中一个新进展,它的理论价值在于用一种独特的方法把自由边值问题简单而又严密地转化为固定边值问题,大大简化了由于自由边值问题在数学上产生的复杂性。比起 Hormander 用极

其复杂的数学过程处理高难度的反函数问题,Sanso 的重力空间法具有很大的优越性。但是,重力空间法仅限于非自转的地球,事实上相当于消除离心力的影响而以引力代替重力。即使是这样,Sanso 研究在实际上也是非常有意义的(管泽霖等,1997)。

1964 年 Bjerhammar 提出了“虚拟球”的概念。为了解算 Molodensky 问题而采用解析延拓过程,这个想法早在 1949 年 Molodensky 曾经考虑过采用这种方法来实际解算他的问题,但是后来放弃了,因为他认为向下延拓不可能正则(Moritz, 1980)。后来,Bjerhammar 重新考虑这个想法,提出了 Bjerhammar 边值问题,现在称为 Bjerhammar 理论。具体做法是:以地面扰动位 T 和重力异常 Δg 限制,通过 Poisson 积分向下解析延拓到 Bjerhammar 虚拟球上,得到虚拟球面上的相应场元 T^* 和 Δg^* ,并以 T^* 和 Δg^* 基本场元构成虚拟单层位 μ^* ,最后以 μ^* 表示地球形状和外部重力场。Bjerhammar 理论的数学基础以 Runge 定理做保证,在此可以直观地解释为:即使是原来的位 T 不能正则地向下延拓到大地水准面上,人们总是可以找到另外一个任意接近于位 T 的调和函数 T' ,所以它可以这样延拓,并且它的泰勒级数展开式是收敛的。Bjerhammar(1987)进一步将他的理论发展为在一个虚拟球上以几个有限重力异常“脉冲”求解外部重力场的确定性离散方法,并给出了简洁明了的封闭公式(管泽霖等,1997)。许厚泽等(1984)将 Bjerhammar 虚拟球方法发展为虚拟单层密度法。这种方法与 Bjerhammar 理论相比,其优点之处在于以距离倒数 $1/l$ 代替了 Bjerhammar 理论解算过程中的 Stokes 积分核,从而使得问题简化。一些数值验算结果表明,此方法不仅能有效地顾及地形效应,而且计算简单,稳定性强,便于实际计算。申文斌(2004a,2004b)提出了虚拟压缩恢复法(fictitious compress recovery),该方法的基本思想是:通过虚拟的“压缩”与“释放”,精确地给出地球外部重力场(如不考虑观测值误差),无需事先假定在 Bjerhammar 虚拟球上存在任何虚拟分布,从而克服了任何先验的人为假设(如无需引入并非严格成立的物理大地测量基本微分方程),同时克服了不适定性问题。虚拟压缩恢复原理的实质是通过虚拟的压缩与恢复,精确而严密地给出外部的真实场,所借助的虚拟球只不过是一种“中间产物”。事实上,类似的研究包括点质量法和 Meissl(1971)提出的多极子模型在内的“虚拟质量法”,尽管在数学上千差万别,但其本质都是建立在一种“等效原理”基础上的等效场元,都是利用了 Newton 算子的不唯一性。Otero 等(1999)分析了标量大地球边值问题(the scalar geodetic boundary-value problem),给出了其在球坐标系下的局部存在性和唯一性的新理论。Lehmann(2001)也对标量大地球边值问题进行了研究。2005 年,黄金水和朱灼文利用随机微分方程理论,给出了随机 Poisson 方程 Dirichlet 大地边值问题的随机积分分解,讨论了随机与确定边值问题间的关联。采用随机积分分解,则类似 Gauss 白噪声的影响将被滤掉,这对进一步提高重力场的求解精度具有重

要意义。

在大地边值问题的求解中,一般都进行球近似的假设。实际上,地球形状(大地水准面形状)更接近于椭球,由此近似而产生的误差随着积分半径的不同而不同,当积分半径达 20 度时,这项由球近似引起的误差可达 41 cm(管泽霖等,1997)。事实上,对大地边值问题的椭球改正已经有不少学者做了深入的研究,其中包括 Molodensky (1962)、Moritz (1980)、Cruz (1986)、Sona (1995)、于锦海 (2003)、Marinec 等(1997a)、Martinec 等(1997b)、Martinec (1998)、Ritter (1998)、Fei 等(2000)、Sjoberg (2003)等。通常情况下,解决椭球大地边值问题的方法主要可以分为两类:第一类是直接通过扰动位 T 的椭球谐展开来求解,该类方法较为严密,但由于引入了 Legendre 函数而显得非常复杂;第二类求解椭球边值问题的方法是将 Stokes 公式或 Hotine 公式作为该问题解的一次近似,然后加入相应的改正,我们称之为椭球改正。第二类方法较第一类具有形式简单、易于实现等优点。张传定等(1997)也对椭球域大地边值问题进行了研究,给出了三类椭球域大地边值问题的准格林函数解。

经典边值问题的主要研究成果大多集中在 20 世纪 80 年代以前。它们的共同特点是一般都以一种类型数据(如重力异常)为输入量。但随着卫星技术的出现和快速发展,尤其是重力卫星及测高卫星的成功应用,为我们提供了越来越庞大的新型数据信息源,包括全球海洋卫星测高数据、卫星轨道摄动数据及卫星重力(CHAMP、GRACE、GOCE)所测定的各种重力场数据。为了能同时利用多种类型的数据,从而产生了一些新型的大地边值问题,如混合边值问题(Sanso, 1985; Mainville, 1986; Yu et al, 1997)、超定边值问题(Sacerdote et al, 1985; Sanso, 1985; Sanso, 1988; Rummel, 1989; 于锦海等, 2007)等。混合边值问题目前主要是指两类:第一类是 Dirichlet 斜向导数混合边值问题,这类边值问题除经典陆地边界的线性化边值条件外,还包括海洋边界面的扰动位边值条件;第二类为 Neumann 斜向导数混合边值问题,它的陆地边界与第一类一样,海洋边界面则是扰动重力的边值条件。超定边值问题是指在一个边值问题中给出了比确定解析解所必需的多余条件,这样就有可能在同一边界面给出多种类型含有误差的边值,在求解过程中必然产生解的不相容性,必须利用统计的方法或随机过程的理论框架来寻求按所选范数最小化的逼近解。一般来讲,对此类边值问题的求解大致可以分为三类方法:第一类是 Sanso (1988)等提出的随机方法,主要是利用 Wiener 积分去处理超定边值问题;第二类是朱灼文等(1992)等提出的准解理论,其原理是应用 Hilbert 空间中的投影定理;第三类就是由 Rummel 等(1992)针对球界面对角谱边界条件下提供的谱系数组合法。另外,在 2007 年,于锦海等借助于变分法中求泛函极小化的方法提出求解超定大地边值问题的新方法,同时从理论上证明了超定边值问题变分解的存在性和唯一性。该方法有利于各种类型数据的有效使

用,并且具有严格的数学基础,能将不同类型的观测数据纳入统一的模型中进行研究,具有重要的现实意义。此外,Sanso(1995)提出了一种 Stokes 理论中的虚拟边值问题(pseudo-boundary-value problem),Martinec 等(1997b)阐述了这种边值问题解的存在性,同时给出了严密的 Stokes 理论的线性化边值条件;Grafarend 等(1985,1999)提出固定—自由两种边值条件的边值问题(fixed-free two-boundary-value problem),即边界一:地球表面(固定边界面);边界二:大地水准面(自由边界面)。申文斌等(2006)利用虚拟压缩恢复法和球谐展开法求解了两种界面(地面和卫星界面)的超定边值问题。

本节内容主要介绍了大地边值问题在理论方面的进展。事实上,大地边值问题的主要理论成果基本集中在 20 世纪,而 21 世纪初对大地边值问题具有理论方面的开创性成果则较少。人们的主要注意力集中在了实际应用方面。在下节内容中将结合(似)大地水准面的确定方法来展示大地边值问题的主要应用研究成果。

1.1.3 大地水准面计算方法研究进展

大地水准面是大地测量学中一个非常重要的基础性概念,它是高程测定的基准面。在物理大地测量学科中,确定(似)大地水准面的方法一般都是根据一种或多种重力数据作为边值,建立关于扰动位的相应大地边值问题,通过求解边值问题确定扰动位函数,再由 Bruns 公式求解得到高程异常或大地水准面高,这种方法求解得到的大地水准面一般称为“重力大地水准面”。GNSS 的出现,使得我们可以直接测得大地高,从而产生了另一种确定大地水准面的方法——GNSS/水准法(几何法)。GNSS/水准法确定的大地水准面一般具有非常高的精度,但其需要进行耗时、费力的水准测量。因为 GNSS/水准数据分辨率较低,因此在大地水准面确定中,一般都是将 GNSS/水准点作为高一级控制点来进一步校正或检核重力(似)大地水准面。由于 GNSS/水准大地水准面的确定原理非常简单,本书不做重点研究。在本小节中,我们将以大地边值问题为基本数学模型,研究讨论(似)大地水准面的计算方法。

重力(似)大地水准面确定最经典当属 Stokes 方法和 Molodensky 方法,它们都是利用(地面或大地水准面)重力异常作为边值数据,通过 Stokes 或 Molodensky 理论公式计算大地水准面高或高程异常。理论上,无论是 Stokes 理论还是 Molodensky 理论,都是一个全球面域积分,需要已知全球连续分布的重力异常数据,但实际上是不可能的事情。因此需要将积分公式及输入数据进行离散化处理,积分面元素以有限的区域代替,这样就产生了早期的“模板法”和“网格法”(Heiskanen et al,1967)来近似计算积分公式。1959 年方俊在《中国科学》上发表了“天文重力水准的方格模板”,这也是当时具有代表性的方法,后人称之为“方俊方格模板法”。事实上,这些计算方法的出现都是因为当时计算手段和设备落后的

条件下不得不采用的方法。随着科技进步和计算方法的多样化,尤其是快速傅里叶变换(FFT)被引入到物理大地测量学计算中以后,大大提高了计算速度,使得在重力场逼近理论中克服了计算量庞大这一最大障碍。同时重力数据一般是规则格网形式,这为FFT的直接引入提供了非常便利的条件。Sideris和Forsberg于1985年独立地提出将FFT技术应用于重力地形改正计算,随后相继有许多学者将谱方法引入到大地测量边值问题的平面逼近计算(Schwarz et al,1990);Strang van Hees(1986)是首次将FFT技术应用于Stokes积分计算,同时给出了二维形式的Stokes积分的谱表达式;Sideris(1985)研究了采用FFT技术计算地形改正及Molodensky边值问题,对FFT在物理大地测量的作用进行了扩展;为了提高计算精度,1993年,Forsberg和Sideris又提出了多带球面FFT计算方法,其基本思想是利用一系列卷积来准确计算Stokes积分,包括在高纬地区,该方法也取得了满意的结果。从数学上讲,多带球面FFT其实就是球面FFT的广义形式;尽管多带球面FFT方法可以较大地克服直接利用球面FFT中存在的误差,但仍然存在着近似误差。为了准确计算Stokes积分公式,Haagmans等(1993)提出了球面上的一维FFT方法,该方法可以在球面上精确计算卷积。我们知道在同一平行圈上,当计算点与流动点之间的经差一定时,核函数的值相等。因此在东西方向可以利用FFT计算卷积,而在南北方向可以借助于逐点累加的办法解决。从某种意义上讲,一维FFT实际上就是传统积分法和二维FFT相结合的成果。我国学者也对重力场研究中的谱方法进行过深入的分析,宁津生等(1993)和Li Yecai等(1992)同时独立地提出了将快速Hartley变换(FHT)引入重力场的卷积计算中;晁定波(2003a)讨论了Stokes公式球面卷积和平面卷积形式的近似性和严密性问题,分析了Stokes函数球面卷积形式和平面卷积形式的关系,推导了两者之间的差值表达式,估算了最大差值及其对计算大地水准面差距的误差影响。他认为,将顾及Stokes函数全项的平面卷积公式称为严密公式的提法,仅仅是相对仅顾及Stokes函数首项的简单平面卷积公式而言,认为更合理的提法应该是“高精度Stokes平面近似卷积公式”,通过深入理论分析,得出“球面卷积不可能严格转化为等效的平面卷积”的结论。

以上是对在地球重力场计算中的快速算法的回顾,这仅仅是大地水准面计算方法进展中的一个方面。实际上,在大地水准面的计算理论,包括重力归算、地形改正等方面,有许多成果。大家知道,在Stokes理论中,要求大地水准面外部无质量,而直接在地球表面上测量的重力值,一般不能直接满足这种数学关系。必须将地表重力值归算到大地水准面上,从而出现了不同的归算方法,如空间改正、Bouguer改正、均衡改正、Helmert凝聚改正及残差地形模型(RTM)等方法。自由空间改正是最简单的一种重力归算方法,它直接将地面重力值解归算到大地水准面上,而不考虑地形质量;所谓Bouguer改正,是把地形质量全部移去,也就是将

大地水准面的外部质量去掉;均衡改正是依据某种均衡模型调整地壳,它不像 Bouguer 改正那样,把地形质量全部去掉,而是将这些质量移到大大地水准面的内部,以弥补山下的质量亏损;Helmert 凝聚法(Heiskanen et al, 1967)(在这里指 Herlmert 第二凝聚法改正)改正是将地形质量全部压缩(凝聚)到大大地水准面上,从而在大大地水准面上构成一密度薄层,但整体质量没有变化,这种方法已经被用于加拿大和美国等地大地水准面精化计算(Sideris et al, 1995)。在 Helmert 凝聚法的基础上, Nahavandchi 等(2001b)提出了两种确定大地水准面的方法:第一种方法是将地面重力异常除去地形的影响以后,用 Poisson 积分公式将地面重力异常延拓的到大大地水准面上,利用 Stokes 公式计算大地水准面,再恢复地形对大地水准面的间接影响;第二种方法首先认为所有的直接与间接影响及向下延拓改正都能被分别计算出来,然后将所有的改正直接加到利用未加任何改正的 Stokes 公式计算的大地水准面结果中去。利用瑞典 23 个高精度的 GNSS/水准数据的检验表明,利用这两种方法计算的大地水准面都达到了非常好的精度效果。地形残差模型方法(Forsberg et al, 1981)严格意义上讲只适用于计算似大地水准面,本质是减去了相对于一个光滑的参考高程面上的残差地形。在北欧和一些波罗的海的国家,曾经利用这种方法计算了似大地水准面(Forsberg et al, 1993)。另外,在地形改正方面,还有一种方法——RTM/Helmert 组合法,它适合于计算似大地水准面(Omang et al, 2000)。在地形影响方面,一般是利用地壳平均密度(2.67 g/cm^3)进行计算。事实上,地壳密度并不均匀,Kuhtreiber(1998)利用变密度模型计算了澳大利亚的大地水准面。Huang 等(2001)进一步研究了利用变密度模型评估地壳密度变化对地形改正的影响,在加拿大山区试算结果表明,地壳密度变化对大地水准面的总影响变化范围在 $-7.0 \sim 2.8 \text{ cm}$,同时指出,在确定以“1-cm 大地水准面”为目标时,必须考虑密度变化影响。Novak(2003)提出了利用一步积分法(one-step integration)来确定大地水准面,这种模型综合了第一、第二或第三边值问题的解,将地面上的重力异常或扰动重力转化为椭球面或大地水准面上的调和向下延拓的扰动位。经数据检验表明,该方法提供了一个非常有效和稳定的解。Lachapelle(1997)提出了一种局部重力场逼近中的组合法,其原理是综合利用积分法、球谐展开和最小二乘配置法的优点。主要步骤是首先利用全球重力场模型确定局部重力场的中、长波分量,然后在内区用最小二乘配置法,在外区采用 Stokes 积分。这种方法的最大优点在于在内区采用最小二乘配置解,内区相对较小,从而克服了超大规模的矩阵运算。我国学者在(似)大地水准面计算方法也取得了丰硕成果。中国 2000 似大地水准面(CQG2000)就是我国当时(似)大地水准面精化的杰出代表,它几乎利用了国内外最先进的计算理论与方法,完成了我国分米级似大地水准面的构建工作(陈俊勇, 2001;李建成 等, 2003)。我国学者吴晓平等(2004)等主持或参与计算了 2000 中国重力场与似大地水准面模型

(CGGM2000),讨论了利用目前获得的全国垂线偏差结果对似大地水准面进行改进,使其在几十千米范围内相对精度达到 $\pm 5\text{ cm}$ 。张赤军等(2002,2003,2005)在大地水准面和似大地水准面的转化方面做了许多重要工作,详细介绍了大地水准面与似大地水准面之差公式的推导方法,揭示了其物理内涵,论述了其在精化大地水准面中的重要作用,并指出利用转化公式计算的大地水准面和似大地水准面可以达到同量级精度。目前,在我国不少区域似大地水准面计算精度已达到厘米级,甚至出现 1 cm 级似大地水准面。

在重力场逼近理论中,还出现了许多改化的 Stokes 核形式(Molodensky et al,1962;De Witte,1967;Wong et al,1969;Meissl,1971;Wenzel,1982;Sjoberg,1984,1991;Heck et al,1987;Vanicek et al,1987;Vanicek et al,1991;Featherstone et al,1998;Evans et al,2000;Vanicek et al,1991;Sjoberg et al,2000),其目的主要是改善大地水准面的计算精度和加快误差级数的收敛速度。需要特别指出的是,我国学者许厚泽等(1981,1983)也在截断误差估计问题上做出了卓越的贡献,提出了“许厚泽截断公式”。

总而言之,(似)大地水准面的计算方法 20 世纪末已经趋于成熟。近几年人们的研究主要是停留在对理论和计算方法做微小的改进方面,同时也形成了一套以移去-恢复法(Strang van Hees,1986;Denker et al,1987;Rapp et al,1992)为主线计算(似)大地水准面的标准程序,即:①移去过程,移去重力异常中的中长波信息(一般是用重力场模型计算中长波信息)及一些地形影响;②利用剩余重力异常通过 Stokes 积分来计算剩余大地水准面;③恢复过程,在剩余大地水准面上恢复重力场模型和地形对大地水准面的影响;④利用 GNSS 水准数据对重力大地水准面进行拟合;⑤利用 GNSS 水准数据评价大地水准面精度。

§ 1.2 GNSS 后的物理大地测量

随着卫星技术的出现,尤其是 GNSS 技术的快速发展和广泛应用,为物理大地测量带来了新的发展机遇。我们知道,物理大地测量的研究目的之一就是要确定地球形状,而利用 GNSS 技术可以准确、快速地确定地面任意点的三维坐标。理论上,GNSS 技术完全可以解决地球形状的确定问题。事实上,在物理大地测量研究中,通过深入分析不难发现地球形状应包括两方面的含义:地球几何形状和地球物理形状(以大地水准面代替的地球形状)。地球几何形状可以通过 GNSS 技术来精确测定。而以大地水准面来代替的地球形状由于其特殊的物理内涵,实际上并不能通过 GNSS 技术来解决。从某种意义上讲,GNSS 技术的出现,并没有完全从根本上解决地球形状问题。

在 GNSS 出现之前,传统物理大地测量一般利用以重力异常为输入量的第三