人邮考试

RENYOUKAOSHI

# 2015考研数学命题人高分策略

# 终极冲刺试卷

## 数学三（押题版）

全国考研数学命题研究中心 编著

命题阅卷专家 联袂倾力打造

■ **命题专家联袂打造**

**一线专家教授倾力合作，作者阵容强大，内容权威**

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的命题研究专家以及一线辅导名师共同编写而成

■ **押题试卷终极冲刺**

**把握最新考试大纲，标准预测、权威预测**

本书精心编写了10套冲刺试卷，深入剖析命题思路，全面展现题型变化，系统体现考试大纲中所规定的重点、疑点和难点

■ **命题秘笈倾囊相授**

**赠送原命题组组长20年命题秘笈，全面把握命题脉搏**

本书赠送原命题组组长命题秘笈，20年命题精华，呕心力作，倾囊相授。让考生全面把握命题重点、难点，掌握命题趋势和出题动态，把握命题方向，从容应考

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

# 2015 考研数学命题人高分策略：终极冲刺试卷

## 数学三（押题版）

全国考研数学命题研究中心　编著

人 民 邮 电 出 版 社

北京

**图书在版编目（CIP）数据**

2015考研数学命题人高分策略：押题版. 终极冲刺试卷. 数学三 / 全国考研数学命题研究中心编著. -- 北京：人民邮电出版社，2014.8
ISBN 978-7-115-36132-5

Ⅰ. ①2… Ⅱ. ①全… Ⅲ. ①高等数学－研究生－入学考试－习题集 Ⅳ. ①013

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第134161号

## 内 容 提 要

本书按照最新考试大纲，精心编写了10套冲刺试卷，深入剖析命题思路，全面展现题型变化，系统体现考试大纲中所规定的重点、疑点和难点。每套冲刺试卷都有考点提示和详细的试题解析，详解命题规律，诠释高频考点，帮助考生有针对性的进行复习。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的命题研究专家，以及一线教师共同编写而成，考生不仅可以用本书进行考前模拟实战演练，而且可以藉此检验自己的复习效果，及时查漏补缺。

本书所提供的10套冲刺试卷，预测了2015年考试的方向。考生可以利用本书中的模拟试卷进行考前模拟实战训练，从容备考，轻取高分。

◆ 编　　著　全国考研数学命题研究中心
　责任编辑　李士振
　责任印制　周昇亮
◆ 人民邮电出版社出版发行　　北京市丰台区成寿寺路 11 号
　邮编　100164　　电子邮件　315@ptpress.com.cn
　网址　http://www.ptpress.com.cn
　北京隆昌伟业印刷有限公司印刷
◆ 开本：787×1092　1/16
　印张：7　　　　　　2014 年 8 月第 1 版
　字数：178 千字　　　2014 年 8 月北京第 1 次印刷

定价：21.80 元

**读者服务热线：(010)81055296　印装质量热线：(010)81055316**
**反盗版热线：(010)81055315**
**广告经营许可证：京崇工商广字第 0021 号**

# 考研辅导丛书专家委员会

# 前　　言

德国大数学家高斯曾说过:“数学是科学的皇后。”毫无疑问,数学是对人类思维能力要求最高的学科,它不仅范围广,内容多,而且深刻体现出了人类的聪明才智所能达到的最高境界。全国硕士研究生入学考试数学是考查考生的数学功底、思维能力的科目,不是要求考生进行高深的数学基础理论研究,但却是对考生在一定层次上进行各种思维能力,包括抽象思维能力、逻辑推理能力等的综合性检验。既然如此,要考好数学,思维能力必须有质的飞跃。无论如何,考生首先要全面细致地研究全国硕士研究生入学考试的数学大纲。自从考研招生实行全国统考以来,数学考试命题是严格按照国家考试中心制定的“数学考试大纲”所规定的考试内容和考试要求来进行的。大纲对考试性质、要求、方法、内容、试题类别、适用专业等进行了详细阐述,是广大考生备考的指导性文件和根本依据。考生必须从中全面领会考试精神,尤其是明确考试范围,以便有的放矢。大纲所要求的知识点或考点,考生一定要熟记在心,不要求的内容,应该跳过,不要浪费精力。同时要注意,不单应分析研究本年最新的大纲,还要研究去年乃至上一年的大纲,从比较中发现其变化。

为了帮助广大参加硕士研究生入学数学考试的考生备考,本书按照最新考试大纲,精心编写了这本《2015 考研数学命题人高分策略:终极冲刺试卷 数学三(押题版)》。

**本书特点如下:**

**一、原命题组成员联袂,一线教授和专家亲自执笔,内容权威**

本书是广大数学教师及原考研命题组的专家、教授智慧和劳动的结晶,是一份宝贵的资料。本书深入剖析命题思路,全面展现题型变化,系统体现考试大纲中所规定的重点、疑点和难点。其中的每一道试题,既反映了考研数学考试大纲对考生数学知识、能力和水平的要求,又蕴涵着命题的指导思想、基本原则和趋势。每套冲刺试卷都有考点提示和详细的试题解析,详解命题规律,诠释高频考点,帮助考生有针对性的进行复习。

**二、多角度、全方位综合分析冲刺试卷的重点和难点,把握命题动态**

本书对每道试题不仅给出了详解,还对重要的、易丢分的题目做了评注。不仅分析了每题考查的知识点和难点,还对试题类型、各类型试题的解法进行了归纳和总结,使考生能举一反三,触类旁通;同时通过具体题目,分析考生常犯的错误,让考生引以为戒。

**三、全面预测了 2015 年考研数学的命题方向、出题原则和规律**

本书所提供的 10 套冲刺试卷,预测了 2015 年考试的方向。考生可以利用本书中的模拟试卷进行考前模拟实战训练。

本书由来自北京大学、清华大学和中国人民大学的命题研究专家,以及一线教师共同编写

而成，考生不仅可以用本书进行考前模拟实战演练，而且可以藉此检验自己的复习效果，及时查漏补缺。

最后祝愿各位考生都能圆名校之梦！

编者

2014 年 6 月于北京

# 目 录

# 终极冲刺试卷一

一、选择题:1 ~ 8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内是可导的奇函数,则下列函数中是奇函数的是(　　)。

(A) $\sin f'(x)$　　(B) $\int_0^x f(t)\sin t\mathrm{d}t$　　(C) $\int_0^x f(\sin t)\mathrm{d}t$　　(D) $\int_0^x [\sin t+f(t)]\mathrm{d}t$

2. 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$,则$x=0$是$f(x)$的(　　)。

(A)可去间断点　　(B)跳跃间断点

(C)第二类间断点　　(D)连续点

3. 设$f(x,y)$连续,且满足$f(x,-y)=f(x,y)$,则$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$(　　)。

(A) $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$　　(B) $2\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

(C) $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y$　　(D) $2\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$

4. 若$|f'(x)|<g'(x)\,(x\geqslant a)$,则当$x>a$时必有(　　)。

(A) $|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$　　(B) $|f(x)-f(a)|\geqslant g(x)-g(a)$

(C) $|f(x)-f(a)|=g(x)-g(a)$　　(D) $|f(x)-f(a)|<a$

5. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+4x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$的规范型是(　　)。

(A) $f=z_1^2+z_2^2+z_3^2$　　(B) $f=z_1^2+z_2^2-z_3^2$

(C) $f=z_1^2-z_2^2$　　(D) $f=z_1^2$

6. 设$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & k\\ 1 & k+1 & 1\\ k & 2 & 1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{B}$是三阶非零矩阵,且$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$,则(　　)。

(A) 当$k=1$时,$r(\boldsymbol{B})=1$　　(B) 当$k=-3$时,$r(\boldsymbol{B})=1$

(C) 当$k=1$时,$r(\boldsymbol{B})=2$　　(D) 当$k=-2$时,$r(\boldsymbol{B})=2$

7. 设$A$、$B$、$C$为事件,$P(ABC)>0$,如果$P(AB|C)=P(A|C)P(B|C)$,则(　　)。

(A) $P(C|AB)=P(C|A)$　　(B) $P(C|AB)=P(C|B)$

(C) $P(B|AC)=P(B|A)$　　(D) $P(B|AC)=P(B|C)$

8. 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是总体$N(0,1)$的简单随机样本,记$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$,$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$,$T=(\overline{X}+1)(S^2+1)$,则$E(T)$的值为(　　)。

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 4

**二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。**

9. 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arcsin x^2$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$ ________。

10. 方程 $\int_0^x tf(x-t)\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}x^3+\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 满足 $f(0)=0$ 的特解为________。

11. $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4}(x^2+xy+y^2+1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________。

12. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left[1+\dfrac{f(x)}{\tan 2x}\right]}{2^x-1}=5$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=$ ________。

13. 设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,\ 0,\ -1)^T$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T$，$n$ 为正整数，则行列式 $|a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|$ ________。

14. 设随机变量 $X$，$Y$ 不相关，$X\sim U(-3,\ 3)$，$Y$ 的密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3y^2}{16} & -2<y<2\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，根据切比雪夫不等式，有 $P\{|X-Y|<3\}\geqslant$ ________。

**三、解答题：15～23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

15.（本题满分 10 分）

求 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{(1+\mathrm{e}^{-x})^2}\mathrm{d}x$。

16.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在 $(a,\ b)$ 内连续，$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$，$\displaystyle\sum_{i=1}^n f(x_i)=n$，试证明至少存在一点 $\xi\in(a,\ b)$ 使 $f(\xi)=1$。

17.（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 满足 $f'(x)=g(x)$，$g'(x)=2\mathrm{e}^x-f(x)$，且 $f(0)=0$，$g(0)=2$，求 $\displaystyle\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x$。

18.（本题满分 10 分）

如果 $0<\beta<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，证明：$\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta}<\tan\alpha-\tan\beta<\dfrac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}$。

19.（本题满分 10 分）

设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上连续，开区间 $(a,\ b)$ 内可导，$0\leqslant a<b\leqslant\dfrac{\pi}{2}$。

证明：在区间 $(a,\ b)$ 内至少存在两点 $\xi_1$，$\xi_2$，使 $f'(\xi_2)\tan\dfrac{a+b}{2}=f'(\xi_1)\dfrac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}$。

20.（本题满分 11 分）

已知两个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,\ 2,\ 3)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2=(1,\ 0,\ 1)^T$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1=(-1,\ 2,\ t)^T$，$\boldsymbol{\beta}_2=(4,\ 1,\ 5)^T$。

（Ⅰ）$t$ 为何值时，两个向量组等价？

（Ⅱ）两个向量组等价时，求出它们之间的线性表示式。

21.（本题满分 11 分）

设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{P}$ 为 $n$ 阶矩阵，$\boldsymbol{P}$ 可逆，且 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{PA}$，证明：

（Ⅰ）若 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{P\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量；

（Ⅱ）若 $\boldsymbol{A}$ 有 $n$ 个不同的特征值，$\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量，则 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $\boldsymbol{P}$ 的特征向量。

22.（本题满分 11 分）

假设一部机器在一天内发生故障的概率为 0.2，机器发生故障时全天停止工作。若一周 5 个工作日里无故障，可获利润 10 万元，发生一次故障仍可获利润 5 万元；发生二次故障所获利润为 0 元；发生三次或三次以上故障就要亏损 2 万元。求一周内期望利润是多少？

23.（本题满分 11 分）

设总体 $X\sim U(1,\theta)$，参数 $\theta>1$ 未知，$X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $X$ 的简单随机样本。

（Ⅰ）求 $\theta$ 的矩估计和极大似然估计量；

（Ⅱ）求上述两个估计量的数学期望。

## 终极冲刺试卷一参考答案与解析

### 一、选择题

1.【考点提示】函数的奇偶性

【解题分析】选(B)，由题设知，$f(t)\sin t$ 为偶函数，故 $\int_0^x \sin t\cdot f(t)\,\mathrm{d}t$ 为奇函数。

2.【考点提示】函数的间断点

【解题分析】因为 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=1$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}=-1$，

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的跳跃间断点。应选(B)。

3.【考点提示】二重积分

【解题分析】由题设知 $\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant1,\,y\geqslant0}f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)\,\mathrm{d}x$。

应选(B)。

4.【考点提示】柯西中值定理

【解题分析】因为 $0\leqslant|f'(x)|<g'(x)$，所以 $g'(x)>0$，$g(x)$ 单调增加，

从而 $|g(x)-g(a)|=g(x)-g(a)$；

由柯西中值定理得 $\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\right|=\left|\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\right|$，即 $\dfrac{|f(x)-f(a)|}{g(x)-g(a)}=\dfrac{|f'(\xi)|}{g'(\xi)}$，因此

$\left|\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}\right|<1$ 即 $|f(x)-f(a)|<g(x)-g(a)$。应选(A)。

5.【考点提示】二次型

【解题分析】二次型的规范型由它的正负惯性指数确定，二次型的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&4&-4\\2&-4&4\end{pmatrix},$$

其特征多项式 $|\boldsymbol{A}-\lambda\boldsymbol{E}|=\begin{vmatrix}1-\lambda&-2&2\\-2&4-\lambda&-4\\2&-4&4-\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}9-\lambda&-2&2\\0&-\lambda&0\\0&0&-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(9-\lambda)$，

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为9，0，0，正惯性指数 $p=1$，负惯性指数 $q=0$，故选(D)。

6.【考点提示】矩阵的秩

【解题分析】$\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{O}\Rightarrow r(\boldsymbol{B})\geqslant 1$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}\Rightarrow r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})\leqslant 3\Rightarrow r(\boldsymbol{B})\leqslant 3-r(\boldsymbol{A})$，

$1\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant 3-r(\boldsymbol{A})$，当 $k=1$ 时，$r(\boldsymbol{A})=1$，$1\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant 2$，排除(A)和(C)，

当 $k=-2$ 时，$A=\begin{pmatrix}1&2&-2\\1&-1&1\\-2&2&1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}0&3&-3\\1&-1&1\\0&0&3\end{pmatrix}$，

$r(\boldsymbol{A})=3$，$1\leqslant r(\boldsymbol{B})\leqslant 0$，矛盾。排除(D)，选(B)。

7.【考点提示】事件间的关系

【解题分析】已知 $P(AB\mid C)=P(A\mid C)P(B\mid C)$ 意指："在 $C$ 发生的条件下，$A$ 与 $B$ 独立"。所以"在 $C$ 发生的条件下，$A$ 发生与否不影响 $B$ 发生的概率"，即 $P(B|AC)=P(B|C)$，故应选(D)。

我们也可以通过计算来确定选项，事实上：$P(AB|C)=P(A|C)P(B|C)$

$\Leftrightarrow P(A|C)P(B|AC)=P(A|C)P(B|C)\Leftrightarrow P(B|AC)=P(B|C)$，选择(D)。

选项(A)、(C)表示：在 $A$ 发生的条件下，$B$ 与 $C$ 独立；

选项(B)表示：在 $B$ 发生的条件下，$A$ 与 $C$ 独立。

注：条件 $P(ABC)>0$，除了保证各条件概率有意义外，还保证各项概率均不为零。

8.【考点提示】期望

【解题分析】$E(\overline{X})=0$，$E(S^2)=1$，且 $\overline{X}$，$S^2$ 相互独立。

所以 $E(T)=E((\overline{X}+1)(S^2+1))=E(\overline{X}+1)E(S^2+1)=1\cdot(1+1)=2$。选(C)。

二、填空题

9.【考点提示】函数的导数

【解题分析】由 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arcsin x^2$ 得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\arcsin\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2\cdot\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)'=\arcsin\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)^2\cdot\frac{12}{(3x+2)^2}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=\frac{12}{4}\arcsin 1=\frac{3\pi}{2}$$

10.【考点提示】微分方程的解

【解题分析】令 $x-t=u$，原方程变为 $x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u-\int_0^x uf(u)\,\mathrm{d}u=\dfrac{1}{3}x^3+\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$

方程两边对 $x$ 求导得 $\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u=x^2+f(x)$

再两边对 $x$ 求导得 $f(x)=2x+f'(x)$，即 $\frac{dy}{dx}-y=-2x$

$y=e^{\int dx}\left[\int(-2x)e^{-\int dx}dx+C\right]=2(x+1)+Ce^x$

由 $y(0)=0$ 得 $C=-2$，故 $y=f(x)=2(x+1)-2e^x$。

11.【考点提示】二重积分

【解题分析】$\iint\limits_{x^2+y^2\leq4}(x^2+xy+y^2+1)dxdy=\iint\limits_{x^2+y^2\leq4}(x^2+y^2)dxdy+\iint\limits_{x^2+y^2\leq4}dxdy$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^3dr+4\pi=12\pi。$$

12.【考点提示】函数的极限

【解题分析】当 $x\to0$ 时，$\frac{f(x)}{\tan2x}\sim\frac{f(x)}{2x}$，$2^x-1\sim x\ln2$，

则 $5=\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left[1+\frac{f(x)}{\tan2x}\right]}{2^x-1}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2 2\ln2}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x^2}=10\ln2$。

13.【考点提示】行列式的计算

【解题分析】由于 $A^n=(\alpha\alpha^T)(\alpha\alpha^T)\cdots(\alpha\alpha^T)=\alpha(\alpha^T\alpha)\cdots(\alpha^T\alpha)\alpha^T=\alpha2^{n-1}\alpha^T=2^{n-1}\alpha\alpha^T$

$$=2^{n-1}\begin{bmatrix}1&0&-1\\0&0&0\\-1&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2^{n-1}&0&-2^{n-1}\\0&0&0\\-2^{n-1}&0&2^{n-1}\end{bmatrix},$$

故 $aE-A^n=\begin{bmatrix}a-2^{n-1}&0&2^{n-1}\\0&a&0\\2^{n-1}&0&a-2^{n-1}\end{bmatrix}$，所以 $|aE-A^n|=a\begin{vmatrix}a-2^{n-1}&2^{n-1}\\2^{n-1}&a-2^{n-1}\end{vmatrix}=a^2(a-2^n)$。

14.【考点提示】切比雪夫不等式

【解题分析】$E(X)=0$，$D(X)=3$，$E(Y)=0$，$D(Y)=\frac{12}{5}$，

则 $E(X-Y)=0$，$D(X-Y)=D(X)+D(Y)-2\mathrm{cov}(X,Y)=\frac{27}{5}$，

$P\{|X-Y|<3\}=P\{|(X-Y)-E(X-Y)|<3\}\geq1-\frac{D(X-Y)}{9}=\frac{2}{5}$。

## 三、解答题

15.【考点提示】反常积分

【解题分析】原式 $=\int_0^{+\infty}\frac{xe^x}{(1+e^x)^2}dx=\left.\frac{-x}{1+e^x}\right|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+e^x}=\left.-\ln(1+e^{-x})\right|_0^{+\infty}=\ln2$。

16.【考点提示】中值定理的应用

【解题分析】由 $\sum\limits_{i=1}^n f(x_i)=n$，有 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n f(x_i)=1$。设 $f(x)$ 在区间 $[x_1, x_n]$ 上的最小值与最大值分别为 $m$ 与 $M$，而 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n f(x_i)$ 为 $f(x)$ 在点 $x=x_1$，$x_2$，…，$x_n$ 处的平均值，从而有

$$m \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leqslant M,$$

即 $m \leqslant 1 \leqslant M$。存在 $\xi \in (x_1, x_n) \subset (a, b)$ 使 $f(\xi) = 1$。证毕。

17.【考点提示】解函数方程

【解题分析】由 $f'(x) = g(x)$，$g'(x) = 2e^x - f(x)$，得 $f''(x) = 2e^x - f(x)$

于是有 $\begin{cases} f''(x) + f(x) = 2e^x \\ f(0) = 0,\ f'(0) = 2 \end{cases}$，解方程得 $f(x) = \sin x - \cos x + e^x$，

$$\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x} - \frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]dx = \int_0^{\pi}\frac{g(x)(1+x) - f(x)}{(1+x)^2}dx = \int_0^{\pi}\frac{f'(x)(1+x) - f(x)}{(1+x)^2}dx$$

$$= \int_0^{\pi} d\,\frac{f(x)}{1+x} = \frac{f(x)}{1+x}\bigg|_0^{\pi} = \frac{1+e^{\pi}}{1+\pi}。$$

18.【考点提示】拉格朗日中值定理

【解题分析】设 $f(x) = \tan x$，则 $f(x)$ 在区间 $[\beta, \alpha]$ 上连续，在 $(\beta, \alpha)$ 内可导，

且 $f'(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x}$，因为 $f(x)$ 在区间 $[\beta, \alpha]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件。

由拉格朗日中值定理知，$\exists \xi \in (\beta, \alpha)$ 使 $\dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{\alpha - \beta} = \dfrac{1}{\cos^2\xi}$，即 $\tan\alpha - \tan\beta = \dfrac{\alpha - \beta}{\cos^2\xi}$，

又因 $\cos x$ 在区间 $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调减少，故 $\dfrac{1}{\cos^2\beta} < \dfrac{1}{\cos^2\xi} < \dfrac{1}{\cos^2\alpha}\left(0 < \beta < \xi < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$，

则 $\dfrac{\alpha - \beta}{\cos^2\beta} < \tan\alpha - \tan\beta < \dfrac{\alpha - \beta}{\cos^2\alpha}$。

19.【考点提示】柯西中值定理的应用

【解题分析】设 $g_1(x) = \sin x$，由柯西中值定理得 $\dfrac{f(b) - f(a)}{\sin b - \sin a} = \dfrac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1}$，$a < \xi_1 < b$；

又设 $g_2(x) = \cos x$，同理得 $\dfrac{f(b) - f(a)}{\cos b - \cos a} = \dfrac{f'(\xi_2)}{-\sin\xi_2}$，$a < \xi_2 < b$；

比较两等式得：$\dfrac{f'(\xi_1)}{\cos\xi_1}(\sin b - \sin a) = -\dfrac{f'(\xi_2)}{\sin\xi_2}(\cos b - \cos a)$。

从而 $\dfrac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}f'(\xi_1) = -\dfrac{\cos b - \cos a}{\sin b - \sin a}f'(\xi_2)$，即 $\tan\dfrac{a+b}{2}\cdot f'(\xi_2) = \dfrac{\sin\xi_2}{\cos\xi_1}f'(\xi_1)$。

20.【考点提示】向量间的线性相关及线性表示

【解题分析】（Ⅰ）对矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$ 作初等行变换，得

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & t & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & -2 & t+3 & -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & t-1 & 0 \end{pmatrix},$$

当 $t = 1$ 时，$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$，$r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_2) = r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2)$，$\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性表示，且 $r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_1) = r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$，$r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\alpha}_2) = r(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2)$，$\boldsymbol{\alpha}_1$，$\boldsymbol{\alpha}_2$ 可由 $\boldsymbol{\beta}_1$，$\boldsymbol{\beta}_2$ 线性表示，即两个向量组等价。

（Ⅱ）两个向量组等价时，$A\sim\begin{pmatrix}1&1&-1&4\\0&-2&4&-7\\0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&1&\frac{1}{2}\\0&1&-2&\frac{7}{2}\\0&0&0&0\end{pmatrix}$，

故 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_2=\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_1+\frac{7}{2}\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_1=\frac{7}{9}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{4}{9}\boldsymbol{\beta}_2$，$\boldsymbol{\alpha}_2=-\frac{1}{9}\boldsymbol{\beta}_1+\frac{2}{9}\boldsymbol{\beta}_2$。

21.【考点提示】特征值与特征向量

【解题分析】（Ⅰ）设 $A\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{\alpha}$，则 $A(P\boldsymbol{\alpha})=P(A\boldsymbol{\alpha})=P(\lambda\boldsymbol{\alpha})=\lambda(P\boldsymbol{\alpha})$，

故 $P\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $A$ 的特征向量。

（Ⅱ）由 $A$ 有 $n$ 个不同的特征值可知，$A$ 的每个特征值只对应一个线性无关的特征向量，又已知 $\boldsymbol{\alpha}$，$P\boldsymbol{\alpha}$ 是对应同一个特征值的特征向量，故它们线性相关，故存在常数 $c$，使得 $P\boldsymbol{\alpha}=c\boldsymbol{\alpha}$，故 $\boldsymbol{\alpha}$ 也是 $P$ 的特征向量。

22.【考点提示】二项分布、期望

【解题分析】假设 $X$ 表示一周内发生故障的天数，则 $X\sim B(5,0.8)$，

$P(X=0)=(0.8)^5\approx0.33$，$P(X=1)=5\times0.2\times(0.8)^4\approx0.41$，

$P(X=2)=C_5^2\times0.2^2\times(0.8)^3\approx0.20$，$P(X\geqslant3)=1-0.33-0.41-0.20=0.06$，

又设 $Y$ 为该企业的利润，$Y$ 的分布律为

| $Y$ | 10 | 5 | 0 | $-2$ |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | 0.33 | 0.41 | 0.20 | 0.06 |

$E(Y)=10\times0.33+5\times0.41+0\times0.20+(-2)\times0.06=5.23$（万元）。

23.【考点提示】参数估计、期望

【解题分析】总体 $X\sim U(1,\theta)$，其分布密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{1}{\theta-1} & 1\leqslant x\leqslant\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$

（Ⅰ）由 $\overline{X}=EX=\frac{\theta+1}{2}$，解得 $\theta=2\overline{X}-1$，故 $\theta$ 的矩估计量为 $\hat{\theta}_1=2\overline{X}-1$；

似然函数 $L(\theta)=\frac{1}{(\theta-1)^n}$，$L'(\theta)=\frac{-n}{(\theta-1)^{n+1}}<0$，$L(\theta)$ 递减，

又 $X_1,\cdots,X_n\in(1,\theta)$，故 $\theta$ 的极大似然估计量为 $\hat{\theta}_2=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$。

（Ⅱ）$E\hat{\theta}_1=2E\overline{X}-1=2\mu-1=2\times\frac{\theta+1}{2}-1=\theta$，

而 $\hat{\theta}_2=\max\{X_1,\cdots,X_n\}$ 的分布函数

$$F_{\hat{\theta}_2}(x)=P(\hat{\theta}_2\leqslant x)=P\{\max\{X_1,\cdots,X_n\}\leqslant x\}=P\{X_1\leqslant x,\cdots,X_n\leqslant x\}$$

$$=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i\leqslant x\}=\begin{cases}0 & x<1\\ \left(\frac{x-1}{\theta-1}\right)^n & 1\leqslant x<\theta,\\ 1 & x\geqslant\theta\end{cases}$$

$$f_{\hat{\theta}_2}(x)=F'_{\hat{\theta}_2}(x)=\begin{cases}\dfrac{n(x-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n} & 1\leqslant x\leqslant\theta\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

$$E\hat{\theta}_2=\int_1^\theta x\cdot\frac{n(x-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n}\mathrm{d}x=\int_1^\theta(x-1+1)\frac{n(x-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n}\mathrm{d}x$$

$$=\int_1^\theta\frac{n(x-1)^n}{(\theta-1)^n}\mathrm{d}x+\int_1^\theta\frac{n(x-1)^{n-1}}{(\theta-1)^n}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{n}{n+1}\frac{(x-1)^{n+1}}{(\theta-1)^n}\bigg|_1^\theta+\frac{(x-1)^n}{(\theta-1)^n}\bigg|_1^\theta=\frac{n}{n+1}(\theta-1)+1=\frac{n\theta+1}{n+1}。$$

# 终极冲刺试卷二

一、选择题：1 ~ 8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内。

1. 设函数 $f(x)$ 有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-1}{1-\cos x}=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f''(x)-1}{\sqrt{1+x^2}-1}=1$，则(　　)。

(A) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取极大值

(B) $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取极小值

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) 点 $x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，点 $(0, f(0))$ 也不是 $y=f(x)$ 的拐点

2. 设 $f(0, 0)=0$，当 $(x, y)\neq(0, 0)$ 时，$f(x, y)$ 为如下形式之一，则 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可偏导的是(　　)。

(A) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$　　(B) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$　　(C) $\sqrt{x^2-y^2}\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$　　(D) $\dfrac{x^4+y^2}{x^2+y^2}$

3. 有下列命题正确的是(　　)。

① 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

② 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1000}$ 收敛

③ 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散

④ 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛

(A) ①②　　(B) ②③　　(C) ③④　　(D) ①④

4. 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，则(　　)。

(A) $a=1$，$b=-\dfrac{5}{2}$　　(B) $a=0$，$b=-2$

(C) $a=0$，$b=-\dfrac{5}{2}$　　(D) $a=1$，$b=-2$

5. 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 为 $n$ 阶对称矩阵，下列结论不正确的是(　　)。

(A) $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵　　(B) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}$ 为对称矩阵

(C) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 为对称矩阵　　(D) $k\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵

6. 设三阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $-1$，$1$，$2$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列矩阵可逆的是(　　)。

(A) $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$　　(B) $\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{E}$　　(C) $\boldsymbol{B}^{*}-\boldsymbol{E}$　　(D) $\boldsymbol{B}^{2}-4\boldsymbol{E}$

7. 设随机变量 $X$ 服从正态分布 $N(1,\sigma^2)$，其分布函数为 $F(x)$，则对任意实数 $x$，有(　　)。

(A) $F(x)+F(-x)=1$　　(B) $F(1+x)+F(1-x)=1$

(C) $F(x+1)+F(x-1)=1$　　(D) $F(1-x)+F(x-1)=1$

8. 设随机变量 $X$ 和 $Y$ 相互独立，且 $X$ 和 $Y$ 的概率分布分别为：

| $X$ | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{8}$ | $\frac{1}{8}$ |

| $Y$ | -1 | 0 | 1 |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{3}$ |

则 $P\{X+Y=2\}=$(　　)。

(A) $\frac{1}{12}$　　(B) $\frac{1}{8}$　　(C) $\frac{1}{6}$　　(D) $\frac{1}{2}$

**二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。**

9. 设 $y=(1+\sin x)^x$，则 $\mathrm{d}y\Big|_{x=\pi}=$________。

10. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+3}}{n(n+1)}$ 在 $-1<x<1$ 内的和函数为________。

11. $\int\frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=$________。

12. 函数 $F(x)=\int_1^x\left(2-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\mathrm{d}t\ (x>0)$ 的单调减少区间________。

13. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵，其伴随矩阵的元素全为 1，则齐次方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为________。

14. 设随机变量 $X$ 与 $Y$ 相互独立，且都服从正态分布 $N(0,1)$，则 $P\{\max(X,Y)\geqslant 0\}=$________。

**三、解答题：15～23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。**

15. (本题满分 9 分)

设 $f(x)$ 单调且具有一阶连续导数，$z=f(x+\varphi(y))$ 满足 $\varphi(y)\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$，求可导函数 $\varphi(y)$。

16. (本题满分 9 分)

计算 $\int_{-1}^{1}\mathrm{d}y\int_{1+\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{2-y^2}}(\sqrt{x^2+y^2}+\sin^3 y)\,\mathrm{d}x$。

17. (本题满分 10 分)

求微分方程 $xy'=3y-6x^2$ 的一个解 $y=y(x)$，使得曲线 $y=y(x)$ 与直线 $x=1$，$y=0$ 所围成的平面图形绕 $x$ 轴旋转一周所得旋转体体积最小。

18. (本题满分 10 分)

计算 $I=\iint\limits_D\left|\sqrt{x^2+y^2}-1\right|\mathrm{d}\sigma$，区域 $D$ 由曲线 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 和 $x$ 轴围成。