华大精制 高校教材

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

主编　尤正书　刘俊菊

教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

高等数学

主　编　尤正书　刘俊菊
编　者　（以姓氏笔画为序）
尤正书　朱　华　刘俊菊
吴海燕　余跃丰　梁　军

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书主要通过简洁明了的表述将高等数学的理论较全面地介绍给读者，使读者学习后能尽快地应用这些理论和方法解决实际中的问题，对证明过程较为复杂的结论，我们进行了简化，尽可能地使读者理解其精华，回避了过于难繁的证明，从而达到够用、管用、会用的作用。

本书可作为独立学院和同类院校数学课程教学的教材，也可作为相关科研工作者的参考用书。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/尤正书，刘俊菊　主编. —武汉：华中师范大学出版社，2014.8
(普通高等教育"十二五"规划教材)
ISBN 978-7-5622-6610-5

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①尤…　②刘…　Ⅲ.①高等数学—高等学校—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 092113 号

高等数学

©尤正书　刘俊菊　主编

编 辑 室：第二编辑室　**电　　话**：027－67867362
责任编辑：袁正科　**责任校对**：易　雯　**封面设计**：罗明波
出版发行：华中师范大学出版社
社　　址：湖北省武汉市珞喻路 152 号　**邮　　编**：430079
销售电话：027－67863426/67863280(发行部)　027－67861321(邮购)　027－67863291(传真)
网　　址：http://www.ccnupress.com　**电子信箱**：hscbs@public.wh.hb.cn
印　　刷：武汉市新华印刷有限责任公司　**督　　印**：章光琼
开　　本：787mm×1092mm　1/16　**印　　张**：20.75　**字　　数**：460 千字
版　　次：2014 年 8 月第 1 版　**印　　次**：2014 年 8 月第 1 次印刷
印　　数：1—2000　**定　　价**：38.00 元

欢迎上网查询、购书

前　言

当前，中国的高等教育改革已进入攻坚阶段。以往的传统数学课程，从体系结构与内容、深度、广度等方面都已不适应正在变化的应用型高等教育形势。近些年来，尽管各具特色的应用型高等数学教材陆续登场，但仍然不足以适应应用型高等教育发展的要求和迅猛形势。在这一背景下，我们汲取了传统高等数学教材的优点，结合各校各专业数学教学改革的经验，注意国外同类学校的改革动向，特别是数学思想与数学现代化手段应用的趋势，决定编写一套具有以下特点的教材：

1. 以“三用”为原则

(1) 够用。删去传统教材中难而繁的内容，保留理、工、农、医、管各专业必须作为基础的内容，达到满足其需要的最大限度，够用即可。

(2) 管用。增添必需的以往传统教材中没有的知识内容，使教材适合各专业的需要，达到管用的效果。

(3) 会用。淡化传统教材偏重理论的思想，删去理论性较强的内容，强调数学知识的应用，力求学以致用，学后会用，增强学生学习数学的信心与兴趣。

2. 以简练、全面、应用性强为特色

(1)强调教材的表述简练、准确，且内容全面，包括了一元、二元微积分、级数和微分方程等内容。

(2)不盲目追求运算技巧，着重于培养学生解决实际问题的能力。

(3)凸显数学的应用性。如把有重要应用的“微元法”贯穿在整个教材中，又如“一元函数的积分学”一章，改变传统的讲解顺序，从定积分切入，以有实际应用的定积分为主线，降低不定积分的地位。注意概念的实际背景和理论知识的应用。

为了使本教材有更宽广的适用性，我们编写时，在保证科学性和逻辑性的前提下，更注重培养学生良好的科学思维习惯，叙述语言力求准确、生动，条理清晰、简洁。标有 * 号的内容，可由主讲者根据专业及学生状况自由取舍或另外安排课时(计划课时之外)讲授。

参加本教材编写的老师有：尤正书、刘俊菊、朱华、余跃丰、梁军、吴海燕。

尽管我们非常努力，但由于水平有限，书中难免有诸多不妥之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

2014 年 4 月

目　录

第 1 章　函　　数

微积分是一门以极限理论为基础、以函数为研究对象的基础学科。而此处的函数指的是实变函数，是以实数为其定义域和取值区域的，因此本章将首先简略介绍实数概念的建立，实数的性质以及一些重要的实数集合；然后介绍函数的概念，函数的一些性质，函数的复合方法，最后介绍初等函数。

1.1　实　　数

在中学阶段我们已经了解了实数的一些基本知识：实数的分类、实数在数轴上与点一一对应，但这些知识还是初步的、肤浅的。为了学习研究微积分，必须更深入地了解实数在微积分中的地位与作用，我们将简要介绍实数的基本性质。

1.1.1　从有理数到实数

自然数 1，2，3，4，5，… 是人类因“数数”之需而产生的第一个数学模型，是一切数产生的根基，是一切数产生的始源。

下面举一个简例说明由于度量问题产生可公度的量。

给一个长为 3 的尺子 a，一个长为 5 的尺子 b(见图 1-1)。

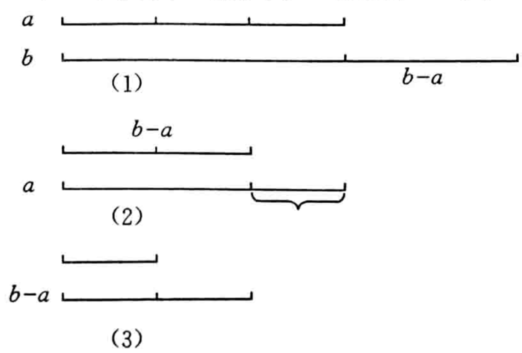

图 1-1

第一次用 a 去量 b 一次剩下 $b-a=2$，再用 $b-a=2$ 去量 a 一次剩下 $a-(b-a)=1$，最后用剩下的 $2a-b=1$ 去量 $b-a=2$，2 次量尽。我们说 a 与 b 是可公度的。

我们知道现实的量都是用数去表示的，数就是现实中量的抽象概括。

在古希腊，大约公元前 600 年 —500 年，毕达哥拉斯那个时代已认识到：可公度的量可表示为“整数的比”，后人称之为**有理数**。在古希腊那样低下的生产力水平下，人们认为

一切数就是“整数之比”。

毕达哥拉斯学派最负盛名的成果之一就是发现并证明了“**勾股定理**”。然而就是这一发现引出了不可公度的数 —— **无理数**，动摇了他的“万物皆数(有理数)”的哲学体系的基石。

有理数就是分数，即设 p,q 为整数，$q\neq 0$，则$\dfrac{p}{q}$为有理数。

有理数有如下一些重要性质：

(1) **有序性**　对 3 个任意有理数 a,b,c，有如下性质：

① 三个关系式 $a>b,a=b,a<b$ 有且仅有一个成立，叫**三分性**。

② 若 $a>b,b>c$，则 $a>c$，叫**传递性**。

③ 若 $a>b$，则必存在一个 c，使 $a>c>b$，叫**稠密性**。

(2) **代数运算性质**　设 a,b,c 为有理数，则有：

$a+b=b+a,(a+b)+c=a+(b+c),ab=ba,(ab)c=a(bc),(a+b)c=ac+bc$，等等。

(3) **度量性质**(阿基米得公理)　对任何正数 c，总存在大于 c 的自然数 n。即如果 $0<a<b$，则存在自然数 n，使 $na>b$。这条公理就是从两线段的公度问题抽象出来的，这是度量理论的基础。

无理数首次出现，是在大约公元前 400 年，毕达哥拉斯学派的一个学者希帕索斯发现了单位正方形的边与对角线是不可公度的，换言之，若令对角线长为 x(见图 1-2)，由勾股定理可知 $x^2=2$(用现代语言讲 $x=\sqrt{2}$ 是无理数)。然而希伯索斯证明了这个 x 不是“整数之比”。

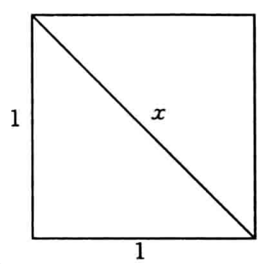

图 1-2

不妨令 $x=\dfrac{p}{q}$，并设 p 与 q 互质，则 $x^2=\dfrac{p^2}{q^2}=2$，推出 $p^2=2q^2$ 是一个偶数，因此 p 为偶数。可设 $p=2m$，于是 $4m^2=2q^2$，导出 $2m^2=q^2$ 是偶数。从而 q 为偶数，这与 p 和 q 互质矛盾。以后，类似于这样不能表示成整数之比的数就叫做无理数。

1.1.2　实数的性质 —— 连续性

除了在 1.1.1 中讲到的有理数的性质外，实数具有有理数不具有的**连续性**。

注意　稠密性不等于连续性。

我们考察一条以 O 为起点的射线 OX(见图 1-3)。

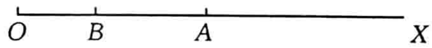

图 1-3

在 OX 上取一点 B，并使线段 OB 的长为 1，则任一点 A 所对应的线段 OA 可能正好为有理数，也有可能不是有理数（比如 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$ 等）。尽管 OX 上的有理点非常稠密，但它们之中插进了许多甚至比有理点还多得多的无理点。只有把这些无理点加入后，整个射线才是连续不断的，否则仅有有理点的射线是断断续续的，留下许多的空隙。因此，整个可度量的量（包括可公度的，不可公度的）如果仅用有理数来表示，便只能表示可公度的量，这不能不说是一个遗憾。

为了完善这一理论，1872 年三位德国数学家戴德金、康托尔、外尔斯特拉斯不约而同地发表了论文，用不同的数学思想和方法建立了严密系统的实数理论，刻画了实数的连续性。

下面我们用戴德金的"分割法"来形象刻画实数的连续性。我们把全部有理数用金粉描在黑色数轴上，那么在直线上呈现出稠密的无限多个金色亮点。我们用一把锋刃极薄的无厚度的刀子去割这条直线，将会出现下列两种情况之一：

(1) 刀刃恰好切在金色亮点上；

(2) 刀刃恰好切在非金色亮点的点上（确实存在），这时该空隙表示一个非有理数的新数，即无理数。再用金粉描在这些新点上，那么整条直线就是一条连续不断的金色直线。

1.1.3　绝对值、区间和邻域

1. 绝对值

直线上两点间的距离是可以用来描述实数的连续性的，而数学上用**绝对值**来表示距离这一概念。

实数 x 的绝对值，记作 $|x|$，定义为：

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$|x|$ 代表实数轴上点 x 到原点的距离。

注意　绝对值的主要性质有以下几点：

(1) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$；

(2) $|x| \leqslant a \Leftrightarrow -a \leqslant x \leqslant a$（此处 $a > 0$），表示数轴上到原点的距离不超过 a 的所有的点；

(3) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ 或 $x > a$（$a > 0$）。

2. 区间

区间是微积分中最常用的实数的一类集合。区间是介于两个实数之间的全体实数组成的实数集，或是数轴上介于两个点之间的全部点的点集。以下各种区间是实数的子集：

开区间　　$(a,b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$。

闭区间　　$[a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$。

左半开区间 $(a,b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leqslant b\}$。

右半开区间 $[a,b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leqslant x < b\}$。

无穷区间 $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$,

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}, [a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geqslant a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}, (-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leqslant b\},$$

…………

3. 邻域

在研究函数的连续性时,经常使用到一个较特殊的实数的集合,即所谓某点邻域的概念。

点 x_0 的 δ 邻域,记为 $N(x_0,\delta)$,是指在实数轴上和点 x_0 的距离小于 δ 的点的集合。即

$$N(x_0,\delta) = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - x_0| < \delta\}。$$

此处点 x_0 为该邻域的中心,δ 为该邻域的半径。

点 x_0 的去心 δ 邻域,记为

$$\mathring{N}(x_0,\delta) = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}。$$

两个邻域的几何意义如图 1-4 所示:

(a) (b)

图 1-4

习题 1.1

1. 简述量与数的关系、可公度量与不可公度量的意义。

2. 简述第一次数学危机。

3. 证明$\sqrt{3}$不是整数之比。

4. 用自己的话描述实数的连续性。

5. 用适当的方法表示下列集合。

(1) 小于 7 的非负整数;

(2) $3x - 1 > 0$ 的解集;

(3) 到点 5 的距离不超过 0.1 的点的集合;

(4) 到点 3.5 的距离小于 2 的点的集合。

6. 用区间表示下列不等式的解集。

(1) $3x - 2 > 0$; (2) $x^2 - 9 < 0$; (3) $|x - 2| < 1$;

(4) $0 < |3x + 1| < 2$; (5) $|x| > 1$; (6) $3x - 1 > \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon > 0)$。

1.2 函 数

1.2.1 集合映射与函数的概念

现实世界中,事物往往表现为各种形式的量,其中有的量在整个考察过程中可用固定的数值来表示,这种量叫**常量**;还有一些量,在整个考察过程中取不同的数值,这种量叫**变量**。常量习惯用小写英文字母a,b,c,d等表示,变量习惯用x,y,z,t等字母表示。函数则是反映两个变量之间的依赖关系的数学模型。

函数概念经过了漫长的发展历史,演变成今天的科学描述,即用集合映射来刻画。

定义 1.1 设A,B为两个非空集合,$A\rightarrow B$的对应关系f记为$b=f(a)$,使得对A的每个元a在B中存在唯一的确定的元b与之对应。我们称对应关系f是从A到B的一个**映射**,A叫映射f的**定义域**。

注意 定义中的“存在唯一”是映射单值性的刻画,它只允许**一对一**,**多对一**,而不允许**一对多**,换言之,若$f(a_1)=b_1,f(a_2)=b_2$,且$a_1=a_2$,则必有$b_1=b_2$。

有了上述准备,我们可以刻画函数的定义如下:

定义 1.2 设x和y是两个变量,D是$\mathbf{R}$的非空子集,对任意的$x\in D$,变量y按照某个对应关系f有唯一确定的实数与之对应,则称f是定义在D上的函数。记作$y=f(x)$,x称为**自变量**,y称为**因变量**,D称为f的定义域。数集$\{f(x)\mid x\in D\}$称为f的**值域**.

特别提示

(1) 函数定义的实质是从实数$\mathbf{R}$的非空子集$D\rightarrow\mathbf{R}$的一个映射f,但我们强调两个变量,在定义域D中任意取值的变量x是自变量,而在$\mathbf{R}$中由对应关系确定的值的变量y是因变量。

(2) 两函数相同当且仅当它们的定义域相同且对应关系相同。例如,$y=x$与$y=|x|$,它们定义域相同,但对应关系不同,因此它们是不同的两个函数。又如$y=\ln x^2$与$y=2\ln x$,它们的定义域不同,当然不是相同的函数。

(3) 我们这儿定义的函数是一个自变量对应一个因变量,叫一元函数。实际上,存在多个自变量对应一个因变量的函数,叫多元函数。

例 1 设X为$O\text{-}xyz$坐标空间上的点的集合,$\mathbf{R}^+=[0,+\infty)$。对任意一点$P=(x,y,z)$,定义

$$f(P)=f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2},$$

表示点P到原点O的距离。这是点集X到点集$\mathbf{R}^+$的一个映射,是一个三元函数。

例 2 某超市 2004 年第一季度各月销售额(万元) 如表 1-1 所示:

表 1-1

月份 t	1	2	3
销售额(万元)	86.2	102.3	64.8

这种用表格表示的两种量的对应关系也是一种函数的关系,定义域 $D=\{1,2,3\}$,值域 $A=\{86.2,102.3,64.8\}$。

例 3 某地某日的气温 T 和时间 t 是两个变量,由气温自动记录仪描得一条曲线(见图 1-5),这条曲线表示了 t 为自变量、T 为因变量的函数关系。注意,t 不能是 T 的函数。

例 4 $y=|x|=\begin{cases}x, x\geqslant 0,\\ -x, x<0\end{cases}$ 表示 y 是 x 的函数(见图 1-6),称为绝对值函数。

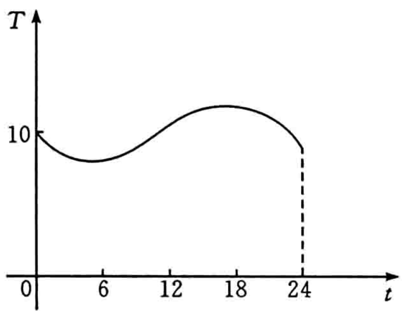

图 1-5

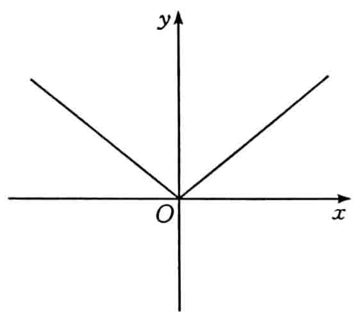

图 1-6

特别提示

(1) 函数的定义域对于具有实际意义的问题而言,是由题意确定的,如例 2 中的定义域是 $D=\{1,2,3\}$,例 3 中的定义域是 $D=[0,24)$,又如圆的面积 S 是半径 r 的函数,$S=\pi r^2$,其定义域是$(0,+\infty)$。

(2) 解析式表达的函数,其定义域是使解析式有意义的自变量所取的一切值的集合,通常叫**自然定义域**。

一类求函数定义域的习题指的就是求这种自然定义域。

例 5 求函数 $y=\dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$ 的定义域。

解 该函数的定义域 D 中的值 x 应满足:

$$\begin{cases}1+x>0,\\ x-1\neq 0,\end{cases}\qquad 即\begin{cases}x>-1,\\ x\neq 1。\end{cases}$$

因此,$D=(-1,1)\cup(1,+\infty)$。

1.2.2 函数的表示法

表示函数常用三种方法:**表格法**、**图示法**和**解析法**。

(1) 例 2 中的函数是用表格形式给出的,叫表格法。