

中学教学研究



# 中学成功教学法体系

3公共科(语、数、外)卷③⑥

## 中学数学习题教学与练习作业指导

数学卷⑫

内蒙古大学出版社

3+2 中学成功教学法体系·360例卷之10

中学数学

习题教学与练习作业指导

本书编委会



内蒙古大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

中学教学研究:3+X 中学成功教学法体系/冯晓林主编. —呼和浩特:内蒙古大学出版社,2000.9

ISBN 7-81074-150-0

I. 中… II. 冯… III. 中学—教学法—研究  
IV. G632.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2000)第 71531 号

书名	中学教学研究:3+X 中学成功教学法体系
主编	冯克诚
责任编辑	莫久愚
封面设计	伍禾工作室
出版	内蒙古大学出版社 呼和浩特市大学西路 235 号(010021)
发行	内蒙古新华书店
印刷	北京市社科印刷厂
开本	850×1168/32
印张	736
字数	18464 千字
版期	2000 年 9 月第 1 版 2000 年 9 月第 1 次印刷
标准书号	ISBN 7-81074-150-0/G·14
定价	全 100 册 1580.00 元 (3 公共科语数外卷 47 册分价:750.00 元)

本书如印装质量问题,请直接与出版社联系

# 目 录

## 中学数学习题教学与练习作业指导

习题的功能 .....	(1)
课堂教学中的基础训练 .....	(6)
数学教学中“借题发挥”的意义和方法 .....	(9)
例(习)题的全方位教学 .....	(12)
例题教学的反思环节 .....	(17)
如何准备习题课 .....	(19)
数学新授课的课内练习 .....	(21)
课本习题的演变与引伸 .....	(25)
数学练习题的选择(一) .....	(29)
数学练习题的选择(二) .....	(31)
数学课堂练习题的选择方法 .....	(33)
数学课堂练习题的设计和处理 .....	(35)
拓展课本命题的几种方法 .....	(38)
补充习题八原则 .....	(41)
数学趣题的认识与选择 .....	(43)
选编课堂例、习题的几点要求 .....	(45)

课后思考题的设置 .....	(49)
教材例习题的教学处理方法 .....	(51)
习题串联的方法 .....	(54)
编拟数学新题方法 .....	(56)
数学习题编拟中“陷阱”的运用 .....	(61)
数学题组的编选与运用 .....	(64)
引导初中学生参与编题 .....	(70)
“课后练习”的作用 .....	(74)
分层次设计数学课堂练习 .....	(78)
多层次数学作业 .....	(81)
数学命题中设置探究学习情境 .....	(85)
题目变式与能力培养 .....	(88)
“变式训练”的设置原则 .....	(91)
变式训练的组织 .....	(94)
提高数学作业质量的八条基本要求 .....	(96)
学生的作业心理及教学对策 .....	(98)
降低作业失真率 .....	(100)
“分类推进,全面提高”作业法 .....	(104)
数学作业要求“四字经” .....	(106)
数学作业本的多种功能及其发挥 .....	(107)
每日练应注意的三个问题 .....	(110)
数学作业设计的五个“度” .....	(113)
“听得懂,但不会做”现象剖析 .....	(115)
“六分制”作业批改法 .....	(117)
改革数学作业批改方式 .....	(118)

数学作业批改模式的改革·····	(119)
数学作业的处理方法·····	(123)
数学作业批改的三级批改落实订正方法·····	(125)
初中数学作业批改方法·····	(126)
数学作业的分层次面批方法·····	(129)
作业批改中批语的形式·····	(131)
怎样写好数学作业批语的“八性”·····	(133)
中学数学教学的“重复练习”·····	(138)
题海“战术”与中学数学教学·····	(140)
走出数学“题海”的对策(一)·····	(143)
走出数学“题海”的对策(二)·····	(145)
数学解题中的心智活动·····	(147)
数学解题教学“四耦合”心理机制·····	(151)
数学解题教学的设计与实验·····	(155)
解题决策及其教学途径·····	(160)
数学模式辨认与解题策略·····	(167)
解题策略的教学·····	(172)
解题模式的本质·····	(177)
中学数学解题的规范性训练·····	(179)
学生解题“防漏”的指导方法·····	(182)
审题及其教学·····	(186)
数学审题能力的培养与训练·····	(189)
一题多证在课堂中的操作·····	(191)
寻找数学解题捷径的五种方法·····	(194)
寻求数学题简便解法的九条途径·····	(197)

初中学生错解的心理·····	(203)
数学验算的作用与地位·····	(206)
检验解答的几种常用方法·····	(210)
数学检验十法·····	(214)
数学解题思维的起步方向·····	(216)
解数学题常用的六种思维方法·····	(220)
例题教学与思维能力培养·····	(226)
数学解题后的“反思”与指导(一)·····	(229)
数学解题后的“反思”与指导(二)·····	(234)

# 中学数学

## 习题教学与练习作业指导

### 习题的功能

数学习题是数学课本的重要组成部分。在数学教学中,习题配备得好不好,解题教学方法是否恰当,直接影响着学生学习质量的高低。在数学教学中,由于长期来受到赫尔巴特的传统教学思想的影响,将传授知识作为教学的主要任务,把发展智力放到次要地位,因此在习题的配备和习题教学上都存在着不少问题。在习题的配备上有以下一些缺陷:

(1)习题主要用于巩固和复习所学的知识 and 培养技能、技巧,而缺少培养学生的思维方法,发展数学水平,激发求知兴趣的习题;

(2)习题的形式单调重复,例题、练习题、习题,复习题形式类似;

(3)缺少富有思考性的综合题和讨论题。

(4)联系实际的习题不多。

在习题教学上存在着以下缺陷:

(1)采用“大容量”的练习,企图通过反复多练来强化所学知识和技能、技巧,使得很多学生在长期的“超量”作业下对数学产生厌倦情绪;



(2)过份强调题型和技巧,教师将自己所收集到的各种题型不厌其烦地讲给学生听,致使学生记忆负担过重,难以抓住解题的“灵魂”;

(3)忽视解题思路的分析和数学思想的揭示,热衷于讲方法、套类型,学生长期处于记忆模仿型的练习之中,致使学生解题水平层次不高,思路狭窄,缺少灵活变通的本领;

(4)通过习题教学来发展学生的创造性思维和思维品质受到忽视。

数学习题的配备和教学中存在的问题是与人们的教学思想分不开的,因此许多教育家和数学教学工作认为,只有在思想上明确了习题在数学教学中的地位和作用,才能从根本上解决数学习题中存在的问题。

苏联的奥加涅相在他所编著的《中小学数学教学法》一书中详细地论述了习题在数学教学中的作用与地位,并根据中学数学课的基本任务提出数学习题的主导功能应该是:

(1)教学功能:指通过数学习题帮助学生建立基本概念,概念之间的各种联系;了解数学的主要思想、定律、法则、原理以及它们之间的联系;掌握运用相应的术语、符号的技能、技巧,把教学内容模型化的技能技巧,运用仪器、仪表、表格、教学用书和手册等书籍的技能技巧。

(2)思想教育功能:指通过数学习题培养学生的辩证唯物主义世界观和创造性素质,培养爱国主义精神,进行审美教育。

(3)发展功能:指通过习题发展学生的思维(其中包括培养他们的科学理论思维能力)和使其掌握脑活动的有效手段。

(4)检查功能:指通过习题确定教与学的水平,检查学生独立学习数学的能力以及求知欲的高低。

近几年来我国也有不少数学教育工作者从事习题理论的研究。浙江教育学院戴再平在他所写的《数学习题理论》一书中提出了数学习题的三个功能:

(1)知识功能,通过数学习题引入新知识,巩固新知识,运用新知识;

(2)教育功能,包括发展学生的智力因素与非智力因素以及给学生以美的陶冶;

(3)评价功能,包括知识水平的评价和能力的评价。

由于大多数的数学教育工作者都同意在数学教学中要使知识与能力得到协同发展,使智力因素与非智力因素都能得到发展,因此从理论上讲,数学习题应具有知识功能、教育功能、发展功能、评价功能,还是容易为大家所接受的。问题是在习题教学中怎样才能使习题的各种功能作用得到发挥,这并非是一件易事,它既涉及到习题的配选问题,又涉及到习题的教学问题。

以习题的配选上,南京师大郑君文等编著的《数学教育学》提出了四条原则:

(1)适用性原则。编选的习题既要符合教学大纲的要求,又要适合学生的实际水平,在习题的数量、难易程度、不同阶段的不同要求和提高解题技能方面都要有的放矢。

(2)巩固性原则。编选的习题应有利于理解、巩固和复习已学过的基本知识,形成技能技巧。

(3)实践性原则。编选的习题有利于培养解决实际问题的能力,培养学生面向实际的习惯,以及理论联系实际的工作作风。

(4)发展性原则。应围绕发展思维,开发智力这一目的,编选那些包括科学方法运用,反映逻辑素养,培养创造力的习题。

奥加涅相从数学问题的结构出发,将数学题分为四类:

(1)标准性习题。题目中条件、结论、解法、解题根据四个基本要素都是学生知道的习题。

(2)训练性习题。条件、结论、解法、解题根据四个基本要素中有一个要素是学生不知道的(或不明确的)。

(3)探索性习题。上述四个基本要素中有两个要素是学生不知道的习题,

(4)问题性习题。上述四个要素中有三个不为学生所知的题。奥加涅相认为,学生数学思维能力的形成,主要取决于他们解探索性习题和问题性习题的能力,因此他主张在习题的配选时,除掉以训练性题为基础外,还应有一定数量的探索性习题和问题性习题,以促进学生数学思维的形成和发展。著名的数学教育家波利亚也指出:“掌握数学意味着什么呢?这就是说善于解题,不仅善于解一些标准题,而且善于解一些要求独立思考、思路合理、见解独到和发明创造的题。”

近几年来,我国数学习题集是编得不少,可惜的是,编选这些习题集时并没有按照上述编选习题的原则来进行,绝大多数都是陈题的汇集,这种习题集编得越多,学生的负担就越重。根据数学教育的形势和要求,迫切期望着有更多的同志参加到习题教学改革中来,根据教学大纲的要求,建立起一套具有知识功能、教育功能、发展功能、评价功能的习题系统,从本质上改变原有的陈旧的习题系统,使学生从“题海”中解脱出来,有效地提高数学的学习质量。

在习题教学上,近十年来我国许多学者和教师在这方面进行了比较深入的研究,并且取得了不少成果。他们从不同的研究角度对习题教学提出了许多有益的意见。扬州中学张乃达在他所著的《数学思维教育学》一书中,从思维的角度谈了使习题教学适应发展要求的方法,主要有:

(1)在例题的配置上,以探索性问题为主。从培养学生创造性思维能力的目的出发,为了贯彻过程性原则,以第二时态(由探索性问题转化为训练性问题)为中心,即以探索性问题为中心组织解题教学比较适宜。这是因为在第一时态(由问题性题转化为探索性问题)中,思维过于发散,不利于激发学生积极的具有强烈指向性的思维活动,在第三时态中,思维过于集中,且面临的并不是创造性任务,不利于创造性思维的培养,而在第二时态中,思维具有明确的方向,又有足够的发散性,因此最具有训练的价值。

(2)在解题环节上,突出探索活动。解题的教学重点应该放在解题思路探索的过程中,放在解题方法被发现的过程中,这成为决定解题教学成败的关键。在解题教学中只有突出探索这一解题环节,才能使学生真正受到教益。

(3)在思维层次上,注意问题的概略解决。所谓概略解决,既指对问题的一般性解决与功能性题决(或者说解决问题的一个计划或一种设想),它们是解决问题过程中两个重要的思想层次,对于特殊性解决起着奠基作用。数学观念系统和直觉思维能力在解题活动中的指导作用,主要就表现在这两个思维层次之中。因此,突出这两个思维层次,对于暴露数学思维活动过程和发展学生数学观念系统都有重要意义。有的同志指出:在习题教学中,题型的总结和技巧的介绍是必要的,它可以给学生以解题的捷径,但是,这仅是开始,而不是最终目标,习题的最重要的功能是发展学生的数学能力。因此,在解题过程中必须让学生充分发挥思考的作用,来发现新情境中的基本关系,重新组合已有的知识经验,领悟新的关系,探索解题的途径,使解题过程成为高级思维活动的过程。解题教学就是要教给学生思考方法,将教师的思维过程自然地交给学生(包括分析失败的思路),使学生能从解题过程中学习思维方法,这是可以“变化”的方法,比解题技巧具有更大的威力。以上这些同志的论点和看法对我们改革习题教学都有着重要的参考价值。

目前在数学习题教学中存在的套类型、套方法和采用“大容量”的练习等做法已经带来了不少恶果,它影响青少年的身心发展,阻碍着他们思维的发展和良好的思维品质和形成。但由于它在升学考试中还起着一定的作用,因此还有不少人对它有兴趣。要从根本上解决这个问题,一方面在高考制度和命题方面加以改革,另一方面必须通过实践总结出一套有效的习题教学的方法来代替原来的陈旧的方法。因此,建立我国的习题理论,编选出一套具有多种功能作用的习题系统,创造出一套行之有效的习题教学方法,已成为数学教学中急待解决的问题之一。

## 课堂教学中的基础训练

数学教学过程,大体可以分为知识发生和应用这两个过程,前者指揭示和建立新旧知识内在联系,使学生获得知识的过程,后者指课堂上应用基本知识解决问题的训练过程。教师在新授知识结束后,接下来的主要工作就是基础训练。常州市教研室吕听听、常州市二十六中金崇奋老师介绍了提高课堂基础训练的效益做法:

### 1. 训练的目标要明确

课堂基础训练应着重训练本节课所反映的基本概念、基本规律、基本方法,决不要把特殊技巧看作训练的主要内容。例如在因式分解教学中,掌握基本方法——提取公因式法、公式法、分组分解法是今后学习分式和解二次方程的关键,其中提取公因式法和公式法又是学习分组分解法的基础。如果在学生基本方法还未掌握的前提下,就出现高难度的技巧题,这样必然造成两极分化。因此教师要搞好基本技能训练就必须认真钻研教材,搞清哪些是基本技能,应加强训练;教师对一类技能的形成应该用哪几类变式题目,用多少数量训练就够了,都应认真考虑。

### 2. 正确把握训练的“度”

教师要根据不同的教学阶段,配备不同层次的基础训练内容,严格把握好训练的广度和深度。

初中代数课本中许多内容,如绝对值、因式分解、方程解法、函数的研究是逐步引入、逐步加深的。教师切忌在学生数学知识还不具备的情况下急于求成。例如绝对值在有理数一章的教学,重点是解决有理数的运算。如果过早提出含字母代数式的绝对值讨论,势必造成学生认识上的困难,同时还将影响学生对绝对值概念本身的理解。

### 3. 让学生成为训练的主体

当前在训练方法上机械性的模仿和重复占多数,通常的模式是:教师陈述法则,然后举出例题(这种典型例题常常是面面俱到的),最后学生进行模仿性练习、完成作业。在这种学习过程中,作为学习主体的学生处于被动地位,观察、分析、探索、归纳、总结都由教师代替,学生只是接受现成的结论,然后加以记忆。事实上,学生从理解法则公式到掌握公式形成运算技能,是一个认识不断深化的过程,这种过程不是机械性的重复所能奏效的。

例如,二次函数解析式的确定,有些教师分五大类型,各种类型例子详讲一个,粗讲一个,学生再练一个,然后小结。在学生对数学概念、数学方法并未真正理解,解题的思路也未掌握的情况下。教师把题目类型分得过细,一类题目一个方法,让学生死记住这些方法然后反复练习,其结果是使学生思维僵化,解题能力得不到真正提高。

我们在研究课上突破的这个模式:首先复习了二次函数解析式的两种形式,即

$$y = ax^2 + bx + c,$$

$$y = a(x + m)^2 + n。$$

通过复习使学生明白确定一个二次函数需要三个条件,然后让学生回忆一次函数解析式的求法,接着便展示两组题目让学生思考、分析。整个教学过程,让学生紧紧抓住基本公式和基本思想(寻找决定二次函数的三个条件),在思维方法上注意了几何条件和代数条件的转化。由于学生进行了大量的思维活动,自己动脑、动手,发现问题,解决问题,所以收到了较好的效果。

### 4. 设计好训练的层次

在基础训练中,教师应根据由易到难、由简单到复杂循序渐进的原则,设计好训练序列。例如,讲公式  $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ , 教师可以把下面几组练习有步骤地交给学生:

1.  $(2a + b)(2a - b)$ ,

$$\left(\frac{1}{2}x+y\right)\left(\frac{1}{2}x-y\right),$$

$$\left(0.5-\frac{1}{3}p\right)\left(0.5+\frac{1}{3}p\right);$$

$$2. (x^3 - x^2)(x^3 + x^2),$$

$$(m^3 + n^3)(n^3 - m^3),$$

$$(p^2q^3 - 2)(p^2q^3 + 2);$$

$$3. (3a^2 + 2b)(3a^2 - 2b),$$

$$\left(\frac{3}{4}x^3 - a^3b\right)\left(\frac{3}{4}x^3 + a^3b\right),$$

$$(2a^{n+1} - b^{n-1})(b^{n-1} + 2a^{n+1});$$

$$4. (-a - b)(a - b),$$

$$(a - b + c)(a + b - c),$$

$$(m + n + 1)(m - n - 1)(m + n - 1)(m - n + 1).$$

其中每一组练习都是有目的地把公式的使用范围扩大,使学生通过观察、实践逐步加深对公式的理解;同时在处理系数、指数、括号、变号等问题上逐步加大难度,促使学生的技能同步增长。

最后可安排如下练习:

$$5. (2a - 3b^2)(2b^2 + 3a),$$

$$(-3x^2 - y)(3x^2 - y),$$

$$(3a - 2b - 1)(3a + 2b - 1),$$

$$(p^2 + p + 1)(p^2 - p - 1).$$

学生由于多次重复使用这个公式,受到思维惯性的影响,而省略了“能否使用这个公式”的判断过程。通过(5)的训练,可以使学生感受到先判断,再使用公式这个完整的思维过程的重要。

以上这种技能训练的过程是一种符合学生认识规律的有序发展过程,它的效果大大优于无序的大量机械性重复的枯燥训练过程。

### 5. 注重学生思维素质的提高

基础训练,要注重必要的推理、思维训练,不要只重视操作性的机械训练。例如,学生学习有理数加法法则,可以进行如下训练:

(1)分析加数的符号和绝对值,(2)判断用哪条加法法则,(3)计算绝对值和决定和的符号。

通过这样的训练过程,一方面加深学生对法则本身的理解(和头脑中已有的算术运算法则建立实质性联系),又促使学生科学思维方法的形成。

## 6. 基础训练还是要强调依靠课本,挖掘课本例题、习题的教学功能

有些教师搞基础训练,喜欢抛开课本,另外去寻找资料,这样习题往往难度较高,代表性差,偏离了基本概念、基本方法。为了搞好基础训练,教师要善于揭示课本例题、习题的方法因素,并要让学生提炼出题中蕴含的数学观念和数学思想。

## 数学教学中“借题发挥”的意义和方法

“借题发挥”的本意是:“假借某事作由头,发表与此事无关的议论。”在生活中很多场合,我们只能就事论事,不能借题发挥,但在数学教学中却需要让这条成语产生出积极的意义。

数学教学中的大部分时间是讲解题目,讲解题目的大忌是不作任何铺陈的就题论题。优秀数学教师的高明之处就在于他们能巧妙而有机地借题发挥,睢宁县中学黄安成老师总结借题发挥的内容至少有以下几个方面。

### 1. 巩固基础知识

这是众所周知的,这里仅强调一下要做到纵横联系。如解题时用到复平面中的公式  $\overrightarrow{Z_1Z_2} = z_2 - z_1$ ,就应该联系到解几中有向线段的数量公式  $AB = x_2 - x_1$  和一条直线到另一直线的角的公式  $\operatorname{tg}\theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2k_1}$ ,然后将它们用“终一起”这一公共形式固定下来,以便形成牢固的知识结构组块。



## 2. 熟练基本技能技巧

讲解题目时,教师对所用的技能技巧要及时归纳、提炼。特别是一些典型的被称为“通法”的技能技能,如解不等式的“轴序法”,求轨迹方程的“反代法”,广泛使用的“三角代换法”,求面积、体积的“换底法”等,都是由所讲解的题目引出来的,那么就应分析其特点,总结其步骤,和学生一道来命名或概括浓缩成便于记忆和运用的口诀。以后再次使用时,还要不断强化、反复锤打,使这些技能技巧深深扎根于学生脑中。

## 3. 树立基本数学思想

基本数学思想是题解的灵魂,基本数学思想的掌握,是学生提高数学素质的根本。就题论题决不能实现此项目标,必须以题目为载体,充分揭示题解中所蕴含的基本数学思想,久而久之,所讲解的题目也许渐渐被遗忘,但其中的基本数学思想却牢牢树立于学生脑际,永远萦绕于心头。只要相关的问题情境一出现,它们就立即自然而然地被采用,并迅速使问题解决。

## 4. 分析思路,提高学生的思维能力

就题论题地讲解题目,只能算是教师解题的“绝活表演”,学生则充当了一个喝彩看热闹的角色。学生固然想知道题目是如何解出来的。但他们更想知道解题高招是如何想出来的。所以要将探索、试验、猜测、对比、联想等过程充分向学生展示,一次成功固然可喜,但若误入歧途,在改弦易辙之后获得的成功则更足珍贵。通过分析,要让学生感到解题思路原来是那么自然、流畅、和谐,从而达到华罗庚教授所说的“艰难化易是坦道”的境界。不然的话,学生的收益就甚微了。