高考数学
你真的掌握了吗？
圆锥曲线

张杨文 主编 / 兰师勇 副主编

清华大学出版社

高考数学 你真的掌握了吗？

《高考数学你真的掌握了吗？数列》

《高考数学你真的掌握了吗？函数》

《高考数学你真的掌握了吗？圆锥曲线》

《高考数学你真的掌握了吗？数学五章》

你是否长期与数形结合若即若离？

你是否一直对“恒成立”百思不解？

你是否从未参透数列放缩的玄机？

你是否始终认为圆锥曲线只是计算？

……

如果你领悟大学之于人生的真谛，

如果你明晰高考之于大学的意义，

如果你清楚数学之于高考的地位，

如果你定要突破高考数学的瓶颈，

……

那么，这套书一定是你最明智的选择！

QQ讨论群：342963756

清华大学出版社数字出版网站

WQBook 文泉书局

www.wqbook.com

ISBN 978-7-302-35602-8

9 787302 356028

定价：35.00元

高考数学

你真的掌握了吗？

圆锥曲线

张杨文 主编 / 兰师勇 副主编

清华大学出版社
北 京

内 容 简 介

本套书基于作者团队多年辅导经验总结，对高考内容进行了科学合理的筛选和调整，侧重体现知识点的系统性和逻辑性．函数、数列、圆锥曲线这三部分重要内容独立成书；相对简单零散的平面向量、不等式、直线与圆、立体几何、计数原理与概率统计共同含于《数学五章》一书；集合与常用逻辑用语、复数、算法、三角函数等内容未收纳．

书中内容绝非简单拼凑，相当多的内容是作者团队实践积累的成果，比如函数恒成立部分的"端点效应"、数形结合中的两图像法和非常规函数图像的解决方法、数列放缩的系统归类及解法、圆锥曲线中的框架图，以及其他一些数学思想的应用等．针对全国各地的高考题型及特点，作者力求探索简洁、高效、容易掌握的普适方法，让高难度的压轴题不再成为考生的绊脚石．希望对广大考生提供帮助．

图书在版编目（CIP）数据

高考数学你真的掌握了吗？圆锥曲线/张杨文主编．--北京：清华大学出版社，2014（2014.12 重印）
ISBN 978-7-302-35602-8

Ⅰ．①高…　Ⅱ．①张…　Ⅲ．①中学数学课—高中—升学参考资料　Ⅳ．①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 042398 号

责任编辑：陈　明
封面设计：傅瑞学
责任校对：赵丽敏
责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京鑫丰华彩印有限公司
装 订 者：三河市溧源装订厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：203mm×280mm　　**印　张**：13.75　　**字　　数**：336 千字
版　　次：2014 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2014 年 12 月第 2 次印刷
定　　价：35.00 元

产品编号：056537-01

编 委 会

主　编　张杨文

副主编　兰师勇

编　委　郑晓波　王　嘎　宋小东　彭　艳　唐　鸿　周彭威
杨世卿　皮　伟　叶　浩　刘禄波　皮良雅

序

数学在高考中的地位毋庸置疑.一方面,数学作为主干学科,既容易得分也容易失分的特点使得莘莘学子对其又爱又恨;另一方面,数学排在高考第一天的下午,当语文让考生们平稳进入高考状态后,数学就要学子们开始真正发挥威力了,并且数学考试的感觉将对第二天的考试起着至关重要的作用.因此,掌握好高考数学迫在眉睫!

本套《高考数学你真的掌握了吗?》以不落俗套的形式、创造性的思维、系统化的视角诠释高考数学的精髓,帮助广大学子消解长期以来的困惑,从而突破数学的瓶颈,收获自己满意的成绩!

本套书具有如下几个特点:

一、科学合理的编排结构

我们摒弃按照教科书的顺序编写本书,而是按照重难点的分布进行科学合理的筛选与整合.函数、数列、圆锥曲线三部分内容分别独立成书;平面向量、不等式、直线与圆、立体几何、计数原理与概率统计共同构成另外一本书.

二、内容具有创造性,独家研究成果遍布全书

书中很多解法、结论、方法总结都是我们经过长期实践后研究出来的成果,在此作简单的说明.

1.《函数》第四章:数形结合

对于复合方程的根的问题,我们采用"两个图像"法来解决,一方面避免了复杂函数的作图,另一方面也可以达到普遍适用的效果.

而对于动曲线的问题,我们重点考查了两条曲线在某个交点附近是否还有其他交点的情况,通过交点处的局部分析进行深刻的剖析,此处稍微引进了高等数学的一些基本思想,这将彻底消除学子们对此类疑难问题的困惑.

2.《函数》第五章:恒成立

对于大多数情况,函数恒正(恒负)等价于函数在区间端点处恒正(恒负)是错误的,但这并不意味着端点就没有任何作用.我们通过事先考虑函数在端点的情形,虽然不能得到最终结果,但却可以据此排除某些情形,从而避免了复杂的分类讨论.这种先通过端点来缩小参数取值范围的方法,我们将其称为"端点效应".

这个方法简单易行,且经得起考验和推敲,可以很好地帮助广大考生轻松解决本身并不简单的函数恒成立一类问题.

3.《数列》第四章：放缩

数列放缩无疑是学子们心中的噩梦，除了“就题论题”以外，极少有人能对此有一个整体的、系统的认识和理解，我们在书中对这类较难的题型进行了清晰的归纳总结，并系统地给出了相应的思维方法和求解方式.

4.《圆锥曲线》第六、七、八、九章

一般认为圆锥曲线似乎就是计算，其实远不止于此. 即便是计算，也会有一些技巧，我们在书中都进行了说明. 而在第六、七、八、九章中，我们以框架图的形式给出了独家研究成果，利用这些结论和条件，部分考题可以轻松解决.

三、强调思维方式的引导

在本套辅导书中，我们并非单纯地给出解法和技巧，而是从原理入手，通过分析讨论，一步一步引导读者理解我们的思维，使读者真正领会其中的奥妙，从而做到举一反三，也逐渐养成科学的学习方法，培养自主探索学习的能力.

四、针对性极强

通过多年的教学实践，我们了解广大高考学子的迫切需求. 因此，针对全国各地的高考题型及特点，我们着力于探索更加简洁、高效且容易掌握的普适方法，力求做到清晰、系统，从而让高三学子事半功倍，也让高考数学不再令人望而生畏. 希望我们辛勤劳动的成果能助全国高三学子们扬帆远航！

本书的完成有赖于一支高度负责的团队，各位编委都花了大量时间精心编写各自分工的内容. 然而，编者虽倾心倾力，但终究水平有限，书中若有不妥之处，恳请广大读者批评指正！

编　者

2014 年 6 月

前言

在数学发展史上，几何与代数曾一度处于分裂状态，而当数与形邂逅之时，数学便开始绽放出更加美丽的光彩，正所谓“数缺形时少直观，形缺数时难入微”！本套丛书的《函数》一书中，我们特意开辟了一章介绍数形结合，用来特指以形解数，而本书则开始了以数解形的时代，圆锥曲线就是典型的解析几何.

在高考数学中，圆锥曲线似乎总是不那么友好，令广大学子望而生畏.每每谈及圆锥曲线，几乎所有人最先想到的都是“计算”两个字，如果非要用一个字来概括，便是“难”！的确，圆锥曲线在高考中从来不缺乏压轴的分量！

高中阶段的圆锥曲线由椭圆、双曲线和抛物线三部分组成，主要内容包括其定义、标准方程、图像以及相关概念，其中最核心的莫过于离心率和焦半径，而直线与圆，亦为解析几何，从而，彼此的融合是该部分内容不可避免的趋势.

编写本套丛书的初衷是通过思维的引导而形成强大的逻辑体系，因而，我们摒弃按照椭圆、双曲线和抛物线的顺序进行编排，而是从内容的本质出发，将本书编排为九章.

第一章概括了圆锥曲线的基本性质与轨迹，系统探索了焦点三角形的相关性质、离心率的求法，以及求解轨迹方程的类型；第二章着重研究焦半径这一概念，深入剖析了焦半径的坐标式和倾斜角式，并提出了焦点弦的两大模型；第三章归纳了向量与圆锥曲线的结合类型，并通过分析给出了相应的解题技巧；然后，我们特意开辟了第四章，选取典型的面积问题和切线问题带领大家直面令人反感的计算问题；同时，我们将圆锥曲线中最流行的定点、定值问题提出来独立成为第五章，分析总结了相关解决办法；在第六、七、八章中，我们展示出了独家探索的三大斜率模型；第九章提出了乘积为某个定值的六大模型，在这一系列模型中，不乏涉及定点、定值等相关问题.

圆锥曲线部分最大的特色便是框架图，这是我们经过实践不断探索、反复雕琢而形成的研究成果.通过简洁明了的框架图，读者们可以迅速领会我们的编排脉络，以及知识的内在逻辑关系.同时，我们也给出了大大小小的一系列结论和思想方法总结.初衷依旧：通过思维的引导形成强大的逻辑体系，进而认识数学的本质，达到真正的举一反三、事半功倍的效果！

编　者

2014 年 6 月

目录

第一章

基本性质与轨迹

【导读】

- 基本性质与轨迹
  - 焦点三角形
    - 焦点三角形的周长
    - 焦点三角形的面积
    - 焦点三角形的角平分线
    - 焦点三角形的中位线
  - 离心率
    - 一般求值和取值范围
    - 利用顶角建立不等式求离心率范围
    - 利用焦半径的取值范围求离心率的取值范围
    - 利用渐近线求离心率的取值范围
  - 转换
    - 焦点间的相互转换
    - 焦点与相应准线的转换
    - 点线距离与线线距离的转换
  - 轨迹
    - 定义法
    - 直译法
    - 相关点法
    - 参数法
    - 交轨法
    - 空间点的轨迹

本章从圆锥曲线的基本概念及性质出发，探索并总结出一些重要结论，具体涉及焦点三角形、离心率，极其重要的转换思想在这部分内容中体现得淋漓尽致. 章末对轨迹的常见求法进行了清晰而详尽的归类，希望读者能够用心理解并熟练掌握和应用.

第一节　焦点三角形

首先回顾一下圆锥曲线的定义：

【知识点 1.1】 椭圆

平面内，到两个定点 F_1，F_2 的距离之和为常数 $2a(2a>|F_1F_2|)$的点的轨迹叫做椭圆，即$\left\{P\,\middle|\,|PF_1|+|PF_2|=2a(2a>|F_1F_2|)\right\}$. 这两个定点叫做椭圆的焦点($F_1$ 为左焦点，F_2 为右焦点)，两焦点的距离叫做椭圆的焦距，记作 $2c$.

【注】 (1) 当 $2a=2c$ 时，点的轨迹为线段.

(2) 当 $2a<2c$ 时，点的轨迹不存在.

【知识点 1.2】 双曲线

平面内，到两个定点 F_1，F_2 的距离的差的绝对值为常数 $2a(2a<|F_1F_2|)$的点的轨迹叫做双曲线，即$\left\{P\,\middle|\,\big||PF_1|-|PF_2|\big|=2a(2a<|F_1F_2|)\right\}$. 这两个定点叫做双曲线的焦点($F_1$ 为左焦点，F_2 为右焦点)，两焦点的距离叫做双曲线的焦距，记作 $2c$.

【注】 (1) 若在定义式中去掉绝对值，则曲线仅为双曲线的一支，若$|PF_1|-|PF_2|=2a$，则点的轨迹仅为双曲线的右支，若$|PF_2|-|PF_1|=2a$，则点的轨迹仅为双曲线的左支.

(2) 当 $2a=2c$ 时，点的轨迹是以 F_1 和 F_2 为端点的两条射线.

(3) 当 $2a>2c$ 时，点的轨迹不存在.

【知识点 1.3】 抛物线

平面内，到一个定点 F 和一条直线 $l(F\notin l)$的距离相等的点的轨迹叫做抛物线，定点 F 叫做抛物线的焦点，定直线 l 叫做抛物线的准线.

由椭圆或者双曲线上的一点及其两个焦点构成的三角形称为“焦点三角形”，因为圆锥曲线的焦点是一个非常重要的概念，这也就决定了焦点三角形的某些特别之处. 下面将从焦点三角形的周长、面积、角平分线以及中位线这几个角度对其进行细致而深入的探索与剖析.

一、焦点三角形的周长

【例 1.1】(2010 · 新课标理，20)　如图 1-1 所示，F_1，F_2 分别是椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，过 F_1 斜率为 1 的直线 l 与 E 相交于 A，B 两点，且$|AF_2|$，$|AB|$，$|BF_2|$成等差数列，求 E 的离心率.

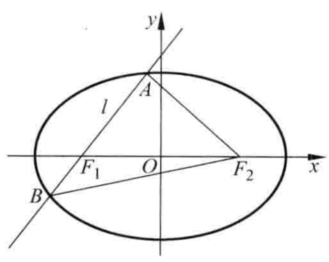

图　1-1

【解析】 易知$|AF_2|+|BF_2|+|AB|=4a$，又 $2|AB|=$

$|AF_2|+|BF_2|$，得$|AB|=\frac{4}{3}a$.

设直线AB的方程为$y=x+c$，A,B两点的坐标分别为$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$，坐标满足方程组$\begin{cases}y=x+c,\\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\end{cases}$整理得$(a^2+b^2)x^2+2a^2cx+a^2(c^2-b^2)=0$，则$x_1+x_2=\frac{-2a^2c}{a^2+b^2}$，$x_1x_2=\frac{a^2(c^2-b^2)}{a^2+b^2}$，于是$|AB|=\sqrt{2}|x_2-x_1|=\sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\frac{4ab^2}{a^2+b^2}$，所以$\frac{4}{3}a=\frac{4ab^2}{a^2+b^2}$，得$a^2=2b^2$，故$E$的离心率为$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

对于焦点三角形的周长，有以下结论：

【结论1.1】　(1) 已知F_1,F_2分别为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的左、右焦点，$P$是椭圆上的动点，则$\triangle PF_1F_2$的周长恒为定值$2a+2c$.

(2) 已知F_1,F_2分别为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的左、右焦点，$l$过焦点$F_1$且与椭圆交于$A,B$两点，则$\triangle F_2AB$的周长恒为定值$4a$.

【变式1】(2008·浙江理，12)　已知F_1,F_2为椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$的两个焦点，过$F_1$的直线交椭圆于$A,B$两点，若$|F_2A|+|F_2B|=12$，则$|AB|=$________.

【变式2】(2006·全国Ⅱ理，5)　已知$\triangle ABC$的顶点B,C在椭圆$\frac{x^2}{3}+y^2=1$上，顶点A是椭圆的一个焦点，且椭圆另外一个焦点在BC边上，则$\triangle ABC$的周长是(　　).

A. $2\sqrt{3}$　　B. 6　　C. $4\sqrt{3}$　　D. 12

【变式 3】(2011 · 新课标理,14)　在平面直角坐标系 xOy 中,椭圆 C 的中心为原点,焦点 F_1,F_2 在 x 轴上,离心率为$\frac{\sqrt{2}}{2}$.过点 F_1 的直线 l 交 C 于 A,B 两点,且$\triangle ABF_2$ 的周长为 16,那么 C 的方程为________.

【变式 4】(2007 · 湖北文,12)　如图 1-2 所示,过双曲线$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{3}=1$ 左焦点 F_1 的直线交曲线的左支于 M,N 两点,F_2 为其右焦点,则$|MF_2|+|NF_2|-|MN|$的值为________.

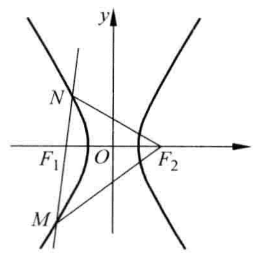

图 1-2

二、焦点三角形的面积

【例 1.2】(2004 · 湖北理,6)　已知椭圆$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$ 的左、右焦点为 F_1,F_2,P 在椭圆上,若 P,F_1,F_2 是一个直角三角形的三个顶点,则点 P 到 x 轴的距离为(　　).

A. $\frac{9}{5}$　　　B. 3　　　C. $\frac{9\sqrt{7}}{7}$　　　D. $\frac{9}{4}$

【解析】　若直角顶点为 F_1,则点 P 到 x 轴的距离为 $d=|PF_1|=\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$;若直角顶点为 F_2,则点 P 到 x 轴的距离为 $d=|PF_2|=\frac{b^2}{a}=\frac{9}{4}$;若直角顶点为 P,记 $\theta=\angle F_1PF_2$ 则$\triangle PF_1F_2$ 的面积 $S_{\triangle PF_1F_2}=b^2\tan\frac{\theta}{2}=9\times\tan45^\circ=9$,此时 $d=\frac{2S_{\triangle PF_1F_2}}{2c}=\frac{9}{\sqrt{7}}>3=b$,此情况不存在.故选 D.

对于焦点三角形的面积,有以下结论:

【结论 1.2】 (1) 已知 F_1,F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点，M 是椭圆上的动点，则 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $S=c|y_M|=b^2\tan\frac{\theta}{2}(\theta=\angle F_1MF_2)$.

(2) 已知 F_1,F_2 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点，M 是双曲线上的动点，则 $\triangle MF_1F_2$ 的面积为 $S=c|y_M|=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}(\theta=\angle F_1MF_2)$.

【证明】 只证(2)，类似可证(1). 由余弦定理可知 $|F_1F_2|^2=|MF_1|^2+|MF_2|^2-2|MF_1|\cdot|MF_2|\cos\theta$.

假设 M 在双曲线的左支上，F_1,F_2 分别为其左、右焦点，由双曲线定义有 $|MF_2|-|MF_1|=2a$，可得 $|MF_2|^2+|MF_1|^2-2|MF_2|\cdot|MF_1|=4a^2$，故 $4c^2=2|MF_2|\cdot|MF_1|+4a^2-2|MF_1|\cdot|MF_2|\cos\theta\Rightarrow|MF_1|\cdot|MF_2|=\frac{2b^2}{1-\cos\theta}$，则

$$S_{\triangle MF_1F_2}=\frac{1}{2}|MF_1|\cdot|MF_2|\cdot\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2\sin\theta}{1-\cos\theta}=\frac{b^2\cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}.$$

【注】 虽然结论 1.2 针对的是已知焦点三角形顶角的情形，但若知道两个底角时，根据三角形内角和为 180°也可转化为已知顶角的情形，故不再单独列出.

【变式 1】(2005・全国理，9) 已知双曲线 $x^2-\frac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1,F_2，点 M 在双曲线上且 $\overrightarrow{MF_1}\cdot\overrightarrow{MF_2}=0$，则点 M 到 x 轴的距离为(　　).

A. $\frac{4}{3}$　　B. $\frac{5}{3}$　　C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　D. $\sqrt{3}$

【变式 2】(2010 · 全国Ⅰ理,9) 已知 F_1,F_2 为双曲线 $C:x^2-y^2=1$ 的左、右焦点,点 P 在 C 上,$\angle F_1PF_2=60°$,则点 P 到 x 轴的距离为( ).

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $\frac{\sqrt{6}}{2}$ C. $\sqrt{3}$ D. $\sqrt{6}$

【变式 3】(2009 · 上海理,9) 已知 F_1,F_2 是椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两个焦点,P 为椭圆 C 上一点,且 $PF_1\perp PF_2$.若 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为 9,则 $b=$________.

【变式 4】(2010 · 全国Ⅰ文,8) 已知 F_1,F_2 为双曲线 $C:x^2-y^2=1$ 的左、右焦点,点 P 在 C 上,$\angle F_1PF_2=60°$,则 $|PF_1|\cdot|PF_2|=$( ).

A. 2 B. 4 C. 6 D. 8