应用型人才培养系列教材

概率论与数理统计

GAILULUN YU SHULI TONGJI

主编 林道荣 田蓓艺
陈荣军 陆志峰

苏州大学出版社
Soochow University Press

应用型人才培养系列教材

概率论与数理统计

主　编　林道荣　田蓓艺
　　　　陈荣军　陆志峰
副主编　郭跃华　钱　峰
　　　　袁俊丽　马素萍
　　　　周献丽　赵灵芝
　　　　刘春连　张　昊

苏州大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计 / 林道荣等主编. —苏州：苏州大学出版社，2015.4
应用型人才培养系列教材
ISBN 978-7-5672-1259-6

Ⅰ.①概… Ⅱ.①林… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 066984 号

内容提要

本教材是根据教育部高等学校工科数学教学指导委员会拟定的概率论与数理统计课程教学的基本要求，并结合中学数学教学实际编写，内容包括随机事件及其概率、一维离散型随机变量、一维连续型随机变量、二维随机变量、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验等.

本书可作为应用型、工程型本科院校理、工、医、经、管类等各专业概率论与数理统计公共基础课程教材，也可供相关专业的大学生、教师、工程技术人员参考.

概率论与数理统计
林道荣等 主编
责任编辑 征 慧

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市十梓街 1 号 邮编：215006)
苏州恒久印务有限公司印装
(地址：苏州市友新路 28 号东侧 邮编：215128)

开本 787×1092 1/16 印张 13.25 字数 306 千
2015 年 4 月第 1 版 2015 年 4 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-1259-6 定价：26.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部 电话：0512-65225020
苏州大学出版社网址 http://www.sudapress.com

前言

PREFACE

概率论与数理统计是研究随机现象客观规律性的数学分支，是高等院校理、工、医、经、管类等专业的一门重要的基础理论课.通过本课程的教学，旨在使学生掌握概率论与数理统计的基本概念，了解它的基本理论和方法，从而初步掌握处理随机事件的基本思想和方法，培养运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力.

本书主要面向培养技术应用、生产、服务和组织管理的各类应用型、工程型人才的高等学校的学生，具有如下特色：(1) 知识组织顾及学生实际，注意与中学教材接轨，遵循认知科学规律；(2) 知识展开源于核心实际问题，彰显知识的实际本质；(3) 知识结构围绕实际需要，强调基础、实用；(4) 能力体系围绕实际需要，突出对基本知识的熟练掌握和灵活应用；(5) 结合实际需要精选例题、习题，强调知识与生产实践的贯通；(6) 每章配有学习指导、内容小结，方便学生学习与提高教学质量；(7) 利用案例分析丰富学生知识面，增强教材的可读性与趣味性，激发学生对实际问题的思考.

本书共分八章，内容包括随机事件及其概率、一维离散型随机变量、一维连续型随机变量、二维随机变量、大数定律与中心极限定理、数理统计的基本知识、参数估计、假设检验等内容.通过突出重点、简化内容而便于学生阅读掌握，增补解题范例而利于学生掌握使用概率统计方法处理随机现象的本领，选编练习题、复习巩固题与提高题而使学生得以进行充分的自我检测.另外，本书还涵盖全国硕士研究生数学入学考试概率论与数理统计部分的全部知识点，对广大报考硕士研究生的同学来说是一本较好的复习资料.

本书由南通大学杏林学院林道荣、常州工学院陈荣军、南京晓庄学院田蓓艺、南通大学陆志峰担任主编，南通大学郭跃华和袁俊丽、常州工学院钱峰、南通开放大学马素萍、南京晓庄学院周献丽和赵灵芝、南通大学杏林学院刘春连、南京工程学院张昊担任副主编，南通大学马登举、郁胜旗、于长俊、金晶亮、孙建平、于志华、赵敏及南通大学杏林学院任洁、陆燕也参加了部分编写工作.

本书在编写过程中得到了南通大学杏林学院教材工作委员会、教务处、理学部的支持和帮助，在此向各位表示感谢！

本书由南通大学张凤然、赵为华初审，中国石油大学王子亭主审，他们提出了许多中肯而宝贵的修改意见，编者在此表示衷心的感谢！

由于编者水平有限，书中缺陷和错误在所难免，诚请广大专家、同仁和读者批评指正.

编　者

2015 年 1 月

目录

CONTENTS

第 1 章　随机事件及其概率

1.0 引论与本章学习指导

1.0.1 引　论

某高校 8000 名学生中人文学院和经管学院各 1200 名、信息学院和工学院各 1600 名、医学院 2000 名、理学院 400 名，其中男生 3000 名，女生 5000 名。现推荐 7 名同学参加国家奖学金评选，有如下问题：

(1) 推荐的 7 名学生中有几名男生？3 名男生有可能吗？可能性是多少？

(2) 优秀学生甲和乙被推荐参加国家奖学金评选的概率分别为 0.5 与 0.6，同时被推荐的概率为 0.25，那么优秀学生甲或优秀学生乙被推荐参加国家奖学金评选的概率是多少？

(3) 从推荐的 7 名学生中任意指定一名同学，“该学生是医学院学生”的可能性与“该学生是经管学院学生”的可能性一样吗？

(4) 学校推荐 7 名学生参加国家奖学金评选，2 名医学院学生中男、女生各 1 名，其他五个学院的 5 名学生中有 2 名男同学和 3 名女同学。现从 7 名学生中任意选取 1 名学生，假设每名学生被选取到的可能性相同，若已知选取到的学生来自医学院，问这名学生是男生的概率是多少？

(5) 8000 名学生中有 7 名学生获得国家奖学金，从中连续地抽取两名学生，问第一次抽到获得国家奖学金的学生而第二次抽到不获国家奖学金学生的概率是多少？

(6) 学校推荐 7 名同学参加国家奖学金评选，分配给医学院 2 个名额，其他 5 个学院各 1 个名额，现从 6 个学院中任意选取一个学院，再从该学院中任意选取一名学生，问该学生被推荐参加国家奖学金评选的可能性为 $\frac{7}{8000}$ 吗？

(7) 现有一名学生被推荐参加国家奖学金评选，问这名学生最可能来自哪个学院？

要回答上述问题，需要用到本章介绍的概率论基础知识，包括随机事件、样本空间、事件的概率、等可能概型、条件概率、事件的独立性等概念，以及古典概率计算公式、加法公式、乘法公式、全概率公式及贝叶斯公式等计算概率的工具.

1.0.2 本章学习指导

本章知识点教学要求如下：

(1) 理解随机事件、事件频率、古典概型、条件概率、事件的独立性等概念.

(2) 理解事件的关系与运算、概率的基本性质，掌握加法公式、乘法公式.

(3) 了解样本空间的概念、概率的统计定义、概率的公理化定义，会使用全概率公式及贝叶斯公式解决有关问题.

显然，需要理解的概念和需要掌握的性质与公式是教学重点，这部分内容同学们学习时要特别注意.

当然，概率的概念、条件概率的概念、全概率公式及贝叶斯公式，这几个内容学习时大多数同学会感到有困难，希望有困难的同学课上认真听讲，课后与老师讨论.

本章教学安排 9 学时.

1.1 随机事件

大家都知道，上抛物体，物体必然落下，子弹没有上膛不可能击中目标，这些都是确定性现象，即在一定条件下，当这些现象重复出现时，其结果总是确定的. 如果在一定条件下，某种现象重复出现时，其结果是不确定的，这种现象就是不确定性现象(也称随机现象、偶然现象). 实际上，自然现象和社会现象都可分为上述两类，即确定性现象和不确定性现象.

本节通过随机试验来研究随机现象，引入样本点、样本空间及随机事件等概念，在此基础上介绍随机事件的关系与运算.

1.1.1 随机事件的概念

对于确定性现象，其结果无非有两种，一种是预先知道某种情况必然发生，另一种是预先知道某种情况必然不发生.

针对前面引论中提出的问题，考虑到学院工作的实际情况，学校规定每个学院至少推荐 1 名学生参加国家奖学金评选，那么每个学院肯定至少有 1 名学生被推荐参加国家奖学金评选. 也就是说，每个学院至少有 1 名学生被推荐参加国家奖学金评选是必然的. 我们把必然发生的事件称为**必然事件**，用$U(\Omega)$来表示.

某个学院某位学生考试有多门不及格，他就不能被推荐参加国家奖学金评选. 也就是说，该学生这次获得国家奖学金是不可能的. 我们把必然不发生的事件称为**不可能事件**，用$V(\varnothing)$来表示.

在现实生活中我们经常看到这类现象重复出现时，其结果是不确定的，即预先不能确定其结果：某种情况是发生呢？还是不发生呢？例如，从推荐的 7 名学生中任意指定一名学生，这位学生是否为男生？又如，抛掷硬币，是否出现有字的面朝上？再如，飞机是否会被击落？

等等. 都有一定程度的偶然性和不可预测性，人们事先不能判定这些结果是否会发生. 我们把这种不确定现象的观察结果称为**随机事件**，简称**事件**. 例如，从推荐参加国家奖学金评选的 7 名学生中选出一名学生是一次试验，可能出现的结果“这名学生是男生”是一个随机事件，“这名学生是女生”也是一个随机事件；抛掷一枚硬币是一次试验，可能出现的结果“有字的面朝上”是一个随机事件，“有字的面朝下”也是一个随机事件；掷一颗骰子是一次试验，“出现 4 点”“出现偶数点”“出现的点数小于 3”等都是随机事件. 我们把导致随机现象发生的过程称为**随机试验**，简称**试验**.

一般地，随机试验有三个特点：一是可以在相同条件下重复多次；二是试验结果不止一个，但能明确所有的结果；三是试验前不能预知出现哪种结果. 而通过随机试验这个过程产生的结果每次试验前不能预言出现哪个，在每次试验后出现的结果不止一个，在相同的条件下进行大量观察或试验时出现的结果有一定的规律性(称之为**统计规律性**)，这种现象称为**随机现象**.

对某高校推荐参加国家奖学金评选的 7 名学生，观察其中男生的人数也是随机试验，可能出现的试验结果有 8 个：“没有男生”“1 名男生”“2 名男生”“3 名男生”“4 名男生”“5 名男生”“6 名男生”“7 名男生”. 随机试验的每一个可能出现的试验结果，如“i 名男生”($i=0,1,2,3,4,5,6,7$)，称为试验的一个样本点，这 8 个样本点组成的集合称为试验的样本空间.

一般地，我们把随机试验中的每一个可能出现的试验结果称为这个随机试验的一个**样本点**，记作 ω_i. 全体样本点组成的集合称为这个随机试验的**样本空间**，记作 Ω，即 $\Omega=\{\omega_i\}$. 仅含一个样本点的随机事件称为**基本事件**，含有多个样本点的随机事件称为**复合事件**.

例如，从推荐参加国家奖学金评选的 7 名学生中选出一名学生，“这名学生是男生”是一个基本事件，“这名学生是女生”也是一个基本事件；抛掷一枚硬币一次，“有字的面朝上”是一个基本事件，“有字的面朝下”也是一个基本事件；掷一颗骰子一次，“出现 4 点”是一个基本事件，而“出现偶数点”“出现的点数小于 3”等不是基本事件，是复合事件. 在随机试验中，随机事件一般是由若干个基本事件组成的，因此样本空间 Ω 的任一子集 A 称为随机事件. 属于随机事件 A 的样本点出现，则称事件 A 发生. 例如，在掷一颗骰子一次的试验中，令 A 表示“出现奇数点”，A 就是一个随机事件，A 还可以用样本点的集合形式表示，即 $A=\{1,3,5\}$，它是样本空间 Ω 的一个子集；掷一颗骰子一次，在试验中出现 1 点、3 点或 5 点，就表明“出现奇数点”这个事件 A 发生了.

注意 (1) 样本空间 Ω 包含所有的样本点，它是 Ω 自身的子集. 在每次试验中，它总是发生的，是必然事件，这也是必然事件记为 Ω 的原因. 同样地，空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间 Ω 的子集. 它在每次试验中都不发生，为不可能事件. 我们知道，必然事件与不可能事件都不是随机事件. 因为作为试验的结果，它们都是确定的，并不具有随机性. 但是为了今后讨论问题方便，我们也将它们当作随机事件来处理.

(2) 随机事件可能有不同的表达方式，一种是直接用语言描述，同一事件可能有不同的描述；也可以用样本空间子集的形式表示，此时，需要理解它所表达的实际含义，有利于对事件的理解.

例 1 进行抛掷一枚硬币 3 次，观察正面出现次数的随机试验 E_1，可能出现的结果是：正面出现 0 次，正面出现 1 次，正面出现 2 次，正面出现 3 次. 于是随机试验 E_1 有四个样本点 $\omega_i=$“正面出现 i 次”，$i=0,1,2,3$. 相应地，样本空间 $\Omega_1=\{\omega_0,\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$. 显然，$\Omega_1$ 为有限样本空间.

例 2 进行向一个目标射击直到击中目标为止，观察射击次数的随机试验 E_2，可能出现的结果是：假设射击的次数为 i，$i=1,2,3,\cdots$，则随机试验 E_2 有无限个(可数)样本点 $\omega_i=$“射击的次数为 i”，$i=1,2,3,\cdots$. 相应地，样本空间 $\Omega_2=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\cdots\}$. 显然，$\Omega_2$ 为无限可数样本空间.

例 3 假设 T_1,T_2 分别是某市的最低温度与最高温度($T_1<T_2$)，进行观察该市每天的最低温度 x 与最高温度 y 的随机试验 E_3. 显然，$T_1\leqslant x<y\leqslant T_2$，于是随机试验 E_3 有无限个(不可数)样本点 $\omega=(x,y)$，其中 $T_1\leqslant x<y\leqslant T_2$. 相应地，样本空间 $\Omega_3=\{(x,y)\mid T_1\leqslant x<y\leqslant T_2\}$. 显然，$\Omega_3$ 为无限不可数样本空间.

说明 一个随机试验中样本点个数的确定都是相对试验目的而言的. 另外，一个随机试验的条件有的是人为的，有的是客观存在的. 在后一种情况下，每当试验条件实现时，人们便会观测到一个结果 ω. 虽然我们无法事先准确地说出试验的结果，但是能够指出它出现的范围 Ω. 因此，我们所讨论的随机试验有着十分广泛的含意.

1.1.2 事件的关系与运算

我们知道，随机事件对应的是样本空间的子集(见图 1.1)，因此，研究随机事件的关系与运算就如同研究集合的关系与运算.

图 1.1 随机事件是样本空间的子集

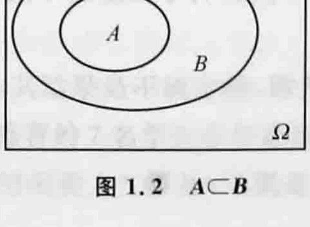

图 1.2 $A\subset B$

1. 事件的包含

若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，或者事件 A 的样本点都是事件 B 的样本点，则称事件 A **包含于**事件 B，或事件 B **包含**事件 A，记作 $A\subset B$（见图 1.2）.

2. 事件的相等

若事件 A 包含于事件 B，又事件 B 包含于事件 A，则称事件 A 和事件 B **相等**，记作 $A=B$.

3. 事件的并(和)

若事件 A 发生或事件 B 发生，也就是说事件 A 与事件 B 至少有一个发生，则称这样的事件为事件 A 与事件 B 的**并（和）事件**，记作 $A\cup B$ 或 $A+B$. 显然，事件 $A\cup B$ 是由事件 A 与事件 B 所有样本点组成的（见图 1.3）.

推广：事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并（和）事件为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$；事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的并（和）事件为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

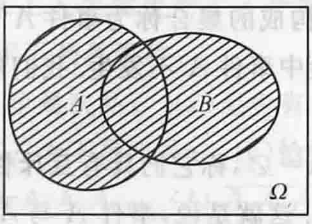

图 1.3　$A\cup B$

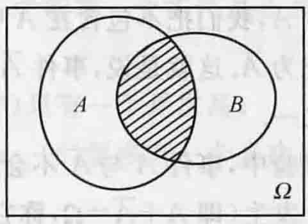

图 1.4　$A\cap B$

4. 事件的交(积)

若事件 A 与事件 B 同时发生，则称这样的事件为事件 A 与事件 B 的**交（积）事件**，记作 $A\cap B$ 或 AB. 显然，事件 $A\cap B$ 是由事件 A 与事件 B 的公共样本点组成的（见图 1.4）.

推广：事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交（积）事件为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$；事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的交（积）事件为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

5. 事件的差

若事件 A 发生而事件 B 不发生，则称这样的事件为事件 A 与事件 B 的**差事件**，记作 $A-B$. 显然，事件 $A-B$ 是由事件 A 的但不是事件 B 的样本点组成的（见图 1.5）.

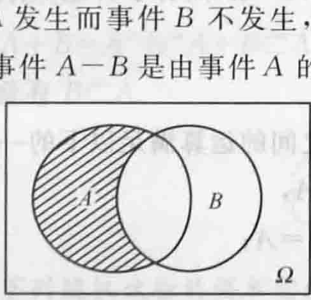

图 1.5　$A-B$

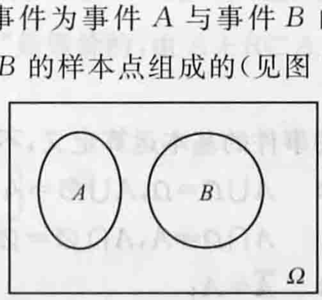

图 1.6　$AB=\varnothing$

6. 事件的互斥(互不相容)

若事件 A 与事件 B 不同时发生，则称事件 A 与事件 B **互斥（互不相容）**（见图 1.6）. 显然，事件 A 与事件 B 互斥等价于 $AB=\varnothing$.

推广：若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 不同时发生，则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 互斥，此时 $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \varnothing$；若事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 不同时发生，则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 互斥，此时 $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \varnothing$.

如果 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n$，那么称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥；如果 $A_iA_j = \varnothing, i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n, \cdots$，那么称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互斥.

注意 就两个事件而言，互斥和两两互斥是一样的；但多于两个事件，事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 两两互斥一定有事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 互斥，但事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 互斥不能保证事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 两两互斥. 例如，在掷一颗骰子的试验中，“出现 4 点”记为事件 A，“出现偶数点”记为事件 B，“出现点数小于 2”记为事件 C，显然 $AB \neq \varnothing$，但 $AC = \varnothing, BC = \varnothing, ABC = \varnothing$，这表明事件 A, B, C 互斥但不两两互斥.

7. **事件的逆(对立)**

对于事件 A，我们把不包含在 A 中的所有样本点构成的集合称为事件 A 的**逆**(或 A 的**对立事件**)，记为 $\overline{A}$. 这就是说，事件 $\overline{A}$ 表示在一次试验中事件 A 不发生. 我们规定它是事件的基本运算之一.

在一次试验中，事件 A 与 $\overline{A}$ 不会同时发生(即 $A\overline{A} = \varnothing$，称它们具有**互斥性**)，而且 A 与 $\overline{A}$ 至少有一个发生(即 $A + \overline{A} = \Omega$，称它们具有**完全性**). 这就是说，事件 A 与 $\overline{A}$ 满足：$A\overline{A} = \varnothing, A + \overline{A} = \Omega$. 于是，事件 A 与事件 B 互相对立等价于每次试验 A, B 中有且只有一个发生. 此时，称事件 B 为事件 A 的对立事件(逆事件)，记为 $B = \overline{A}$.

注意 “事件 A 与事件 B 互相对立”与“事件 A 与事件 B 互斥”是不同的概念.

8. **完备事件组**

若事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥并且 $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$，则称事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为**完备事件组**.

推广：若事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 两两互斥并且 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$，则称事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为完备事件组.

9. **运算律**

根据上面的事件的基本运算定义，不难验证事件之间的运算满足以下的一些规律：

(1) 吸收律 $A \cup \Omega = \Omega, A \cup \varnothing = A, A \cup (AB) = A$,
$A \cap \Omega = A, A \cap \varnothing = \varnothing, A \cap (A \cup B) = A$;

(2) 重余律 $\overline{\overline{A}} = A$;

(3) 幂等律 $A \cup A = A, A \cap A = A$;

(4) 差化积 $A - B = A\overline{B} = A - (AB)$;

(5) 交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$;

(6) 结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;

(7) 分配律 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$;

(8) 反演律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}$，$\overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

推广：$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$，$\overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$.

例 4　设 A,B,C 是三个随机事件. 试用 A,B,C 表示下列各事件：

(1) 恰有 A 发生；(2) A 和 B 都发生而 C 不发生；

(3) 这三个事件都发生；(4) A,B,C 至少有一个发生；

(5) 至少有两个事件发生；(6) 恰有一个事件发生；

(7) 恰有两个事件发生；(8) 不多于一个事件发生；

(9) 不多于两个事件发生；(10) 三个事件都不发生.

解　(1) $A\overline{B}\,\overline{C}$；(2) $AB\overline{C}$；(3) ABC；(4) $A\cup B\cup C$；

(5) $AB\cup BC\cup CA$；(6) $A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C$；(7) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$；

(8) $\overline{AB}\cup\overline{BC}\cup\overline{CA}$；(9) $\overline{ABC}$；(10) $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$.

例 5　设某工人连续生产了 4 个零件，A_i 表示他生产的第 i 个零件是正品($i=1,2,3,4$)，试用 A_i 表示下列各事件：

(1)没有一个是次品；(2)至少有一个是次品；(3)只有一个是次品；

(4)至少有三个不是次品；(5)恰好有三个是次品；(6)至多有一个是次品.

解　(1) $A_1A_2A_3A_4$；(2) $\overline{A_1A_2A_3A_4}$；

(3) $\overline{A}_1A_2A_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1A_2A_3\overline{A}_4$；

(4) $\overline{A}_1A_2A_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1A_2A_3\overline{A}_4+A_1A_2A_3A_4$；

(5) $\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$；

(6) $A_1A_2A_3A_4+\overline{A}_1A_2A_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1A_2A_3\overline{A}_4$.

例 6　下列各式说明 A 与 B 之间具有何种包含关系？

(1) $AB=A$；(2) $A+B=A$.

解　(1) 因为“$AB=A$”与“$AB\subset A$ 且 $A\subset AB$”是等价的，由 $A\subset AB$ 可以推出 $A\subset A$ 且 $A\subset B$，因此有 $A\subset B$.

(2) 因为“$A+B=A$”与“$A+B\subset A$ 且 $A\subset A+B$”是等价的，由 $A+B\subset A$ 可以推出 $A\subset A$ 且 $B\subset A$，因此有 $B\subset A$.

练习题

1. 试写出下列随机试验的样本空间：

(1) 同时抛三颗骰子，记录三颗骰子点数之和；

(2) 记录一名学生一次考查的等级(以“优”“良”“中”“及格”“不及格”五级记录成绩)；

(3) 生产产品直到有 10 件正品为止，记录生产产品的总件数；

(4) 一个口袋中有 5 只外形相同的球，编号为 1,2,3,4,5，从中同时取 3 只球.

2. 从某班学生中任选一名学生，设 $A=\{$选出的学生是男生$\}$，$B=\{$选出的学生是数学

建模爱好者}，C={选出的学生是班干部}，试问：

(1) ABC； (2) $\overline{A}B\overline{C}$； (3) $\overline{A\cup C}$； (4) $A-(B\cup C)$

分别表示什么事件？

1.2 随机事件的概率

某高校推荐7名学生参加国家奖学金评选，推荐的7名学生中有2名男生是有可能的，有3名男生也是有可能的．同样地，抛掷一枚硬币，有字的面可能朝上也可能朝下．那么，“可能”“也可能”表示什么？有没有更好的描述？

本节先介绍频率的概念，然后通过若干实例观察频率的稳定性而形成概率的统计定义．为了克服概率统计定义的缺点，引入概率的公理化定义．

1.2.1 概率的统计定义

引例 2005年8月26日“超女”决赛，粉丝们通过手机给“超女”投票的总数为8153054，其中李宇春得3528308票，周笔畅得3270840票，张靓颖得1353906票，分别占43.27%、40.12%、16.61%，李宇春获胜．李宇春之所以获胜，是因为她得票多，或得票比大．李宇春的得票比为43.27%，就是在8153054次投票中，她获得了3528308票，因此，3528308/8153054＝43.27%．同样地，3270840/8153054＝40.12%，1353906/8153054＝16.61%．这些得票比就是得票频率，被视为获胜依据．

一般地，设在n次试验中，事件A发生了m次，则$f_n(A)=\frac{m}{n}$称为事件A发生的频率．特别地，$f_n(\varnothing)=0$，$f_n(\Omega)=1$．这是因为在n次试验中，不可能事件$\varnothing$每次都不发生，即发生了0次，而必然事件Ω每次都发生，即发生了n次．

显然，对于任意事件A，不管进行多少次试验，事件A发生的频率总满足

$$0\leqslant f_n(A)\leqslant 1.$$

若事件A和B互斥，则$f_n(A\cup B)=f_n(A)+f_n(B)$．这是频率的可加性，这一性质可推广到有限个两两互斥事件的和事件．

蒲丰(Buffon)投一枚硬币4040次，观察到正面向上的次数为2048，则正面向上的频率为0.5069．

皮尔森(Pearson)投一枚硬币12000次，观察到正面向上的次数为6019，则正面向上的频率为0.5016；而投一枚硬币24000次，观察到正面向上的次数为12014，则正面向上的频率为0.5005．实际上，随着投硬币次数越来越多，正面向上的频率与0.5越来越接近．这就是所谓的**频率稳定性**．

一般地，在一组不变的条件S下，独立地重复做n次试验，事件A发生m次．当试验次数n很大时，事件A的频率$f_n(A)=\frac{m}{n}$稳定地在某一数值p附近摆动，而且随着试验次数的