

10年
典藏版

探究应用
新思维系列丛书

十年经典 畅销千万
同类图书市场领袖品牌

探究应用

新思维

黄东坡◎著

数学 9 年级

蔚蓝的思维 清澈的理性
深邃的探究 旷远的应用

探究应用

新思维

黄东坡◎著

数学 9 年级

蔚蓝的思维 清澈的理性
深邃的探究 旷远的应用

图书在版编目(CIP)数据

数学探究应用新思维·九年级/黄东坡著.

武汉:湖北人民出版社,2013.6

ISBN 978-7-216-07701-9

I. 数… II. 黄… III. 中学数学课—初中—教学参考资料

IV. G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第121108号

出品人:袁定坤

责任部门:基础教育分社

责任编辑:邹桂芬 熊昕绘

封面设计:刘舒扬

责任校对:游润华

责任印制:杜义平

法律顾问:王在刚

出版发行:湖北人民出版社
印刷:崇阳文昌印务有限公司
开本:880毫米×1230毫米1/16
版次:2013年6月第2版
字数:451千字
书号:ISBN 978-7-216-07701-9

地址:武汉市雄楚大道268号
邮编:430070
印张:16.25
印次:2014年11月第19次印刷
印数:329 001—349 000
定价:30.00元

本社网址: <http://www.hbpp.com.cn>

本社旗舰店: <http://hbrmcbs.tmall.com>.

读者服务部电话: 027-87679656

投诉举报电话: 027-87679757

(图书如出现印装质量问题,由本社负责调换)

乘着思维的翅膀

(一)

思维之花是世界上最美丽的花朵。

思维也即观察问题的视角、解决问题的策略。

苏格拉底说：“知识即美德。”培根又云：“知识就是力量。”而随着时代的发展、教育的变革，人们已经认识到：只有当知识被应用于解决实际问题时，知识才踏上通向美德的道路；唯有当知识被应用于探索性思维培养时，知识才能转化为开启心智的力量。

为思维而教、为思维而学是教育变革大潮中激荡的最强音。

美国《国家教育战略报告》指出：“强化并贯穿于所有各种教育目的的中心目的——教育的基本思路——就是要培养思维能力。”

探索与应用是新课程理念的两个关键词。

澳大利亚教育学会主席 J. Bacr 教授说：“教师是一把钥匙，这钥匙应该充满魔力，可以打开许多门，门外的道路至少有三条——实际应用、知识的深入理解和探索性思维的培养。”

(二)

疑是思之始，学之端。

思维由问题产生，从疑问与惊奇开始。

问题是科学研究的出发点，是知识积累、思想方法的逻辑力量。

著名科学思想史专家波普尔曾说：“知识的增长，永远始于问题，终于问题——愈来愈深化的问题，愈来愈能启发大量新问题的的问题。”

在《新思维》即将迎来它的十岁生日之际，我们推出修订后的“十年典藏版”。

在保留经典内容、精美问题的基础上,从学科的整体性、问题的交汇性出发,增添新的专题,补充新的问题,特别关注问题的探究性与应用性和引领性与发展性。对“问题解决”中的部分问题,给出详尽的分析或解答,引导读者读题与感悟,旨在激发想象、感悟方法、锤炼思想、启迪心智;感受探究的趣味,体会应用的美妙。

(三)

乘着思维的翅膀,放飞思维,为智慧寻找高处。

高处是思想的深刻,精神的高度。

高处是俯瞰的开阔视野,是瞭望的深度引领;是洞若观火的深邃,是悠然心会的从容。

“不畏浮云遮望眼,只缘身在最高层。”

科学巨匠爱因斯坦曾说:“我们所创造的这个世界,是我们思维的产物,不改变我们的思维,不可能改变我们的世界。”

乘着思维的翅膀,

改变思维

改变你。

黄东坡

2013年5月于湖北省水果湖第二中学

目 录

MU LU

数与代数

- 1 一元二次方程 / 1
- 2 根的判别式 / 7
- 3 韦达定理 / 12
- 4 一元二次方程的应用 / 17
- 配方法 / 25
- 构造方程 / 29
- 5 二次函数的图象与性质 / 32
- 6 二次函数的应用 / 41
- 7 抛物线与几何变换 / 51
- 8 二次方程与二次函数 / 57
- 抛物线与特殊三角形 / 64
- 抛物线与特殊四边形 / 67
- 抛物线与相似三角形 / 70
- 抛物线与图形面积 / 73
- 借助图象推理 / 76

空间与图形

- 9 探索三角形相似的条件 / 81
- 10 相似三角形的应用 / 90
- 三角形内接四边形 / 99
- 精确的类比 / 102



11 图形的旋转 / 108

12 圆的对称性 / 117

13 圆中角 / 125

14 直线与圆 / 132

15 圆与圆 / 140

16 与圆相关的计算 / 148

17 锐角三角函数 / 156

18 解直角三角形 / 163

三角形的内切圆 / 171

圆与比例线段 / 175

圆与动态几何 / 180

圆与直角坐标系 / 186

滑动 转动 滚动 / 192

道是无圆却有圆 / 199

统计与概率

19 概率初步 / 204

参考答案 / 211

数与代数



阿贝尔(1802—1829),挪威数学家.自16世纪以来,随着三次、四次方程陆续解出,人们把目光落在五次方程的求根公式上,然而近300年的探索一无所获,阿贝尔证明了一般五次方程不存在求根公式,解决了这个世纪难题.在挪威皇宫有一尊阿贝尔的雕像,这是一个大无畏青年的形象,他的脚下踩着两个怪物——分别代表五次方程和椭圆函数.

1. 一元二次方程

—— 解读课标 ——

配方法、公式法、因式分解法是解一元二次方程的基本方法.因式分解法体现了“降次求解”的基本思想,公式法具有一般性.善于根据方程的特征,灵活选用恰当的解法,是解一元二次方程的关键,选择方法的一般顺序是:先特殊后一般.即先考虑因式分解法、配方后直接开平方,再考虑公式法.

有些与一元二次方程相关的问题,常常不是去解这个方程,而是通过变形降次、整体代入等技巧方法,促使问题的解决.

—— 问题解决 ——

例1 阅读下面的例题:

解方程: $x^2 - |x| - 2 = 0$.

解:(1)当 $x \geq 0$ 时,原方程化为 $x^2 - x - 2 = 0$,

解得 $x_1 = 2, x_2 = -1$ (不合题意,舍去).

(2)当 $x < 0$ 时,原方程化为 $x^2 + x - 2 = 0$,

解得 $x_1 = 1$ (不合题意,舍去), $x_2 = -2$.

\therefore 原方程的根是 $x_1 = 2, x_2 = -2$.

请参照例题解方程 $x^2 - |x - 3| - 3 = 0$, 则方程的根是_____.

(晋江市中考题)

试一试 通过讨论,脱去绝对值符号,把绝对值方程转化为一般的一元二次方程来解.

视野窗

我想试试(I'll Try)

——英·罗赛蒂

那个说“我想试试”的小孩

他将登上山巅

那个说“我不成”的小孩

在山下停步不前

“我想试试”每天办成很多事

“我不成”就真一事无成
因此你务必说“我想试试”

将“我不成”弃于埃尘

对于例1(1),还可利用 $x^2 = |x|^2$,将问题转化为解方程: $|x|^2 - |x| - 2 = 0$.

想一想

已知 α, β 是方程 $2x^2 - 3|x| - 2 = 0$ 的两个实数根,求代数式 $\frac{\alpha\beta}{|\alpha| + |\beta|}$ 的值.



例2 根据关于 x 的一元二次方程 $x^2 + px + q = 0$, 可列表如下:

x	0	0.5	1	1.1	1.2	1.3
$x^2 + px + q$	-15	-8.75	-2	-0.59	0.84	2.29

则方程 $x^2 + px + q = 0$ 的正数解满足().

- A. 解的整数部分是 0, 十分位是 5 B. 解的整数部分是 0, 十分位是 8
 C. 解的整数部分是 1, 十分位是 1 D. 解的整数部分是 1, 十分位是 2

(南通市中考题)

试一试 从表中获取信息, 先求出 p, q 的值.

例3 设 x_1, x_2 是方程 $x^2 + x - 4 = 0$ 的两个实数根, 求代数式 $x_1^3 - 5x_2^2 + 10$ 的值.

(第 21 届江苏省竞赛题)

试一试 若先求出 x_1, x_2 的值, 再代入计算, 显然较繁, 根据根的定义, 从变形方程入手.

例4 先请阅读材料:

为解方程 $(x^2 - 1)^2 - 5(x^2 - 1) + 4 = 0$, 我们可以将 $x^2 - 1$ 视为一个整体, 然后设 $x^2 - 1 = y$, 则 $(x^2 - 1)^2 = y^2$, 原方程化为 $y^2 - 5y + 4 = 0$, 解得 $y_1 = 1, y_2 = 4$.

当 $y = 1$ 时, $x^2 - 1 = 1$, 得 $x = \pm\sqrt{2}$; 当 $y = 4$ 时, $x^2 - 1 = 4$, 得 $x = \pm\sqrt{5}$.

故原方程的解为 $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}, x_3 = \sqrt{5}, x_4 = -\sqrt{5}$.

在解方程的过程中, 我们将 $x^2 - 1$ 用 y 替换, 先解出关于 y 的方程, 达到了降低方程次数的目的, 这种方法叫做“换元法”, 体现了转化的数学思想.

请你根据以上的阅读, 解下列方程:

(1) $x^4 - x^2 - 6 = 0$;

(2) $(\frac{1}{2}x - 1)^2 - (\frac{1}{2}x - 1) - 1 = 0$.

试一试 在阅读材料的基础上理解问题, 解题的关键是把方程中有关联的部分用一个新字母代替.



不解方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$, 常见的变形方法有:

(1) $ax^2 + bx = -c$;

(2) $ax^2 = -bx - c$;

(3) $ax + \frac{c}{x} = -b$.

其中(1)、(2)体现了“降次”代换的思想, (3)则是构造倒数关系作等值代换.

在解答数式、方程等问题时, 常面临涉及的数式结构过于复杂、字母个数较多或次数较高等情况, 若把一部分看成一个整体或用一个新字母代替, 则能达到化繁为简的目的, 这种方法叫换元法.



例5 已知 $a > 2, b > 2$, 试判断关于 x 的方程 $x^2 - (a+b)x + ab = 0$ 与 $x^2 - abx + (a+b) = 0$ 有没有公共根, 请说明理由.

(河南省中考题)

分析 由于其中一个方程根的表达形式复杂, 所以可设出两方程的公共根 m , 建立关于 m 的等式, 通过消去 m 的二次项寻找解题突破口, 这是解公共根问题的基本策略.

解 设两方程公共根为 m , 则有

$$\begin{cases} m^2 - (a+b)m + ab = 0 & \text{①} \\ m^2 - abm + (a+b) = 0 & \text{②} \end{cases} \quad \text{②} - \text{①}, \text{得 } (m+1)(a+b-ab) = 0.$$

$\because a > 2, b > 2, \therefore a+b \neq ab$, 从而 $m = -1$.

把 $m = -1$ 代入①, 得 $1 + a + b + ab = 0$, 这是不可能的, 所以, 关于 x 的两个方程没有公共根.

整数解

例6 已知关于 x 的方程 $(4-k)(8-k)x^2 - (80-12k)x + 32 = 0$ 的解都是整数, 求整数 k 的值.

分析 因方程两根形式简单, 故可求出两根并运用整除知识求解.

解 当 $k=4$ 或 $k=8$ 时, 分别求得 $x=1$ 或 $x=-2$.

当 $k \neq 4$ 且 $k \neq 8$ 时, 原方程可化为 $[(4-k)x-8][(8-k)x-4] = 0$,

$$\therefore x_1 = \frac{8}{4-k}, x_2 = \frac{4}{8-k}.$$

$\because k$ 为整数, 且 x_1, x_2 均为整数,

$\therefore 4-k = \pm 1, \pm 2, 4, \pm 8$, 得 $k = 3, 5, 2, 6, 0, -4, 12$ 或 $8-k = \pm 1, \pm 2, -4$, 得 $k = 7, 9, 6, 10, 12$.

故当 k 的值为 $4, 6, 8, 12$ 时, 原方程的根都为整数.

公共根问题是一元二次方程常见问题, 解这类问题的基本方法有:

(1) 若方程便于求出简单形式的根, 利用公共根相等求解;

(2) 设出公共根, 设而不求, 消去二次项.

入乎其内, 故有生气; 出乎其外, 故有高致.

有些复杂的方程却有简单的根的表达式; 有些表面是方程的问题, 却需从等式变形的视角去思考.

数学冲浪

——知识技能广场——

1. 已知三角形的两边长分别为 3 和 6, 第三边长是方程 $x^2 - 6x + 8 = 0$ 的根, 则这个三角形的周长为_____.

(2012 年泸州市中考题)

2. 设 x_1, x_2 是方程 $x^2 + 5x - 3 = 0$ 的两个实根, 且 $2x_1(x_2^2 + 6x_2 - 3) + a = 4$, 则 $a =$ _____.

(2012 年鄂州市中考题)



3. (1) 用换元法解方程: $x^2 + x + 1 = \frac{2}{x^2 + x}$, 如果设 $y = x^2 + x$, 那么原方程化为关于 y 的一元二次方程的一般形式为 _____;

(河北省中考题)

(2) 用换元法解分式方程 $\frac{x-1}{x} - \frac{3x}{x-1} + 1 = 0$ 时, 如果设 $\frac{x-1}{x} = y$, 将原方程化为关于 y 的整式方程, 那么这个整式方程是 _____.

(上海市中考题)

4. 下面是李刚同学在一次测验中解答的填空题, 其中答对的是().

A. 若 $x^2 = 4$, 则 $x = 2$

B. 方程 $x(2x-1) = 2x-1$ 的解为 $x = 1$

C. 若方程 $(m-2)x^{|m|} + 3mx - 1 = 0$ 是关于 x 的一元二次方程, 则 $m = -2$

D. 若分式 $\frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$ 的值为零, 则 $x = 1, 2$

(山西省中考题)

5. 设 a, b 是方程 $x^2 + x - 2009 = 0$ 的两个实数根, 则 $a^2 + 2a + b$ 的值为().

A. 2006

B. 2007

C. 2008

D. 2009

(烟台市中考题)

6. 严老师出示了小黑板上的题目(如下面方框中所示), 小敏回答“方程有一根为 1”, 小聪回答“方程有一根为 2”, 则你认为().

已知方程 $x^2 - 3x + k + 1 = 0$, 试添加一个条件, 使它的两根之积为 2.

A. 只有小敏回答正确

B. 只有小聪回答正确

C. 小敏、小聪回答都不正确

D. 小敏、小聪回答都正确

(绍兴市中考题)

7. 解下列方程:

(1) $x^2 - |x| - 1 = 0$;

(2) $(x^2 - 2x)^2 + (x^2 - 2x) - 2 = 0$;

(3) $\frac{x^2 - 2}{x} + \frac{2x}{x^2 - 2} = 3$.

8. 已知关于 x 的方程 $x^2 + kx - 2 = 0$ 的一个解与方程 $\frac{x+1}{x-1} = 3$ 的解相同.

(1) 求 k 的值;

(2) 求方程 $x^2 + kx - 2 = 0$ 的另一个解.

(大连市中考题)

9. 一元二次方程 $x^2 - 2x - \frac{5}{4} = 0$ 的某个根, 也是一元二次方程 $x^2 - (k+2)x + \frac{9}{4} = 0$ 的根, 求 k 的值.

(2012 年淄博市中考题)



—思维方法天地—

10. 已知 a 是方程 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 的根, 则分式 $\frac{2a^5 - 6a^4 + 2a^3 - a^2 - 1}{3a}$ 的值为_____.

(江西省竞赛题)

11. 设方程 $(x-a)(x-b) - x = 0$ 的两根为 c, d , 则方程 $(x-c)(x-d) + x = 0$ 的两根为_____.

(四川省竞赛题)

12. 回归出发点

在解决数学问题时, 我们经常要回到基本定义与基本方法思考. 试利用方程的解的定义及解方程组的基本方法解决以下问题:

已知 a 是关于 x 的方程 $x^2 - (2k+1)x + 4 = 0$ 及 $3x^2 - (6k-1)x + 8 = 0$ 的公共解, 则 $a =$ _____, $k =$ _____.

(《时代学习报》数学文化节试题)

13. 设一元二次方程 $(x-1)(x-2) = m (m > 0)$ 的两实根分别为 α, β , 且 $\alpha < \beta$, 则 α, β 满足().

A. $1 < \alpha < \beta < 2$ B. $1 < \alpha < 2 < \beta$ C. $\alpha < 1 < \beta < 2$ D. $\alpha < 1$ 且 $\beta > 2$

(黄石市中考题)

14. 设 x_1, x_2 是二次方程 $x^2 + x - 3 = 0$ 的两个根, 那么 $x_1^3 - 4x_2^2 + 19$ 的值等于().

A. -4 B. 8 C. 6 D. 0

15. 已知三个关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0, bx^2 + cx + a = 0, cx^2 + ax + b = 0$

恰有一个公共实数根, 则 $\frac{a^2}{bc} + \frac{b^2}{ca} + \frac{c^2}{ab}$ 的值为().

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

(全国初中数学竞赛题)

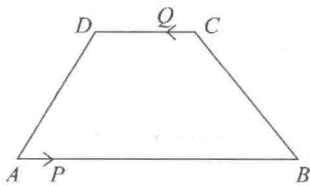
16. 是否存在某个实数 m , 使得方程 $x^2 + mx + 2 = 0$ 和 $x^2 + 2x + m = 0$ 有且只有一个公共的根? 如果存在, 求出这个实数 m 及两方程的公共实根; 如果不存在, 请说明理由.

17. 已知关于 x 的两个方程 $x^2 - x + 3m = 0, x^2 + x + m = 0 (m \neq 0)$, 若前一个方程中有一个根是后一个方程的某个根的 3 倍, 求实数 m 的值.

(“新知杯”上海市竞赛题)

—应用探究乐园—

18. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $AB = 8\text{cm}$, $CD = 2\text{cm}$, $AD = 6\text{cm}$, 点 P 从点 A 出发, 以 2cm/s 的速度沿 AB 向终点 B 运动; 点 Q 从点 C 出发, 以 1cm/s 的速度沿 CD, DA 向终点



(第 18 题)



A 运动(P 、 Q 两点中,当有一个点运动到终点时,所有运动即终止),设 P 、 Q 同时出发并运动了 t 秒.

(1) 当 PQ 将梯形 $ABCD$ 分成两个直角梯形时,求 t 的值;

(2) 试问是否存在这样的 t ,使四边形 $PBCQ$ 的面积是梯形 $ABCD$ 面积的一半? 若存在,求出这样的 t 值;若不存在,请说明理由.

(无锡市中考题)

19. 问题:已知方程 $x^2 + x - 1 = 0$. 求一个一元二次方程,使它的根分别是已知方程根的 2 倍.

解:设所求方程的根为 y ,则 $y = 2x$,所以 $x = \frac{y}{2}$.

把 $x = \frac{y}{2}$ 代入已知方程,得 $\left(\frac{y}{2}\right)^2 + \frac{y}{2} - 1 = 0$.

化简得 $y^2 + 2y - 4 = 0$.

故所求方程为 $y^2 + 2y - 4 = 0$.

这种利用方程根的代换求新方程的方法,我们称为“换根法”.

请用阅读材料提供的“换根法”求新方程(要求:把所求方程化成一般形式):

(1) 已知方程 $x^2 + x - 2 = 0$,求一个一元二次方程,使它的根分别是已知方程根的相反数;

(2) 已知关于 x 的一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 有两个不等于零的实数根,求一个一元二次方程,使它的根分别是已知方程根的倒数.

(2012 年贵州省中考题)



“数学之美体现在它的实用性上”。诺贝尔经济学奖得主、天才数学家、博弈论创始人纳什如是说。纳什的数学天分在 14 岁开始展现，他在普林斯顿大学读博士时才二十来岁，他的一篇关于非合作博弈的博士论文和其他相关文章，确立了他博弈论大师的地位。在 20 世纪 50 年代末，他已是闻名于世的科学家。

2. 根的判别式

—— 解读课标 ——

一元二次方程 $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ 只有当系数 a, b, c 满足条件 $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$ 时才有实数根。这里的 $b^2 - 4ac$ 叫做一元二次方程根的判别式。

根的判别式在以下方面有着广泛的应用：

- (1) 运用判别式，判定方程实根的个数；
- (2) 利用判别式，建立等式、不等式，求方程中参数值或取值范围；
- (3) 通过判别式，证明与方程相关的代数问题；
- (4) 借助判别式，运用一元二次方程必定有解的代数模型，解几何存在性问题、最值问题。

—— 问题解决 ——

例 1 若关于 x 的方程 $ax^2 + 2(a+2)x + a = 0$ 有实数解，则实数 a 的取值范围是_____。

(2012 年德州市中考题)

试一试 方程的次数确定吗？

例 2 如果关于 x 的一元二次方程 $kx^2 - \sqrt{2k+1}x + 1 = 0$ 有两个不相等的实数根，那么 k 的取值范围是()。

A. $k < \frac{1}{2}$

B. $k < \frac{1}{2}$ 且 $k \neq 0$

利用判别式解题需注意的是：

(1) 解含参数的二次方程，须注意到二次项系数不为 0 的隐含制约；

(2) 讨论多个二次方程的根的问题时，常用到整体方法、消元降次等思想方法。

想 一 想

感受例 1 与下面问题的差别：

若关于 x 的一元二次方程 $kx^2 + (2k+1)x + (k-1) = 0$ 有实数根，则 k 的取值范围是_____。



C. $-\frac{1}{2} \leq k < \frac{1}{2}$

D. $-\frac{1}{2} \leq k < \frac{1}{2}$ 且 $k \neq 0$

(2012年襄阳市中考题)

试一试 综合运用相关知识,建立 k 的不等式组.

例 3 已知关于 x 的方程 $x^2 - (k+2)x + 2k = 0$.

(1)求证:无论 k 取任何实数值,方程总有实数根;

(2)若等腰三角形 ABC 的一边长 $a = 1$,另两边长 b, c 恰好是这个方程的两个根,求 $\triangle ABC$ 的周长.

试一试 对于(1),只需证明 $\Delta \geq 0$;对于(2),由于未指明腰与底,须分 $b = c$ 或 b, c 中有一个与 a 相等两种情况讨论,利用判别式、根的定义求出 b, c 的值.

例 4 设方程 $|x^2 + ax| = 4$ 只有 3 个不相等的实数根,求 a 的值和相应的 3 个根.

(重庆市竞赛题)

试一试 去掉绝对值符号,原方程可化为两个一元二次方程,原方程只有 3 个不相等的实数根,则其中一个判别式大于零,另一个判别式等于零.

例 5 已知函数 $y = \frac{2}{x}$ 和 $y = kx + 1 (k \neq 0)$.

(1)若这两个函数的图象都经过点 $(1, a)$,求 a 和 k 的值;

(2)当 k 取何值时,这两个函数的图象总有公共点?

(苏州市中考题)

试一试 对于(2),将问题转化为判断由两个解析式所组成的方程组解的组数讨论,进一步转化为消元后的一元二次方程根的判别式值的探讨.



利用根的判别式讨论方程根的个数为人们所熟悉,而探讨高次方程或组合多个判别式讨论方程多个根是近年中考竞赛中的创新题型.解这类题常用到分解、换元、分类讨论等方法.

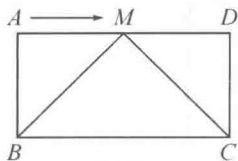
许多表面与一元二次方程无关的问题,可通过构造方程为判别式的运用铺平道路.在解不定方程、最值问题、几何问题等方面有广泛的应用.



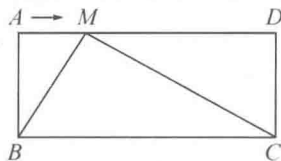
图形存在性探究

例 6 已知:在矩形 $ABCD$ 中, $AB=a$, $BC=b$, 动点 M 从点 A 出发沿边 AD 向点 D 运动.

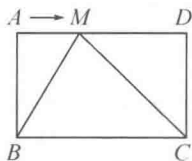
(1) 如图①, 当 $b=2a$, 点 M 运动到边 AD 的中点时, 请证明 $\angle BMC=90^\circ$.



图①



图②



图③

(2) 如图②, 当 $b>2a$ 时, 点 M 在运动的过程中, 是否存在 $\angle BMC=90^\circ$? 若存在, 请给予证明; 若不存在, 请说明理由.

(3) 如图③, 当 $b<2a$ 时, (2) 中的结论是否仍然成立? 请说明理由.

(2012 年临沂市中考题)

分析与解 对于(2), 设 $AM=x$, 由比例线段建立关于 x 的方程, 在方程有解的前提下逆推, 检验是否符合题意.

(1) 略.

(2) 存在. 理由: 若 $\angle BMC=90^\circ$, 则 $\angle AMB + \angle DMC = 90^\circ$. 又 $\angle AMB + \angle ABM = 90^\circ$, 所以 $\angle ABM = \angle DMC$. 因为 $\angle A = \angle D = 90^\circ$, 所以 $\triangle ABM \sim \triangle DMC$. $\therefore \frac{AM}{CD} = \frac{AB}{DM}$, 设 $AM=x$, 则 $\frac{x}{a} = \frac{a}{b-x}$, 整理得 $x^2 - bx + a^2 = 0$.

$\because b>2a, a>0, b>0$, 所以 $\Delta = b^2 - 4a^2 > 0$.

\therefore 方程有两个不相等的实数根, 且两根均大于零, 符合题意.

\therefore 当 $b>2a$ 时, 存在 $\angle BMC=90^\circ$.

(3) 不成立. 理由: 若 $\angle BMC=90^\circ$, 由(2)可知 $x^2 - bx + a^2 = 0$.

$\because b<2a, a>0, b>0$, $\therefore \Delta = b^2 - 4a^2 < 0$, 所以方程没有实数根.

\therefore 当 $b<2a$ 时, 不存在 $\angle BMC=90^\circ$, 即(2)中的结论不成立.

“只在此山中, 云深不知处”. 存在性问题是判断满足某种条件的事物是否存在的问题.

例 6 展示了判别式在几何方面的应用, 即借助判别式, 运用一元二次方程必定有解的代数模型, 解几何存在性问题、最值问题等.

数学冲浪

知识技能广场

1. 若关于方程 x 的一元二次方程 $x^2 - 6x + c = 0$ 没有实数根, 则 c 的取值范围是_____.

(2012 年上海市中考题)

2. 已知关于 x 的方程 $x^2 - 2\sqrt{3}x + k = 0$ 有两个相等的实数根, 则 k 的值是_____.

(2012 年广州市中考题)

