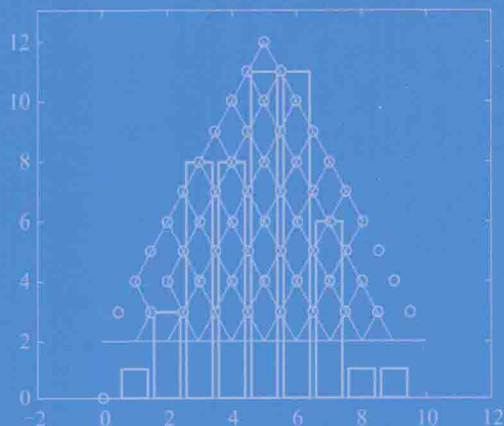
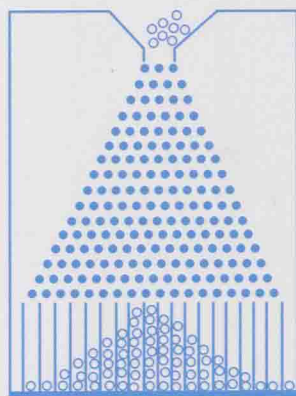




国家工科数学课程教学基地建设教材

数学实验 典型案例

华南理工大学数学学院
黄平 刘小兰 温旭辉 主编



高等教育出版社

国家工科数学课程教学基地建设教材

数学实验典型案例

Shuxue Shiyan Dianxing Anli

华南理工大学数学学院
黄平 刘小兰 温旭辉

主编

藏书



高等教育出版社·北京

内容提要

“数学实验”把数学软件与数学的学习、研究与应用有机结合,体现了理论与实践并重的认识规律。主要涉及数学软件的使用,实际问题的建模及计算实验,通过软件平台学习数学方法、研究数学问题等。

本书以 MATLAB 软件为载体,精选了大学数学三门核心课程,即高等数学、线性代数与概率统计中的若干有代表性的问题,形成数学实验案例。全书共分 12 章和 1 个附录,以问题为背景介绍了拟合、微分方程、分形迭代、插值、矩阵、线性相关、线性方程组、特征值、古典概型、蒙特卡罗方法、回归分析和贝叶斯建模等典型数学方法及其应用,附录中简述了 MATLAB 运算符及常用指令的功用。与本书配套的源程序及程序运行结果可以在高等教育出版社易课程网站下载。

本书编写具有如下特点:注重问题的典型性、趣味性、方法的实用性与内容的可读性。主要可作为大学“数学实验”课程教材。对从事使用 MATLAB 软件解决实际问题的学生、教师和其他技术人员也很有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

数学实验典型案例 / 黄平, 刘小兰, 温旭辉主编. —
北京: 高等教育出版社, 2015.2
ISBN 978-7-04-041467-7

I. ①数… II. ①黄… ②刘… ③温… III. ①高等数学-实验-高等学校-教材 IV. ①O13-33

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 261914 号

策划编辑 李茜
版式设计 童丹

责任编辑 李茜
插图绘制 杜晓丹

特约编辑 徐飞
责任校对 陈旭颖

封面设计 李树龙
责任印制 尤静

出版发行 高等教育出版社
社址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印刷 三河市华润印刷有限公司
开本 787mm × 960mm 1/16
印张 14.75
字数 270 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版次 2015 年 2 月第 1 版
印次 2015 年 2 月第 1 次印刷
定价 24.50 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物料号 41467-00

总 序

大学数学是高等学校非数学类专业的基础课程,是培养高素质创新人才的基石。面对目前形势和人才发展的需求,迫切需要对教学内容和体系、教学方式和方法、教学环节和手段等方面进行改革。根据大学数学课程教学要求,结合华南理工大学多年从事本科大学数学的教学实践经验和近几年的工科数学课程改革的一些新动态,华南理工大学数学学院部分富有教学经验的教师在继承与发展的基础上,进一步编写了国家工科数学课程教学基地建设教材。

本系列教材目前涵盖了高等数学、线性代数与解析几何、概率论与数理统计和数学实验等课程。教材编写体现了时代特点。本着加强基础、强化应用、整体优化、注重后效的原则,力争做到科学性、系统性和可行性相统一,使传授数学和培养数学素养得到较好的结合,突出数学思想方法和数学应用的广泛性,提高数学技术应用的深度和技巧。

本系列教材内容充实,由易到难,由浅入深,反映了不同专业对数学知识和数学教学的不同需求,系列教材也把计算机解决数学问题的数学实验融入其中,使理论和实践有机结合。可作为高等学校非数学类理工科各专业的教材或教学参考书。

在本系列教材的编写过程中,得到了华南理工大学教务处、华南理工大学数学学院的领导和同事的大力帮助,在此表示衷心感谢。还要特别感谢高等教育出版社高等理工数学分社的领导和编辑们,他们对本系列教材的编辑出版给予了精心指导和大力支持。同时本系列教材部分获得广东省质量工程“数学技术实验教学示范中心”和广东省“公共数学教学团队”两个建设项目的支持,一并致谢。

由于编者水平有限,系列教材难免存在不足,恳请广大专家、同行与读者批评指正,以期不断完善。

华南理工大学数学学院 杨启贵
2014年8月

前 言

现代信息社会的发展表明,数学不仅是一门研究现实世界数量关系和空间形式的科学,而且也是一种关键性的、普遍的、能够实行的技术。以计算机为代表的信息技术拓展了数学的应用领域,使数学的应用在广度和深度上都达到了前所未有的程度,并使数学技术成为当今高科技的一个重要标志。同时,也从根本上影响和改变了数学的学习、研究与应用方式,数学教学正在进行重大变革。

数学实验正是在这一变革大潮中迅速发展起来的一门新兴课程,它颠覆了仅靠纸和笔的数学学习方式。借助计算机和数学软件,倡导脑、手、眼并用的实践探索性学习模式,有效地延伸了数学的适用领域与活动空间,使数学学习与问题解决的探索过程相统一。伴随数学实验在我国高校的广泛开设,尽管已有不少数学实验方面的教材,然而,对于数学实验课程的教学内容、方法与教材等诸多问题尚无统一的认识,仍有待广大数学教育工作者的进一步探索和实践。本书编者基于多年大学数学与数学实验课程的教学实践,从多次使用的数学实验讲义及相关教材中选取若干有代表性的问题,改编为数学实验典型案例,力求体现如下特色:

1. 以“问题驱动、实践育人、交叉应用与能力培养”的实验教材编写理念为导向;
2. 案例分别选自大学数学的三门核心课程,即高等数学、线性代数、概率统计中的相关问题,其目的是使实验案例能够与大学数学相关课程相呼应,更好体现大学数学的应用性;
3. 案例的选取突出问题的代表性、方法的综合应用性与学科的交叉应用性;
4. 将建模实验与计算实验融入到案例中,通过实验探索过程培养把实际问题抽象成数学模型以及提出问题与解决问题的能力;
5. 理论分析与实践探索相结合,使“学、思、做”有机统一,更好体现问题解决的认识规律。

访问高等教育出版社易课程网站 <http://abook.hep.com.cn/41467> 可免费下载本书的配套资源,包括源程序和程序运行结果。

本书案例 1,2,3,4 由温旭辉编写,案例 5,6,7,8 由刘小兰编写,案例 9,10,11,12 及附录由黄平编写,前言由黄平执笔,作者排名不分先后(按拼音顺序)。在本书编写过程中始终得到我校相关部门的大力支持与鼓励,并得到“广东省数学技术实验教学示范中心”建设项目的经费资助。特别是,在编写过程中我院杨启贵教授对本书的组织编写与出版工作给予了热心指导与大力帮助。此外,书中部分实验材料来自杨俊、明宗峰、熊赞晖、陈文革、陶晶等,借此一并表示感谢。

由于编者水平所限,加之时间仓促,误漏及不尽如人意之处在所难免,竭诚欢迎广大读者批评指正。

编 者
2014 年 3 月

目 录

案例 1 数据拟合	1
实验目的和意义	1
1.1 基本概念	1
1.2 Fibonacci 数列	5
1.3 化学反应中生成物的浓度问题	12
实验练习 1	18
案例 2 微分方程	20
实验目的和意义	20
2.1 基本概念	20
2.2 单自由度阻尼系统	24
2.3 问题的解析解	26
2.4 用 ODE 求数值解	27
2.5 模拟弹簧的实际振动过程	31
2.6 有持续外力作用时的情况	33
实验练习 2	35
案例 3 分形实例	36
实验目的和意义	36
3.1 基本概念	36
3.2 Koch 曲线	39
3.3 Sierpinski 地毯	42
3.4 分形树木	45

3.5 函数迭代与分形	47
3.6 结论与应用	49
实验练习 3	50
案例 4 插值方法	51
实验目的和意义	51
4.1 基本概念	51
4.2 水塔供水问题	57
4.3 水塔供水问题的数据处理	58
4.4 对数据做插值处理	60
4.5 插值与拟合效果对比	62
4.6 对结果的检验与应用	64
实验练习 4	68
案例 5 矩阵的运算	70
实验目的和意义	70
5.1 基本概念	70
5.2 投入产出问题	72
5.3 Hill 密码加密解密问题	79
实验练习 5	84
案例 6 线性相关性	87
实验目的和意义	87
6.1 基本概念	87
6.2 调味品配置问题	88
实验练习 6	98
案例 7 线性方程组	100
实验目的和意义	100
7.1 基本概念	100

7.2	经济学中的齐次方程组	101
7.3	交通网络流问题	103
7.4	一年生植物的繁殖问题	107
7.5	结论与启示	110
	实验练习 7	110
案例 8	特征值与特征向量	113
	实验目的和意义	113
8.1	基本概念	113
8.2	捕食者 - 被捕食者问题	115
8.3	斑点猫头鹰的生存问题	119
8.4	结论与启示	123
	实验练习 8	123
案例 9	古典概型	126
	实验目的和意义	126
9.1	基本概念	126
9.2	点数问题	127
9.3	二项分布	136
9.4	中心极限定理	143
	实验练习 9	146
案例 10	蒙特卡罗方法	147
	实验目的和意义	147
10.1	基本概念与方法	147
10.2	蒲丰投针问题	149
10.3	定积分计算问题	152
10.4	存储控制问题	155
	实验练习 10	166
案例 11	回归分析	169

实验目的和意义	169
11.1 基本概念	169
11.2 一元线性回归	169
11.3 多元线性回归	174
11.4 逐步回归	181
11.5 非线性回归	187
实验练习 11	189
 案例 12 贝叶斯统计建模方法	 192
实验目的和意义	192
12.1 基本概念	192
12.2 Alarm 问题	195
12.3 贝叶斯决策	197
12.4 贝叶斯判别	203
实验练习 12	212
 附录 MATLAB 运算符及常用指令	 215
 参考文献	 224

案例1 数据拟合

实验目的和意义

- 掌握 MATLAB 软件中进行数据显示的方式;
- 了解 MATLAB 软件中进行数据拟合的方式;
- 认识 Fibonacci 数列, 体验发现其通项公式的过程.

1.1 基本概念

1. 数据可视化

将离散的数据: $F_1, F_2, F_3, F_4, \dots, F_n, \dots$, 看成平面坐标系里的点列: $(1, F_1), (2, F_2), (3, F_3), (4, F_4), \dots, (n, F_n), \dots$, 然后利用 MATLAB 软件的 plot 函数, 在平面坐标系里划出一条折线, 就可以实现离散数据的可视化. plot 函数的基本使用格式为

函数: `plot(x, y, 's')`

功能: 将所给的点列, 连接成一条折线. 当点较多时, 就是曲线.

说明: (1) x 为点列的横坐标, y 为点列的竖坐标, 二者是同长度的数值向量或数值矩阵; 's' 是图形的格式字符串.

(2) 横坐标可缺省, 默认为自然数. 格式字符串也可以缺省, 系统会自动调节.

(3) 增加一对坐标, 就多画一条曲线.

例 1 画出数据点 $1^3, 2^3, \dots, 10^3$ 的折线图.

代码: `y = 1:10; y = y.^3; plot(y)`

运行结果: 图 1-1.

说明: y 是数组, 乘方运算用的是“`.^`”.

例 2 画出数据点 $\frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2}, \dots, \frac{1}{20^2}$ 的折线图。

代码: `n = 5:20; n = 1./n.^2; plot(n)`

运行结果: 图 1-2。

说明: 注意里面的“.”与“/”运算。

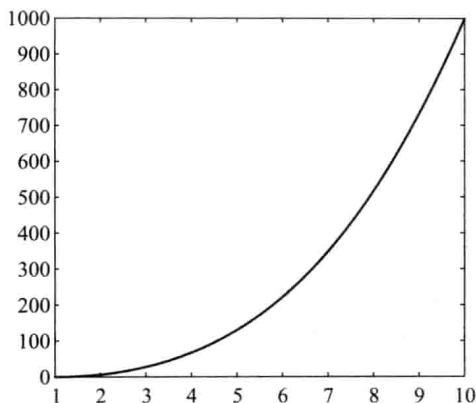


图 1-1 n^3 折线图

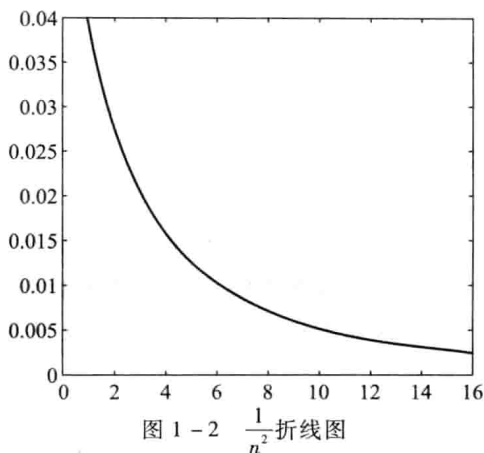


图 1-2 $\frac{1}{n^2}$ 折线图

2. 数据拟合

数据拟合就是寻找一个目标函数, 作为被拟合数据的近似函数关系. 目标函数的类型, 可以是多项式、指数函数等。

作数据拟合, 首先需要估计目标函数的类型, 这一点可以通过数据可视化来观察得到, 而一阶多项式是最常见的目标函数, 此时称为线性回归, 确定拟合系数的原则是最小二乘法, 即所有误差的平方和取最小值。

在 MATLAB 软件中以多项式为目标函数作数据拟合的函数是 `polyfit`, 它的基本使用格式为

函数: `polyfit(x, y, n)`

功能: 用 n 阶多项式拟合数据列 (x, y) , 使得在数据点处误差的平方和最小。

说明: 参数 x 和 y 都是数组, 里面是数据列的横坐标和竖坐标; 参数 n 是指定多项式的阶, 在实验中参数 n 通过对数据列的分析而得到。

例 3 对给定的数据列做 2 阶多项式拟合。

代码: `x1 = [1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10];`

`y1 = [10, 5, 4, 2, 1, 1, 2, 3, 4];`

`p1 = polyfit(x1, y1, 2)`

运行结果: `p1 = 0.2676 -3.6053 13.4597`

说明:返回的结果只是所得多项式的系数,次序是从高阶到低阶.多项式完整的形式为

$$p1 = 0.2676x^2 - 3.6053x + 13.4597.$$

例4 对函数 $y = \ln(1+x)$ 做3阶多项式拟合.

代码: `x2 = 0:0.1:1;`

`y2 = log(1+x2);`

`p2 = polyfit(x2,y2,3)`

运行结果: `p2 = 0.1079 -0.3974 0.9825 0.0004`

说明:多项式完整的形式为

$$p2 = 0.1079x^3 - 0.3974x^2 + 0.9825x + 0.0004.$$

例5 对例3的数据点和拟合曲线作图,观察拟合效果.

代码: `plot(x1,y1,'ro',x1,polyval(p1,x1))`

`legend('数据点','拟合曲线');`

运行结果:图1-3.

说明:参数'ro'表示数据点用红色的小圆圈标示;`legend(s1,s2,...)`,为当前图形添加对应的图例.

在图1-3中,可以观察到数据点和拟合曲线的偏离程度.

例6 对例4的数据点、原曲线和拟合曲线作图,观察拟合效果.

代码: `plot(x2,y2,'ro',x2,log(1+x2),'g',x2,polyval(p2,x2),'b')`

`legend('数据点','原曲线','拟合曲线');`

运行结果:图1-4.

说明:参数'ro'表示数据点用红色的小圆圈标示;`legend(s1,s2,...)`,为当前图形添加对应的图例.

在图1-4中,可以观察到拟合效果非常好.

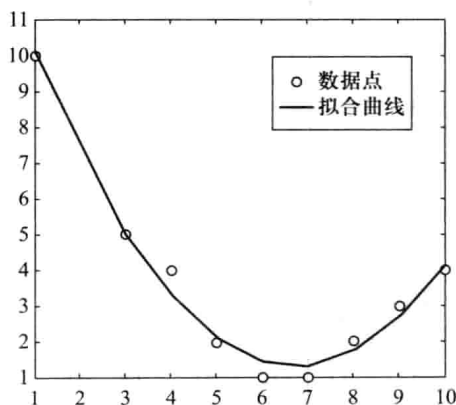


图1-3 2阶拟合曲线

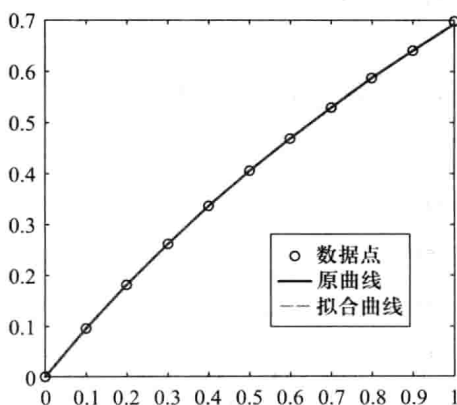


图1-4 3阶拟合曲线

例 7 表 1-1 是纽约黑鲈的体重 W 与体长 L 之间的一组测量数据, 试拟合出体重 W 与体长 L 之间的函数关系。

表 1-1 黑鲈的体重 W 与体长 L 测量数据

$W(\text{ozs})$	17	17	23	27	41	49
$L(\text{in})$	12.50	12.63	14.13	14.50	17.25	17.75

(1) 所给数据之间关系的散点图

代码: $L = [12.5, 12.63, 14.13, 14.50, 17.25, 17.75]$;

$W = [17, 17, 23, 27, 41, 49]$;

`plot(L, W, 'r +')`

`xlabel('体长'); ylabel('体重');`

`legend('体重与体长关系散点图')`

运行结果: 图 1-5.

(2) 选择 3 阶多项式, 先数据拟合

代码: `p = polyfit(L, W, 3)`

运行结果: 0.42932 -18.709 274.49 -1329.8

即

$$W = 0.42932L^3 - 18.709L^2 + 274.49L - 1329.8.$$

(3) 拟合曲线与原始数据对比图

代码: `plot(L, W, 'r +', L, polyval(p, L))`

`xlabel('体长'); ylabel('体重');`

运行结果: 图 1-6.

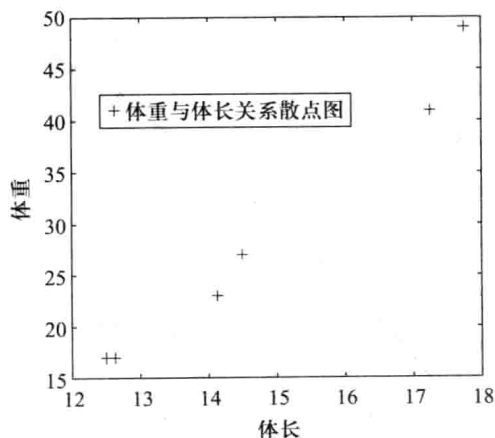


图 1-5 黑鲈数据散点图

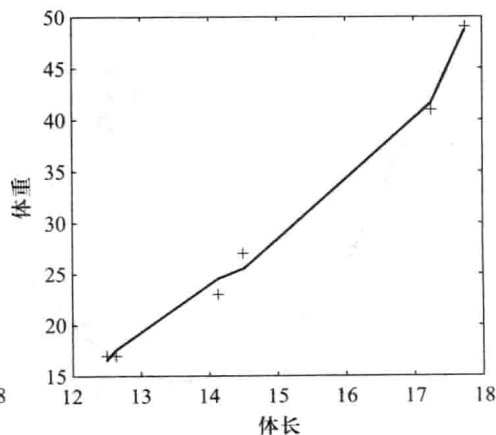


图 1-6 黑鲈数据拟合曲线

1.2 Fibonacci 数列

1. 问题描述

某人养了一对兔子,一个月后生育了一对小兔.假设小兔一个月后就可以长大成熟,而每对成熟的兔子每月都将生育一对小兔,且假设兔子不会死亡.问:一年后共有多少对兔子?

这个问题,最早由意大利数学家斐波那契(Fibonacci)于1202年在其著作《珠算原理》中提出.根据问题的假设,兔子的每月对数是如下数列:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

问题的答案就是此数列的第12项,即一年后共有144对兔子.

这个数列通常被称为斐波那契(Fibonacci)数列,研究这个问题就是研究Fibonacci数列.对这个问题作更深入的研究,我们会问:第 n 个月后,总共有多少对兔子?即Fibonacci数列的第 n 项是多少?

这就需要我们探索Fibonacci数列的通项公式.根据问题的描述,我们知道第 $n+2$ 个月后兔子的对数,等于第 $n+1$ 个月后兔子的对数(表示原来就有的老兔子对数),加上第 n 个月后兔子的对数(表示生育出来的新兔子对数).这样就得到关于Fibonacci数列的一个递推公式:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

有了这个递推公式,使用数学方法就能够得到这个数列的通项公式如下:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

这个公式是法国数学家比内(Binet)早在1843年发现的,称为比内公式.有了这个公式后,第 n 个月后兔子的对数,就是计算 F_n .

2. 实验过程

从数学上得到Fibonacci数列的通项公式,并不是本实验的目的.我们的目的是在现代先进计算技术的平台上,探讨一些寻找数据内在规律的方法,这些方法能够广泛用于处理和分析各种数据,例如实验数据、统计数据等,而不仅仅是只针对数列.

MATLAB软件具有非常强大的数据可视化功能,利用可视化功能将Fibonacci数列显示成平面曲线的形式后,可以更直观地观察其变化规律;根据观

察结论,利用 MATLAB 软件的数据拟合功能,可以大概知道 Fibonacci 数列的函数关系式。

本试验将 Fibonacci 数列的有限项,看成是待处理的数据。首先利用 MATLAB 软件的可视化功能,将这些数据显示在平面坐标系中,观察其图形类似什么曲线,结论是:指数函数的曲线。进一步,利用指数函数与对数函数的互逆关系,将原有数据取对数,再观察其曲线形状是否类似直线,以验证原来的观察是否正确。通过观察到的目标函数,再利用 MATLAB 软件的数据拟合功能,得到 Fibonacci 数列通项公式的近似关系。

实验 1 观察数列的大概函数关系

为了研究 Fibonacci 数列的变化规律,取此数列的前有限项来观察。利用 MATLAB 软件的数据可视化功能,将这些数据显示在平面坐标系中,观察其中蕴涵的函数关系。

为了调用方便,我们设计了一个函数来实现上述功能,具体代码如下:

```
function fib1(n) %显示 Fibonacci 数列前 n 项
    fn = [1,1]; %将数列的前两项放到数组 fn 中
    for i = 3:n
        fn = [fn,fn(i-2) + fn(i-1)]; %将第 i 项添加到数组 fn 中
    end
    plot(fn) %画曲线
```

将这个文件保存在 MATLAB 的当前目录下,文件名记为 fib1.m。在这个函数里,n 是输入参数,在调用时根据需要赋具体的值,调用方式与系统内部函数相同。

(1) 选择 $n = 30$,调用上述函数画图:

代码: `fib1(30); legend('n = 30');`

运行结果:图 1-7。

(2) 选择 $n = 50$,调用上述函数画图:

代码: `fib1(50); legend('n = 50');`

运行结果:图 1-8。

(3) 选择 $n = 500$,调用上述函数画图:

代码: `fib1(500); legend('n = 500');`

运行结果:图 1-9。

(4) 选择 $n = 1000$,调用上述函数画图:

代码: `fib1(1000); legend('n = 1000');`

运行结果:图 1-10。

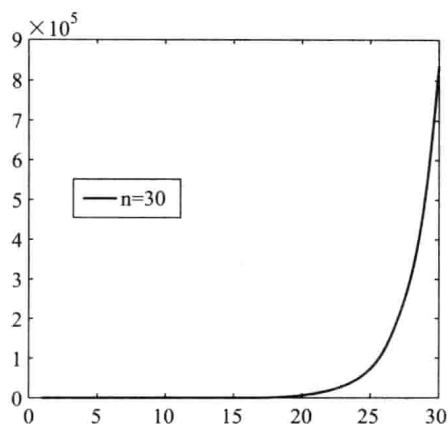


图 1-7 数列前 30 项

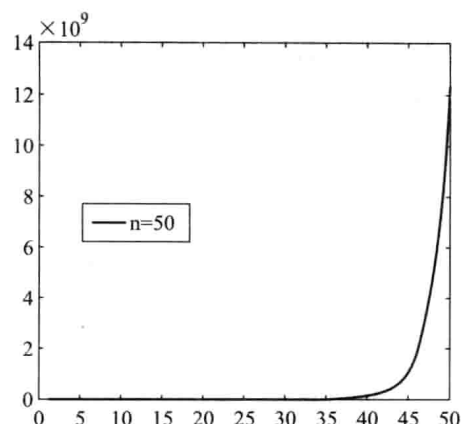


图 1-8 数列前 50 项

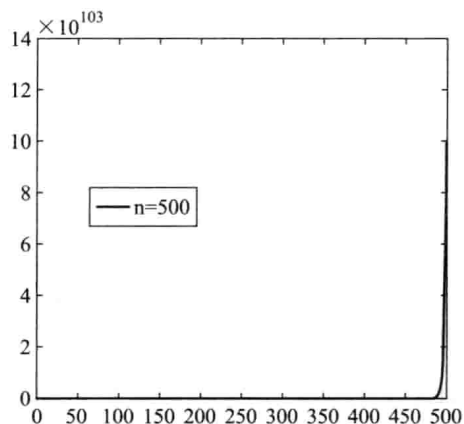


图 1-9 数列前 500 项

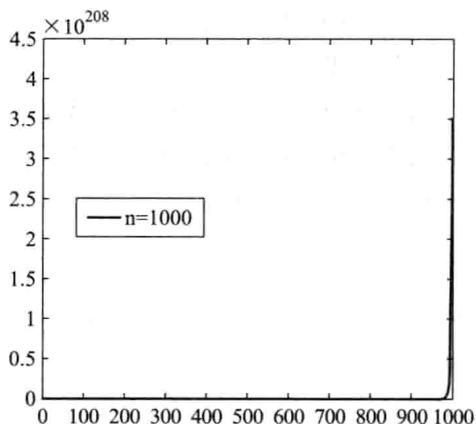


图 1-10 数列前 1000 项

(5) 初步结论

经过反复观察,可以看到曲线上升的速率非常快,远远快过 n 增大的速率,图 1-9 和图 1-10 更加明显,其后段几乎就是垂直上升. 而常见的函数中,上升速率最快的应该是指数函数,故初步猜测 Fibonacci 数列通项公式的函数关系应该近似为指数函数. 读者可以取更多的参数 n 的值,反复观察寻找规律.

实验 2 进一步验证上述结论

经过上一步的观察,可以先假设这些数据是指数函数的形式. 为了进一步验证这个结论是否正确,可以利用指数函数与对数函数的互逆关系. 如果这些数据确实是指数函数的形式,则经过取对数后应该是一个线性关系,即一阶多项式,