



普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

主编 尤正书 刘俊菊



教育部直属师范大学
华中师范大学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

高等数学

主 编 尤正书 刘俊菊
编 者 (以姓氏笔画为序)
尤正书 朱 华 刘俊菊
吴海燕 余跃丰 梁 军

华中师范大学出版社

内 容 提 要

本书主要通过简洁明了的表述将高等数学的理论较全面地介绍给读者,使读者学习后能尽快地应用这些理论和方法解决实际中的问题,对证明过程较为复杂的结论,我们进行了简化,尽可能地使读者理解其精华,回避了过于难繁的证明,从而达到够用、管用、会用的作用。

本书可作为独立学院和同类院校数学课程教学的教材,也可作为相关科研工作者的参考用书。

新出图证(鄂)字 10 号

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/尤正书,刘俊菊 主编. —武汉:华中师范大学出版社,2014.8

(普通高等教育“十二五”规划教材)

ISBN 978-7-5622-6610-5

I. ①高… II. ①尤… ②刘… III. ①高等数学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 092113 号

高等数学

©尤正书 刘俊菊 主编

编辑室:第二编辑室

电 话:027—67867362

责任编辑:袁正科

责任校对:易 雯

封面设计:罗明波

出版发行:华中师范大学出版社

社 址:湖北省武汉市珞喻路 152 号

邮 编:430079

销售电话:027—67863426/67863280(发行部) 027—67861321(邮购) 027—67863291(传真)

网 址:<http://www.ccnapress.com>

电子信箱:hscbs@public.wh.hb.cn

印 刷:武汉市新华印刷有限责任公司

督 印:章光琼

开 本:787mm×1092mm 1/16

印 张:20.75

字 数:460 千字

版 次:2014 年 8 月第 1 版

印 次:2014 年 8 月第 1 次印刷

印 数:1—2000

定 价:38.00 元

欢迎上网查询、购书

敬告读者:欢迎举报盗版,请打举报电话 027—67861321

前 言

当前,中国的高等教育改革已进入攻坚阶段。以往的传统数学课程,从体系结构与内容、深度、广度等方面都已不适应正在变化的应用型高等教育形势。近些年来,尽管各具特色的应用型高等数学教材陆续登场,但仍然不足以适应应用型高等教育发展的要求和迅猛形势。在这一背景下,我们汲取了传统高等数学教材的优点,结合各校各专业数学教学改革的经验,注意国外同类学校的改革动向,特别是数学思想与数学现代化手段应用的趋势,决定编写一套具有以下特点的教材:

1. 以“三用”为原则

(1) 够用。删去传统教材中难而繁的内容,保留理、工、农、医、管各专业必须作为基础的内容,达到满足其需要的最大限度,够用即可。

(2) 管用。增添必需的以往传统教材中没有的知识内容,使教材适合各专业的需要,达到管用的效果。

(3) 会用。淡化传统教材偏重理论的思想,删去理论性较强的内容,强调数学知识的应用,力求学以致用,学后会用,增强学生学习数学的信心与兴趣。

2. 以简练、全面、应用性强为特色

(1) 强调教材的表述简练、准确,且内容全面,包括了一元、二元微积分、级数和微分方程等内容。

(2) 不盲目追求运算技巧,着重于培养学生解决实际问题的能力。

(3) 凸显数学的应用性。如把有重要应用的“微元法”贯穿在整个教材中,又如“一元函数的积分学”一章,改变传统的讲解顺序,从定积分切入,以有实际应用的定积分为主线,降低不定积分的地位。注意概念的实际背景和理论知识的应用。

为了使本教材有更宽广的适用性,我们编写时,在保证科学性和逻辑性的前提下,更注重培养学生良好的科学思维习惯,叙述语言力求准确、生动,条理清晰、简洁。标有*号的内容,可由主讲者根据专业及学生状况自由取舍或另外安排课时(计划课时之外)讲授。

参加本教材编写的老师有:尤正书、刘俊菊、朱华、余跃丰、梁军、吴海燕。

尽管我们非常努力,但由于水平有限,书中难免有诸多不妥之处,恳请广大读者批评指正。

编 者
2014年4月

目 录

第 1 章 函数	1
1.1 实数	1
1.1.1 从有理数到实数	1
1.1.2 实数的性质——连续性	2
1.1.3 绝对值、区间和邻域	3
习题 1.1	4
1.2 函数	5
1.2.1 集合映射与函数的概念	5
1.2.2 函数的表示法	6
1.2.3 函数的几种特性	8
1.2.4 函数的复合	9
1.2.5 初等函数	10
习题 1.2	12
综合练习一	12
第 2 章 函数的极限 连续函数	15
2.1 数列的极限	15
2.1.1 从“割圆术”谈起——数列极限	15
2.1.2 数列	15
2.1.3 数列极限	16
习题 2.1	17
2.2 函数的极限	18
2.2.1 当 $x \rightarrow x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限	18
2.2.2 当 $x \rightarrow \infty$ 时函数 $f(x)$ 的极限	20
2.2.3 函数极限的定量描述	21
2.2.4 函数极限的性质	23
习题 2.2	23
2.3 极限的四则运算法则	24
习题 2.3	26

2.4 两个极限存在性判定准则 两个重要极限公式·····	26
2.4.1 两个极限存在性判定准则·····	26
2.4.2 一个重要极限·····	26
2.4.3 与自然生长有关的极限公式·····	29
习题 2.4 ·····	31
2.5 无穷小与无穷大·····	32
2.5.1 无穷小·····	32
2.5.2 无穷大·····	33
2.5.3 无穷小的比较·····	33
习题 2.5 ·····	35
2.6 连续函数·····	36
2.6.1 连续函数的概念·····	36
2.6.2 初等函数的连续性·····	39
2.6.3 闭区间上连续函数的性质·····	41
习题 2.6 ·····	41
综合练习二 ·····	42
第3章 一元函数微分学 ·····	44
3.1 导数·····	44
3.1.1 两个例题·····	44
3.1.2 导数的概念·····	45
3.1.3 导数的几何意义、物理意义 ·····	48
3.1.4 连续性与可导性的关系·····	48
习题 3.1 ·····	50
3.2 导数的基本公式和求导法则·····	51
3.2.1 基本初等函数的导数·····	51
3.2.2 导数的四则运算·····	52
3.2.3 复合函数求导法·····	54
3.2.4 隐函数求导法·····	56
习题 3.2 ·····	58
3.3 微分·····	59
3.3.1 微分的概念及运算·····	59
3.3.2 参数方程表示的函数的微分法·····	63
3.3.3 微分的应用·····	64
习题 3.3 ·····	66
3.4 高阶导数·····	67
3.4.1 $y=f(x)$ 的高阶导数的求法 ·····	68

3.4.2 隐函数的二阶导数	69
3.4.3 参数方程表示的函数的二阶导数	70
习题 3.4	71
综合练习三	72
第 4 章 中值定理及导数的应用	74
4.1 中值定理	74
4.1.1 罗尔(Rolle)定理	74
4.1.2 拉格朗日(Lagrange)中值定理	75
4.1.3 柯西(Cauchy)中值定理	77
习题 4.1	77
4.2 洛必达(L'Hospital)法则	78
习题 4.2	81
4.3 函数的单调性	82
习题 4.3	84
4.4 函数的极值与最值	84
4.4.1 函数的极值	84
4.4.2 最大值与最小值	88
4.4.3 经济应用举例	90
习题 4.4	92
4.5 边际分析与弹性分析简介	93
4.5.1 边际分析	93
4.5.2 弹性分析	94
习题 4.5	95
4.6 函数的凸性和曲线的拐点、渐近线	96
4.6.1 函数的凸性和曲线的拐点	96
4.6.2 渐近线	98
习题 4.6	99
4.7 函数图像的描绘	100
习题 4.7	102
综合练习四	102
第 5 章 一元函数积分学	105
5.1 原函数与不定积分	105
5.1.1 函数的原函数与不定积分	105
5.1.2 基本积分公式	107
5.1.3 不定积分的性质	108
习题 5.1	109

5.2 换元积分法	110
5.2.1 第一类换元积分法	110
5.2.2 第二类换元积分法	113
习题 5.2	116
5.3 分部积分法	117
习题 5.3	121
5.4 定积分的概念与性质	122
5.4.1 两个实例——曲边梯形的面积与变速直线运动的路程	122
5.4.2 定积分的定义	125
5.4.3 定积分的几何意义	126
5.4.4 定积分的性质	126
习题 5.4	130
5.5 微积分基本公式	131
5.5.1 变上限的定积分	131
5.5.2 微积分基本公式	132
习题 5.5	134
5.6 定积分的换元法	134
习题 5.6	136
5.7 定积分的分部积分法	136
习题 5.7	139
5.8 反常积分	139
5.8.1 无穷区间上的反常积分	139
5.8.2 无界函数的反常积分	140
习题 5.8	142
5.9 定积分的应用	142
5.9.1 微元法	142
5.9.2 定积分在几何上的应用——面积、体积、弧长	143
5.9.3 定积分在物理上的应用	149
习题 5.9	151
综合练习五	152
第 6 章 无穷级数	155
6.1 数项级数的概念及性质	155
6.1.1 无穷级数的敛散性	155
6.1.2 无穷级数的基本性质	157
习题 6.1	160
6.2 正项级数	160
6.2.1 正项级数的比较判别法	160

6.2.2 正项级数的比值判别法	163
习题 6.2	165
6.3 任意项级数	166
6.3.1 交错级数及其敛散判别法	166
6.3.2 绝对收敛与条件收敛	168
习题 6.3	170
6.4 幂级数	170
6.4.1 幂级数的概念及收敛域	170
6.4.2 幂级数的性质	175
6.4.3 函数展开成幂级数	179
习题 6.4	184
综合练习六	185
第 7 章 常微分方程	187
7.1 常微分方程的基本概念	187
习题 7.1	189
7.2 一阶微分方程	190
7.2.1 可分离变量的微分方程	190
7.2.2 齐次方程	191
7.2.3 一阶线性微分方程	194
习题 7.2	198
7.3 二阶微分方程	198
7.3.1 可降阶的二阶微分方程	198
7.3.2 二阶线性微分方程解的结构	201
7.3.3 二阶常系数齐次线性微分方程	202
7.3.4 二阶常系数非齐次线性微分方程	204
7.3.5* 常系数线性微分方程组举例	211
习题 7.3	212
综合练习七	213
第 8 章 空间解析几何与向量代数	216
8.1 空间直角坐标系	216
8.1.1 空间直角坐标系	216
8.1.2 空间两点间的距离	218
习题 8.1	219
8.2 向量代数	219
8.2.1 向量及其加减法 向量与数的乘法	219
8.2.2 向量的坐标	223
8.2.3 向量的数量积 向量积	226

习题 8.2	231
8.3 平面与空间直线	231
8.3.1 平面及其方程	231
8.3.2 空间直线及其方程	235
习题 8.3	239
8.4 曲面及其方程简介	240
8.4.1 空间曲面与三个变量的方程 $F(x, y, z)=0$ 的对应关系	240
8.4.2 柱面方程	240
习题 8.4	242
综合练习八	242
第 9 章 多元函数微分学	245
9.1 二元函数的极限及连续性	245
9.1.1 区域	245
9.1.2 二元函数	247
9.1.3 二元函数的极限	247
9.1.4 二元函数的连续性	249
习题 9.1	250
9.2 偏导数	250
9.2.1 偏导数的概念	250
9.2.2 高阶偏导数	253
习题 9.2	254
9.3 全微分	255
9.3.1 全微分的概念	255
9.3.2 全微分在近似计算中的应用	257
习题 9.3	258
9.4 多元复合函数的微分法	258
9.4.1 多元复合函数的求导法则	258
9.4.2 复合函数的全微分	261
习题 9.4	262
9.5 隐函数的微分法	262
习题 9.5	264
9.6 多元函数的极值	264
9.6.1 多元函数的极值及最大值、最小值	264
9.6.2 条件极值 拉格朗日乘数法	266
9.6.3* 最小二乘法	269
习题 9.6	272

综合练习九·····	272
第 10 章 二重积分 ·····	274
10.1 二重积分的概念与性质·····	274
10.1.1 两个典型问题·····	274
10.1.2 二重积分的定义·····	276
10.1.3 二重积分的性质·····	277
习题 10.1 ·····	278
10.2 二重积分的计算·····	279
10.2.1 在直角坐标系下计算二重积分·····	279
10.2.2 在极坐标系下计算二重积分·····	285
习题 10.2 ·····	289
10.3* 二重积分的应用 ·····	290
10.3.1 体积·····	290
10.3.2 曲面的面积·····	291
10.3.3 平面薄片的重心·····	293
习题 10.3 ·····	294
综合练习十·····	294
附录一 常用的初等数学公式·····	297
附录二 积分表(节选)·····	301
习题参考答案·····	308

第 1 章 函 数

微积分是一门以极限理论为基础、以函数为研究对象的基础学科。而此处的函数指的是实变函数,是以实数为其定义域和取值区域的,因此本章将首先简略介绍实数概念的建立,实数的性质以及一些重要的实数集合;然后介绍函数的概念,函数的一些性质,函数的复合方法,最后介绍初等函数。

1.1 实 数

在中学阶段我们已经了解了实数的一些基本知识:实数的分类、实数在数轴上与点一一对应,但这些知识还是初步的、肤浅的。为了学习研究微积分,必须更深入地了解实数在微积分中的地位与作用,我们将简要介绍实数的基本性质。

1.1.1 从有理数到实数

自然数 $1, 2, 3, 4, 5, \dots$ 是人类因“数数”之需而产生的第一个数学模型,是一切数产生的根基,是一切数产生的始源。

下面举一个简例说明由于度量问题产生可公度的量。

给一个长为 3 的尺子 a , 一个长为 5 的尺子 b (见图 1-1)。

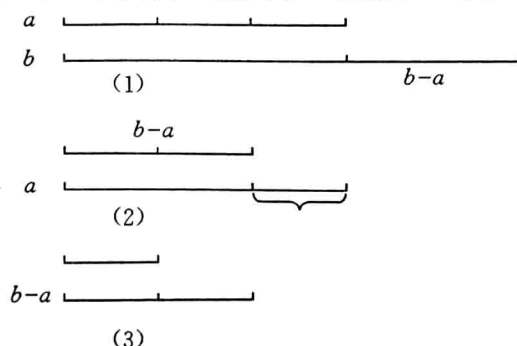


图 1-1

第一次用 a 去量 b 一次剩下 $b-a=2$, 再用 $b-a=2$ 去量 a 一次剩下 $a-(b-a)=1$, 最后用剩下的 $2a-b=1$ 去量 $b-a=2$, 2 次量尽。我们说 a 与 b 是可公度的。

我们知道现实的量都是用数去表示的, 数就是现实中量的抽象概括。

在古希腊, 大约公元前 600 年—500 年, 毕达哥拉斯那个时代已认识到: 可公度的量可表示为“整数的比”, 后人称之为有理数。在古希腊那样低下的生产力水平下, 人们认为

一切数就是“整数之比”。

毕达哥拉斯学派最负盛名的成果之一就是发现并证明了“勾股定理”。然而就是这一发现引出了不可公度的数——无理数，动摇了他的“万物皆数(有理数)”的哲学体系的基石。

有理数就是分数，即设 p, q 为整数， $q \neq 0$ ，则 $\frac{p}{q}$ 为有理数。

有理数有如下一些重要性质：

(1) 有序性 对 3 个任意有理数 a, b, c ，有如下性质：

① 三个关系式 $a > b, a = b, a < b$ 有且仅有一个成立，叫三分性。

② 若 $a > b, b > c$ ，则 $a > c$ ，叫传递性。

③ 若 $a > b$ ，则必存在一个 c ，使 $a > c > b$ ，叫稠密性。

(2) 代数运算性质 设 a, b, c 为有理数，则有：

$a + b = b + a, (a + b) + c = a + (b + c), ab = ba, (ab)c = a(bc), (a + b)c = ac + bc$ ，等等。

(3) 度量性质(阿基米得公理) 对任何正数 c ，总存在大于 c 的自然数 n 。即如果 $0 < a < b$ ，则存在自然数 n ，使 $na > b$ 。这条公理就是从两线段的公度问题抽象出来的，这是度量理论的基础。

无理数首次出现，是在大约公元前 400 年，毕达哥拉斯学派的一个学者希帕索斯发现了单位正方形的边与对角线是不可公度的，换言之，若令对角线长为 x (见图 1-2)，由勾股定理可知 $x^2 = 2$ (用现代语言讲 $x = \sqrt{2}$ 是无理数)。然而希伯索斯证明了这个 x 不是“整数之比”。

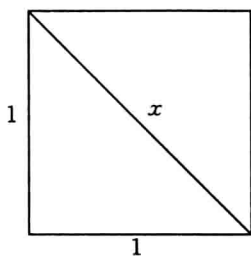


图 1-2

不妨令 $x = \frac{p}{q}$ ，并设 p 与 q 互质，则 $x^2 = \frac{p^2}{q^2} = 2$ ，推出 $p^2 = 2q^2$ 是一个偶数，因此 p 为偶数。可设 $p = 2m$ ，于是 $4m^2 = 2q^2$ ，导出 $2m^2 = q^2$ 是偶数。从而 q 为偶数，这与 p 和 q 互质矛盾。以后，类似于这样不能表示成整数之比的数就叫做无理数。

1.1.2 实数的性质——连续性

除了在 1.1.1 中讲到的有理数的性质外，实数具有有理数不具有的连续性。

注意 稠密性不等于连续性。

我们考察一条以 O 为起点的射线 OX (见图 1-3)。

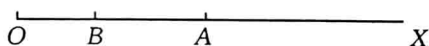


图 1-3

在 OX 上取一点 B , 并使线段 OB 的长为 1, 则任一点 A 所对应的线段 OA 可能正好为有理数, 也有可能不是有理数 (比如 $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ 等)。尽管 OX 上的有理点非常稠密, 但它们之中插进了许多甚至比有理点还多得多的无理点。只有把这些无理点加入后, 整个射线才是连续不断的, 否则仅有有理点的射线是断断续续的, 留下许多的空隙。因此, 整个可度量的量 (包括可公度的, 不可公度的) 如果仅用有理数来表示, 便只能表示可公度的量, 这不能不说是一个遗憾。

为了完善这一理论, 1872 年三位德国数学家戴德金、康托尔、外尔斯特拉斯不约而同地发表了论文, 用不同的数学思想和方法建立了严密系统的实数理论, 刻画了实数的连续性。

下面我们用戴德金的“分割法”来形象刻画实数的连续性。我们把全部有理数用金粉描在黑色数轴上, 那么在直线上呈现出稠密的无限多个金色亮点。我们用一把锋刃极薄的无厚度的刀子去割这条直线, 将会出现下列两种情况之一:

(1) 刀刃恰好切在金色亮点上;

(2) 刀刃恰好切在非金色亮点的点上 (确实存在), 这时该空隙表示一个非有理数的新数, 即无理数。再用金粉描在这些新点上, 那么整条直线就是一条连续不断的金色直线。

1.1.3 绝对值、区间和邻域

1. 绝对值

直线上两点间的距离是可以用来描述实数的连续性的, 而数学上用绝对值来表示距离这一概念。

实数 x 的绝对值, 记作 $|x|$, 定义为:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

$|x|$ 代表实数轴上点 x 到原点的距离。

注意 绝对值的主要性质有以下几点:

(1) $-|x| \leq x \leq |x|$;

(2) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$ (此处 $a > 0$), 表示数轴上到原点的距离不超过 a 的所有点;

(3) $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ 或 $x > a$ ($a > 0$)。

2. 区间

区间是微积分中最常用的实数的一类集合。区间是介于两个实数之间的全体实数组成的实数集, 或是数轴上介于两个点之间的全部点的点集。以下各种区间是实数的子集:

开区间 $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x < b\}$ 。

闭区间 $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x \leq b\}$ 。

左半开区间 $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ 。

右半开区间 $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid a \leq x < b\}$ 。

无穷区间 $(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}$,

$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x > a\}, [a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$,

$(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R} \mid x < b\}, (-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid x \leq b\}$,

.....

3. 邻域

在研究函数的连续性时,经常使用到一个较特殊的实数的集合,即所谓某点邻域的概念。

点 x_0 的 δ 邻域,记为 $N(x_0, \delta)$,是指在实数轴上和点 x_0 的距离小于 δ 的点的集合。即

$$N(x_0, \delta) = \{x \in \mathbf{R} \mid |x - x_0| < \delta\}.$$

此处点 x_0 为该邻域的中心, δ 为该邻域的半径。

点 x_0 的去心 δ 邻域,记为

$$\dot{N}(x_0, \delta) = \{x \in \mathbf{R} \mid 0 < |x - x_0| < \delta\}.$$

两个邻域的几何意义如图 1-4 所示:

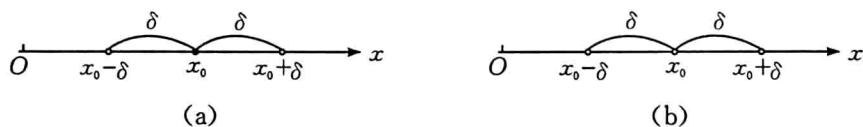


图 1-4

习题 1.1

1. 简述量与数的关系、可公度量与不可公度量的意义。

2. 简述第一次数学危机。

3. 证明 $\sqrt{3}$ 不是整数之比。

4. 用自己的话描述实数的连续性。

5. 用适当的方法表示下列集合。

(1) 小于 7 的非负整数;

(2) $3x - 1 > 0$ 的解集;

(3) 到点 5 的距离不超过 0.1 的点的集合;

(4) 到点 3.5 的距离小于 2 的点的集合。

6. 用区间表示下列不等式的解集。

(1) $3x - 2 > 0$;

(2) $x^2 - 9 < 0$;

(3) $|x - 2| < 1$;

(4) $0 < |3x + 1| < 2$;

(5) $|x| > 1$;

(6) $3x - 1 > \frac{1}{\epsilon} (\epsilon > 0)$ 。

1.2 函 数

1.2.1 集合映射与函数的概念

现实世界中,事物往往表现为各种形式的量,其中有的量在整个考察过程中可用固定的数值来表示,这种量叫常量;还有一些量,在整个考察过程中取不同的数值,这种量叫变量。常量习惯用小写英文字母 a, b, c, d 等表示,变量习惯用 x, y, z, t 等字母表示。函数则是反映两个变量之间的依赖关系的数学模型。

函数概念经过了漫长的发展历史,演变成今天的科学描述,即用集合映射来刻画。

定义 1.1 设 A, B 为两个非空集合, $A \rightarrow B$ 的对应关系 f 记为 $b = f(a)$,使得对 A 的每个元 a 在 B 中存在唯一的确定的元 b 与之对应。我们称对应关系 f 是从 A 到 B 的一个映射, A 叫映射 f 的定义域。

注意 定义中的“存在唯一”是映射单值性的刻画,它只允许一对一,多对一,而不允许一对多,换言之,若 $f(a_1) = b_1, f(a_2) = b_2$,且 $a_1 = a_2$,则必有 $b_1 = b_2$ 。

有了上述准备,我们可以刻画函数的定义如下:

定义 1.2 设 x 和 y 是两个变量, D 是 $\mathbf{R}$ 的非空子集,对任意的 $x \in D$,变量 y 按照某个对应关系 f 有唯一确定的实数与之对应,则称 f 是定义在 D 上的函数。记作 $y = f(x)$, x 称为自变量, y 称为因变量, D 称为 f 的定义域。数集 $\{f(x) \mid x \in D\}$ 称为 f 的值域。

特别提示

(1) 函数定义的实质是从实数 $\mathbf{R}$ 的非空子集 $D \rightarrow \mathbf{R}$ 的一个映射 f ,但我们强调两个变量,在定义域 D 中任意取值的变量 x 是自变量,而在 $\mathbf{R}$ 中由对应关系确定的值的变量 y 是因变量。

(2) 两函数相同当且仅当它们的定义域相同且对应关系相同。例如, $y = x$ 与 $y = |x|$,它们定义域相同,但对应关系不同,因此它们是不同的两个函数。又如 $y = \ln x^2$ 与 $y = 2 \ln x$,它们的定义域不同,当然不是相同的函数。

(3) 我们这儿定义的函数是一个自变量对应一个因变量,叫一元函数。实际上,存在多个自变量对应一个因变量的函数,叫多元函数。

例 1 设 X 为 O -xyz 坐标空间上的点的集合, $\mathbf{R}^+ = [0, +\infty)$ 。对任意一点 $P = (x, y, z)$,定义

$$f(P) = f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

表示点 P 到原点 O 的距离。这是点集 X 到点集 $\mathbf{R}^+$ 的一个映射,是一个三元函数。

例2 某超市 2004 年第一季度各月销售额(万元) 如表 1-1 所示:

表 1-1

月份 t	1	2	3
销售额(万元)	86.2	102.3	64.8

这种用表格表示的两种量的对应关系也是一种函数的关系,定义域 $D = \{1, 2, 3\}$, 值域 $A = \{86.2, 102.3, 64.8\}$ 。

例3 某地某日的气温 T 和时间 t 是两个变量,由气温自动记录仪描得一条曲线(见图 1-5),这条曲线表示了 t 为自变量、 T 为因变量的函数关系。注意, t 不能是 T 的函数。

例4 $y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$ 表示 y 是 x 的函数(见图 1-6),称为绝对值函数。

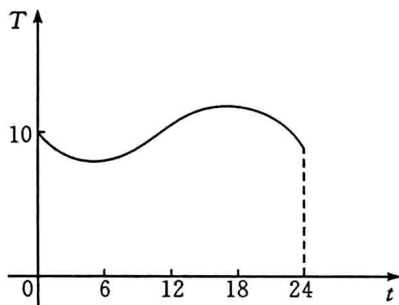


图 1-5

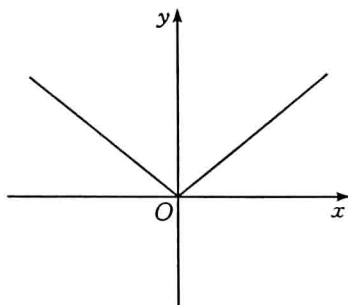


图 1-6

特别提示

(1) 函数的定义域对于具有实际意义的问题而言,是由题意确定的,如例 2 中的定义域是 $D = \{1, 2, 3\}$,例 3 中的定义域是 $D = [0, 24)$,又如圆的面积 S 是半径 r 的函数, $S = \pi r^2$,其定义域是 $(0, +\infty)$ 。

(2) 解析式表达的函数,其定义域是使解析式有意义的自变量所取的一切值的集合,通常叫自然定义域。

一类求函数定义域的习题指的就是求这种自然定义域。

例5 求函数 $y = \frac{\ln(1+x)}{x-1}$ 的定义域。

解 该函数的定义域 D 中的值 x 应满足:

$$\begin{cases} 1+x > 0, \\ x-1 \neq 0, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} x > -1, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

因此, $D = (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ 。

1.2.2 函数的表示法

表示函数常用三种方法:表格法、图示法和解析法。

(1) 例 2 中的函数是用表格形式给出的,叫表格法。