国家科学技术学术著作出版基金
NFAPST

无网格方法

（上 册）

程玉民　著

科 学 出 版 社

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

无网格方法

(上 册)

程玉民 著

科学出版社
北 京

内 容 简 介

本书内容是作者课题组十多年来关于无网格方法的研究成果，分上下两册. 上册的主要内容有：无网格方法的研究进展及存在的问题、无网格方法的逼近函数、改进的无单元 Galerkin 方法、插值型无单元 Galerkin 方法、边界无单元法和无网格方法的数学理论等. 上册末附有弹塑性力学的插值型无单元 Galerkin 方法的 Matlab 程序.

下册内容主要是复变量无网格方法.

本书可供高等院校和科研单位从事计算力学、计算数学、计算物理及科学和工程计算，特别是无网格方法研究的学者和研究生参考，也可供从事工程计算的技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

无网格方法. 上册/程玉民著. —北京：科学出版社，2015

ISBN 978-7-03-043020-5

Ⅰ. ①无…　Ⅱ. ①程…　Ⅲ. ①计算力学　Ⅳ. ①O302

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 009090 号

责任编辑：赵彦超　李静科／责任校对：张凤琴
责任印制：赵德静／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司 印刷
科学出版社发行　　各地新华书店经销
*
2015 年 2 月第　一　版　　开本：720 × 1000 1/16
2015 年 2 月第一次印刷　　印张：31 1/2
字数：621 000

定价：158.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

无网格方法是继有限元法之后发展起来的一种重要的数值方法, 近二十年来发展很快. 无网格方法基于节点建立逼近或插值函数, 与基于网格的数值方法如有限元法和边界元法相比, 在处理诸如大变形、裂纹扩展等问题时不需要进行网格重构, 具有较为明显的优越性. 无网格方法是目前科学和工程计算研究的热点之一.

本书内容是作者课题组十多年来关于无网格方法的研究成果, 包括了作者与其合作者及其指导的博士生和硕士生的研究成果.

本书内容丰富, 不仅包括了无网格方法逼近函数的形成方法, 而且包括了求解各种线性和非线性问题的无网格方法和无网格边界积分方程方法, 以及无网格方法的数学理论. 在着重阐述作者提出的新的逼近函数形成方法的基础上, 重点讲述基于新的逼近函数求解各种问题的无网格方法.

本书分上下两册. 上册的整体安排如下:

第 1 章绪论主要讲述无网格方法的研究进展及存在的问题.

第 2 章是无网格方法的逼近函数, 包括前人研究的重要方法和作者课题组建立的各种逼近函数形成方法, 是本书的基础性内容.

第 3 章是基于改进的移动最小二乘法建立的改进的无单元 Galerkin 方法求解势问题、瞬态热传导、波动方程、弹性力学、弹性动力学和黏弹性力学等问题.

第 4 章基于改进的移动最小二乘插值法建立的插值型无单元 Galerkin 方法, 分别采用奇异权函数和非奇异权函数建立逼近函数, 求解了势问题、弹性力学和弹塑性力学等问题.

第 5 章是边界无单元法的研究工作, 包括势问题、弹性力学和弹性动力学等问题的边界无单元法, 以及插值型边界无单元法、采用非奇异权函数的改进的插值型边界无单元法, 以及重构核粒子边界无单元法等.

第 6 章是无网格方法的数学理论, 包括移动最小二乘法、改进的移动最小二乘插值法, 势问题、弹性力学和热传导问题的无单元 Galerkin 方法的误差估计理论, 以及插值型无单元 Galerkin 方法和有限点法的误差估计.

本书上册末附有弹塑性力学的插值型无单元 Galerkin 方法的 Matlab 程序, 为无网格方法的初学者学习 Matlab 编程之用, 也可为无网格方法的研究者和工程技术人员求解非线性问题提供参考.

下册主要是基于各种复变量移动最小二乘法建立的复变量无网格方法.

在本书出版之时, 作者衷心感谢香港城市大学建筑学与土木工程学系主任 Liew

K M 教授和澳大利亚昆士兰大学的 Kitipornchai S 教授多次提供赴港合作研究机会以及进行的科研合作! 感谢课题组彭妙娟教授的研究工作对本书的贡献! 感谢作者指导的博士后张赞, 博士生李九红 (合作指导)、李树忱、秦义校、戴保东、程荣军、陈丽、任红萍 (合作指导)、高洪芬、王聚丰和孙凤欣, 硕士生陈美娟、白福浓和王健菲, 以及彭妙娟教授指导的硕士生刘沛、李冬明和李荣鑫的研究工作对本书的贡献!

王聚丰参与了本书第 4 章和第 6 章部分书稿的整理工作; 王健菲参与了本书第 3 章的翻译和整理工作; 上册附录中的弹塑性力学的插值型无单元 Galerkin 方法的 Matlab 程序, 是白福浓编写、王聚丰整理的; 彭妙娟和邓亚洁负责本书的校对工作. 特此表示感谢!

感谢我的导师黄艾香教授多年来对我和我的学生的研究工作的指导和帮助! 感谢黄艾香教授在国家自然科学基金项目方面的合作, 以及在项目进行过程中的总体指导! 感谢李开泰教授和何银年教授对本书研究工作的指导和帮助!

感谢冯伟教授和马永其副教授的多年合作, 以及在每周课题组活动提出的宝贵意见和建议!

感谢钱跃竑教授的多年合作以及对本书的大力支持!

感谢我的导师嵇醒教授和黄艾香教授对本书的推荐, 使得本书得到了国家科学技术学术著作出版基金的资助! 感谢科学出版社赵彦超在出版基金申请过程中给予的帮助! 同时感谢国家科学技术学术著作出版基金项目的各位评审专家!

感谢科学出版社徐园园和李静科编辑对本书的支持和为出版所做的辛勤工作!

本书的研究工作得到了国家自然科学基金 (批准号: 10571118、10871124 和 11171208)、上海市教育委员会科研创新项目 (重点) (批准号: 09ZZ99) 和上海大学 211 工程队伍建设项目资助, 特此表示感谢!

限于作者水平和时间, 书中难免有缺点和不妥之处, 敬请批评指正.

程玉民

2014 年 8 月 1 日

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

目　　录

第1章　绪　　论

1.1　科学和工程中的数值方法

当今科学研究可分为三种, 即理论、实验和计算. 随着计算科学和计算机技术的迅速发展, 计算在科学研究和工程分析中的作用越来越重要. 特别是目前很多特大工程, 如原子弹爆炸、大型舰船和飞机的设计建造等, 除了少量的实验之外几乎完全依赖于科学计算和分析.

目前科学和工程中的数值方法有加权残数法、有限差分法、有限元法、边界元法和无网格方法等. 有限元法目前已成为研究和应用最为广泛的数值方法, 在科学研究和工程分析方面发挥了巨大作用, 取得了巨大的社会和经济效益.

有限元法[1]将问题所在区域离散为有限单元, 在单元上对求解变量建立基于节点的插值函数近似, 以变分原理或加权残数法建立控制方程, 通过数值积分得到与节点未知量有关的代数方程组, 求解此代数方程组可以得到离散模型的节点变量的数值解, 然后由单元上的插值函数得到求解域内任一点变量的数值解. 有限元法是一种将整体离散为单元, 再从单元分析到整体分析的数值方法. 有限元法简单直观、计算效率高, 一般采用高阶单元或加密网格可获得较高的数值精度. 有限元法有效克服了有限差分法对于区域形状的限制, 对于各种形状的边界都能灵活处理. 但是, 有限元法需在整个求解域上进行离散, 复杂三维结构的有限元网格生成较为困难, 在处理大变形、动态裂纹扩展、流固耦合等问题时, 网格有时会发生畸变, 因此在数值模拟过程中不可避免地要进行网格重构, 这不仅降低了计算效率, 而且会导致计算精度受损.

边界元法[2]是继有限元法之后的一种基于边界单元和节点的数值方法. 边界元法是借助待求解问题的基本解和加权残数法, 将描述该问题的偏微分方程定解问题化为边界积分方程, 并对求解域的边界进行单元离散而形成的数值方法. 边界元法具有半解析、降维、域内应力连续等优点, 但边界元法也有其难以克服的缺点, 如建立边界积分方程时需要基本解、难以处理复杂问题的边界积分方程中的奇异积分、对裂纹扩展等问题也须进行网格重构等, 所有这些问题限制了边界元法的计算效率和应用范围. 边界元法在处理大变形和动态裂纹扩展等问题时, 也需要进行网格重构, 降低了计算效率和计算精度.

为了克服基于网格 (单元和节点) 的数值方法 (如有限元法和边界元法等) 对于单元或网格的依赖性, 20 世纪 90 年代以来, 一种仅仅基于节点而不需划分单元

试读结束, 需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

的数值方法——无网格方法[3]取得了很大的发展. 无网格方法试函数的构造是建立在一系列离散的节点上, 场点与节点之间的联系不再通过单元实现, 从而摆脱了网格或单元的约束, 在涉及网格畸变、网格移动等问题时不再需要网格重构, 显示出了较为明显的优势.

无网格方法目前已成为计算科学研究的热点之一. 由于对其研究较晚, 目前尚未解决的问题也较多, 对其相关理论和应用进行研究是非常重要的.

1.2 无网格方法概述

国际上目前将基于点的近似构造试函数、不需要划分单元的各种数值方法称为无网格方法 (Meshless method, 或 Meshfree method).

与基于网格的有限元法一样, 无网格方法的研究主要包括以下三个方面: 试函数的构造、微分方程的离散和边界条件的施加.

无网格方法构造试函数的方法与基于网格的有限元法不同. 在由试函数求得形函数后, 无网格方法建立求解方程的方法与有限元法相同.

无网格方法的核心部分在于形函数的构造, 这也是无网格方法与其他数值方法的根本区别所在. 目前无网格方法中形成形函数的方法主要有: 光滑粒子法 (Smooth particle hydrodynamics method, 简称 SPH)[4]、移动最小二乘法 (Moving least-squares approximation, 简称 MLS)[5−7]、重构核粒子法 (Reproducing kernel particle method, 简称 RKPM)[8,9]、单位分解法 (The partition of unity method)[10]、径向基函数法 (Radial basis functions, 简称 RBF)[11]、点插值法 (Point interpolation method, 简称 PIM)[12]和移动 Kriging 插值法 (Moving Kriging interpolation method)[13]等.

无网格方法建立求解方程的方法主要有加权残数法[14]、变分原理[15]和 Petrov-Galerkin 法[16]以及边界积分方程方法[17]等.

与有限元法不同, 多数无网格方法构造的试函数是非线性的逼近或拟合, 不具有插值特性, 因此在基于 Galerkin 离散方案的无网格方法中, 本质边界条件的施加并不像有限元法那样容易, 需要通过其他方法引入边界条件. 目前已提出了多种处理边界条件的有效方法, 如 Lagrange 乘子法[14]、直接配点法[18]和罚函数法[19]等.

目前发展的无网格方法有十几种, 它们的主要区别在于使用了不同的形函数或微分方程的等效形式, 主要有光滑粒子法[4]、扩散单元法 (Diffuse element method, 即 DEM)[20]、无单元 Galerkin 方法 (Element-free Galerkin method, 即 EFG)[14,21,22]、重构核粒子法 [8,9]、无网格局部 Petrov-Galerkin 方法 (Meshless local Petrov-Galerkin method, 即 MLPG)[16]、径向基函数法[11,23]、Hp-clouds 无网格方法[24]、有限点法 (Finite point method, 即 FPM)[25,26]、自然单元法 (Natural element method, 简称

NEM)[27-29]、无网格 kp-Ritz 方法 (Meshfree kp-Ritz method)[30]、无网格有限元法 (Meshless finite element method)[31]、复变量无网格方法 [32-34]、无网格流形方法 [35,36] 以及各种无网格边界积分方程方法, 如边界点法 (Boundary node method, 简称 BNM)[37,38]、局部边界积分方程方法 (Local boundary integral equation method, 简称 LBIE)[39,40]、边界点插值法 (Boundary point interpolation method)[41]和边界无单元法 (Boundary element-free method, 简称 BEFM)[42-46]等.

无网格方法作为一种数值方法, 是继有限元法之后科学和工程计算方法的重要发展. 无网格方法在处理问题时只需要节点信息, 不需要对求解域进行网格划分, 而且在计算过程中可以根据需要在某一区域增加或减少节点, 便于进行自适应计算, 同时也能提高局部区域的计算精度. 由于其基函数可选择包含反映待求问题解特性的函数, 形函数具有高阶连续性且形式灵活, 求解过程中也不会产生畸形网格, 无网格方法适于分析具有高梯度、超大变形和奇异性等有限元法难以求解的问题. 由于无网格方法具有较高的精度, 对一些复杂问题, 如裂纹扩展等结构破坏过程仿真[47]、梯度材料等新材料问题的性能分析、高速碰撞和爆破及金属冲压成型等, 也可以得到很好的数值结果, 而这些问题也是科学和工程计算中迫切需要解决的难题. 因此, 研究无网格方法具有重要的理论意义和工程应用价值.

1.3 无网格方法的研究进展

对无网格方法的研究可以追溯到 20 世纪 70 年代, 但是由于当时有限元法的巨大成功, 无网格方法并未引起人们的广泛注意. 直到 20 世纪 90 年代初, Nayroles 等[20]基于移动最小二乘法提出了扩散单元法之后, Belytschko 等对扩散单元法进行了改进, 提出了著名的无单元 Galerkin 方法[14], 无网格方法才得到了突飞猛进的发展.

1977 年 Lucy 等提出了光滑粒子法, 这是最早出现的无网格方法, 主要用于研究无边界的天体问题和流体问题[48]. 由于光滑粒子法计算精度低、稳定性差, 一些学者对该方法进行了改进和完善. Libersky 研究了三维动态响应问题的光滑粒子法[49]; Swegle 研究了光滑粒子法的稳定性, 并应用于水下爆炸问题分析[50,51]; Chen 等对光滑粒子法中存在的张拉不稳定现象进行了改进, 提出了光滑粒子法不稳定的起因及稳定化方案[52]; Johnson 将光滑粒子法应用于高速冲击问题, 并利用归一化光滑函数提高精度[53,54]; Liu 对光滑粒子法进行了评述[55], 并研究了光滑粒子法中固体边界的处理方法[56]; Ma 等研究了非均匀岩体和非均质材料的失效问题的光滑粒子法[57,58].

1981 年, Lancaster 等在研究曲面拟合时建立了移动最小二乘法[5]. 移动最小二乘法采用完备多项式作为基函数, 利用误差的加权平方和构造泛函, 得到的逼近

函数精度高、光滑性好且导数连续. 20 世纪 90 年代, Nayroles 和 Belytschko 等将移动最小二乘法引入微分方程边值问题的求解中, 使得移动最小二乘法成为无网格方法中构造试函数的主要方法之一.

1992 年, Nayroles 等首次将移动最小二乘法和 Galerkin 方法相结合, 提出了扩散单元法[20], 并分析了 Poisson 方程和弹性问题. 但是, 扩散单元法存在计算精度不高、边界条件不容易施加等缺点, 为此 Belytschko 等对扩散单元法进行了改进, 提出了无单元 Galerkin 方法[14], 掀起了无网格方法的研究热潮. 无单元 Galerkin 方法是目前无网格方法中研究和应用最为广泛的方法之一.

Belytschko 等对无单元 Galerkin 方法中的数值积分以及逼近函数的计算方法进行了研究[59−61], 并将该方法应用于求解动态断裂、裂纹扩展以及应力波的传播等动力学问题[62−64]; 为了避免使用背景网格积分, Beissel 等提出了节点积分方案[65]; Mukherjee 等对移动最小二乘法进行了改进, 以方便无单元 Galerkin 方法处理边界条件[66]; Kaljevic 等利用插值型移动最小二乘法对无单元 Galerkin 方法进行了改进[67]; Ponthot 和 Belytschko 给出了无单元 Galerkin 方法的任意 Lagrangian-Eulerian 公式[68]; Smolinski 等给出了无单元 Galerkin 方法显式时间积分方案, 并用于求解扩散问题[69]; Krysl 与 Belytschko 开发了一个 ESFLIB 形函数库, 并提供接口函数以便在无单元 Galerkin 方法程序中调用[70]; Alves 利用扩展的单位分解有限元权函数讨论了无单元 Galerkin 方法中边界条件的处理方法[71].

Krysl 等将无单元 Galerkin 方法用于板壳分析中[72]; Belytschko 等利用无单元 Galerkin 方法求解静态和动态断裂问题[73]; Sukumar 等利用无单元 Galerkin 方法求解了三维断裂问题[74]; Fleming 和 Belytschko 等提出了求解裂纹尖端应力场的扩展的无单元 Galerkin 方法[75]; Bouillard 等利用无单元 Galerkin 方法求解 Helmholtz 问题[76]; Xu 等利用无单元 Galerkin 方法求解弹塑性材料的 I 型裂纹扩展问题[77]; Belytschko 等利用无单元 Galerkin 方法求解混凝土的断裂问题[78]; Kargarmovin 等利用无单元 Galerkin 方法求解弹塑性问题[79]; Lee 等讨论了无单元 Galerkin 方法的裂纹分析技术[80]; Rao 等利用扩展的无单元 Galerkin 方法讨论了非线性断裂问题[81]; Liew 等将无单元 Galerkin 方法应用于形状记忆合金的变形问题[82]; Zhang 等建立了改进的无单元 Galerkin 方法 (Improved element-free Galerkin method), 并应用于分析三维势问题、波动方程、断裂力学和瞬态热传导问题[21,83−85]; Ren 等提出了势问题和弹性力学的插值型无单元 Galerkin 方法 (Interpolating element-free Galerkin method), 该方法可以直接代入本质边界条件, 克服了无单元 Galerkin 方法需要采用其他方法引入本质边界条件的缺点[22,86]. 为了提高无单元 Galerkin 方法的计算效率, 程玉民等提出了复变量移动最小二乘法及一系列的复变量无单元 Galerkin 方法[6,7,33].

1996 年 Oñate 和 Idelsohn 等采用移动最小二乘法构造逼近函数, 采用配点法

进行微分方程的离散, 提出了有限点法[25], 这是一种无需背景积分网格的无网格方法. 随后他们对此方法进行了修正[87], 使其在计算中更稳定, 效率更高, 并将其应用于流体动力学分析[88]. Wang 等建立了等参数有限点法[89]. Wawreńczuk 将有限点法应用于含辐射的玻璃冷却问题[90]. Ortega 建立了浅波方程的自适应有限点法[91].

Atluri 和 Zhu 基于移动最小二乘法和微分方程的局部弱形式, 提出了无网格局部 Petrov-Galerkin 方法[16], 该方法在各节点的局部子域上运用了对称的局部弱形式, 建立了对应于这一节点子域的积分方程, 即积分可在局部子域上完成, 不需要背景网格. Atluri 根据无网格局部 Petrov-Galerkin 方法试函数和权函数取自不同函数空间的特点, 提出了多种不同的无网格局部 Petrov-Galerkin 方法[92−94]. 由于无网格局部 Petrov-Galerkin 方法采用移动最小二乘法构造的逼近函数不具有插值特性, 因此边界条件不能像有限元法一样直接施加, 一般采用罚函数法或 Lagrange 乘子法施加边界条件, 一些学者利用其他方法构造具有插值特性的形函数代替移动最小二乘法的形函数, 克服了无网格局部 Petrov-Galerkin 方法中边界条件不能直接施加的缺点[95,96]. 戴保东等研究了势问题、弹性力学、瞬态热传导和弹性动力学问题的复变量无网格局部 Petrov-Galerkin 方法[97−100]. Dai 和 Zhu 研究了基于 Kriging 插值的无网格局部 Petrov-Galerkin 方法, 并求解了弹性动力学和功能梯度板的几何非线性问题[101,102]. Dai 等建立了改进的无网格局部 Petrov-Galerkin 方法[103]. Chen 等建立了插值型无网格局部 Petrov-Galerkin 方法[104].

为了克服光滑粒子法的不足, Liu 等通过引入修正函数对其核函数进行完善, 使修正后的核函数能够满足一致性条件, 基于 Galerkin 弱形式提出了重构核粒子法[8]. 重构核粒子法现已发展成为的一种较为成熟的无网格方法, 在结构动力学[105]、大变形分析[106−109]、中厚梁板分析[110]、微电子机械系统分析[111]、自由和强迫振动[112]、不稳定的热传导问题[113]等诸多领域中得到了广泛应用.

Liu 等研究了重构核粒子有限元法[114]. Chen 等对重构核粒子法进行了改进, 并应用于不可压缩的有限弹性体分析[115]. Chen 等还讨论了重构核粒子法的节点插值特性[116]. Li 和 Liu 将最小二乘法的思想引入积分核中, 提出了移动最小二乘法的重构核粒子法[117,118]和重构核的分级单位分解方法[119,120]. Liu 等又将小波 (wavelet) 分析中的尺度伸缩平移、多分辨率概念引入重构核粒子法中, 建立了多尺度重构核粒子法 (Multiscale reproducing kernel particle method, 即 MRKPM)[121]. 为了提高重构核粒子法的计算效率, Chen 等提出了复变量重构核粒子法[9,34].

Oden 和 Durate 提出了 Hp-Clouds 无网格方法[24,122], 该方法利用移动最小二乘法建立单位分解函数, 并由此构造逼近函数, 然后基于 Galerkin 积分弱形式建立求解方程. 之后又讨论了其自适应方法. Chen 等研究了 Schrödinger 方程的 Hp-

Clouds 无网格方法[123]. Liszka 等改用配点法, 避免了 Galerkin 积分弱形式中用于积分计算的背景网格, 提出了 Hp 无网格云团法 (Hp meshless clouds method)[124]. Oden 等将有限元形函数作为单位分解函数, 提出了基于 Hp-Clouds 的新型 Hp 有限元法[125]. Mendoncca 等将该方法用于求解铁摩辛柯梁问题[126], Garcia 等将其用于求解厚板的弯曲问题[127].

1996 年, Babuška 和 Melenk 提出了单位分解法[10]. Babuška 对单位分解法进行了严格的数学论证, 并提出了采用特征解析解来扩展基函数的方法. Babuška 和 Melenk 等将单位分解法与有限元法相结合, 提出了单位分解有限元法 (Partition of unity finite element method)[128]和广义有限元法 (Generalized finite element method)[129]. 基于单位分解法的无网格方法在求解动态裂纹扩展问题时, 可以处理任意形状的裂纹, 并且不需要重新划分网格[130,131]. Leung 等将单位分解法引入到边界元法中[132]. Natarajan 等利用单位分解法来研究功能梯度板的屈曲问题[133].

径向基函数法[11]是求解偏微分方程的一种真正无网格方法, 且与空间维数无关. 径向基函数具有形式简单、各向同性等优点, 可以逼近几乎所有的函数[134]. Kansa 将径向基函数和配点法相结合, 建立了用于求解双曲、椭圆和抛物型问题的无网格方法[135,136]. Wendland 将径向基函数和 Galerkin 弱形式相结合, 建立了相应的无网格方法[137]. Bouhamidi 等将径向基函数和基本解方法结合求解了 Helmholtz 问题[138].

1995 年, Braun 和 Sambridge 基于自然邻点插值构造试函数和权函数, 提出了求解偏微分方程的自然单元法[139], 该方法的最大特点是采用自然邻点插值构造的形函数具有 Kronecker δ 函数的性质, 可以直接施加本质边界条件[140,141]. 董轶和马永其等引入杂交元的思想建立了弹性力学和弹塑性力学的杂交自然单元法[29,142].

Liew 等基于 Ritz 法建立了无网格 kp-Ritz 方法, 讨论了板的非线性问题[143]、圆柱壳的动态稳定性[144]、板的后屈曲分析[145]、功能梯度板[146]、sine-Gordon 方程[147]、功能梯度纳米管[148]和生物种群[149]等问题. Cheng 等还建立了 sine-Gordon 方程的移动最小二乘 Ritz 法[150].

Liu 等建立了点插值法[12]. 这一方法是以多项式作为基函数, 在点 $\boldsymbol{x}$ 的邻域内构造满足 Kronecker δ 函数特性的试函数, 可以方便地施加本质边界条件, 不足之处是在计算形函数时容易出现奇异. Liu 等还提出了矩阵变换法[151]、局部径向点插值法[152]和线性一致径向点插值法[153].

2003 年 Idelsohn 等提出了无网格有限元法[31]. 该方法将无网格方法和基于网格的方法相结合, 基于 Voronoi 图来构造形函数, 具有无网格方法和基于网格的数值方法的优点, 但同时也是介于无网格方法和基于网格的数值方法之间的一种方法.

无网格边界积分方程方法是将边界积分方程方法和无网格方法的逼近函数相结合形成的无网格方法.

目前发展的无网格边界积分方程方法主要有 Mukherjee 等提出的边界点法[37]和杂交边界点法[38]、Atluri 等提出的局部边界积分方程方法[39,40]、Liu 等提出的边界点插值法[41]和程玉民等提出的边界无单元法[42−46]等.

Mukherjee 等提出的边界点法是将移动最小二乘法导出的逼近函数代入边界积分方程中, 由于采用节点变量的近似解作为基本未知量, 所以对源点和场点的位移和面力均需应用移动最小二乘法建立逼近函数, 增加了求解和引入边界条件的复杂性, 还需设置 “评估点”.

局部边界积分方程方法的思想是在引入局部基本解后在边界节点或内点邻域边界上建立局部边界积分方程, 然后引入移动最小二乘法进行求解. 局部边界积分方程方法的优点是引入 “伴随解” 的概念, 在内部节点子域应用边界积分方程时, 用相关节点位移代替了边界积分方程中的面力项, 使该方法既具有完全无网格的优点又具有有限元求解方程格式. 这一优点使该方法在求解边值问题时较为灵活, 使得其在很多领域得到了应用[154]. 但是, 局部边界积分方程方法不仅需要对求解域离散, 即在域内布点, 而且局部边界是各节点或内点子域的边界, 对原问题的区域来说等于增加了新的边界, 因此计算量要大于边界元法和边界点法.

与边界点法相比, 程玉民等提出的边界无单元法采用的边界积分方程是常见的较为规则的形式, 不需要在源点的邻域内设置 Gauss 点, 也不需选择所谓的 “评估点”, 因而求解过程更简单. 与局部边界积分方程方法相比, 边界无单元法使用整体边界上的边界积分方程, 不需要对每一个边界点建立局部边界积分方程, 只要由边界积分方程求得所配边界节点上的未知量, 其他边界节点的未知量可由逼近函数得到. 最为重要的是边界无单元法是无网格边界积分方程方法的直接列式法, 在形成的边界积分方程中直接采用节点变量的真实解为基本未知量, 更容易引入边界条件, 且具有更高的精度. 在此基础上, Miers 和 Telles 建立了弹塑性力学和功能梯度材料分析的边界无单元法[155,156].

Zhang 等提出的杂交边界点法是将移动最小二乘法和杂交位移变分公式相结合而形成的. 该方法不论是逼近函数的构造还是数值积分都不需要网格, 故是一种完全的无网格方法.

Liu 等提出的边界点插值法是将点插值法和边界积分方程相结合而建立的. 这一方法的主要优点是形函数满足 Kronecker δ 函数特性, 便于施加边界条件, 计算量介于边界元法和边界点法之间. 该方法的缺点也比较明显, 例如要适当地选择多项式基函数和一些径向基函数的参数, 否则可能引起矩阵的奇异性和较大的计算误差.

无网格边界积分方程方法不仅具有降维、计算精度高等优点, 而且在形函数构

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com