

全景视觉中的理论基础

赵 越 主 编



科学出版社

全景视觉中的理论基础

赵 越 主编

本书得到“云南大学研究生精品课程建设项目(XT512004)”资助

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

随着科技的发展,全景视觉的应用已日趋广泛,学习与掌握全景视觉基本原理及计算方法是从事计算几何、计算机图形学、图像处理、机器人学等专门人才的需要。因此编写一本全景视觉方面的教材是有必要的。同时由于计算机视觉是集数字图像处理、数字信号处理、光学、物理学、几何学、概率统计学、模式识别、人工智能等于一体的学科,编写一本相关的教材是十分棘手的。

本书力求从最基本的原理出发,阐述全景视觉中的数学理论及计算方法,既做到系统条理,又能使各章相对独立,便于读者通读和选择性阅读。本书在阐述理论的同时又兼顾相关的应用,这样便于理论与实践的结合,既不乏经典的理论,又注入了近年来新的研究成果,使读者在了解全景视觉发展史的同时又倾心关注近年来全景视觉研究的新成果。本书涵盖射影几何、全景摄像机几何、全景摄像机标定、全景图像拼接、全景视觉技术应用以及简单的数值计算理论。

本书可作为高年级大学本科生、研究生的教材,也可作为相关领域研究人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

全景视觉中的理论基础 / 赵越主编. —北京: 科学出版社, 2014.9
ISBN 978-7-03-041663-6

I. ①全… II. ①赵… III. ①全景摄影—摄影理论 IV. ①TB864

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 191679 号

责任编辑: 于海云 / 责任校对: 郭瑞芝

责任印制: 徐晓晨 / 封面设计: 迷底书装

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京京华虎彩印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2014 年 9 月第 一 版 开本: 787×1092 1/16

2014 年 9 月第一次印刷 印张: 14 3/4

字数: 360 000

定价: 68.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

前 言

计算机视觉是一个处于知识前沿的领域。计算机视觉的中心任务是对图像进行理解，而它的最终目标是使计算机具有通过二维图像认知三维环境信息的能力，这种能力不仅使机器能感知包括形状、姿态、运动等在内的三维环境中物体的几何信息，而且能对它们进行描述、存储、识别与理解。20 世纪 80 年代，Marr 计算机视觉理论的形成使计算机视觉成为一门独立的学科。90 年代，摄像机自标定理论和分层重建理论再一次推动了计算机视觉的发展。这两大事件使计算机视觉走出了低谷。为适应不同计算机理论框架和增强计算机视觉系统鲁棒性的需要，人们引入了众多的数学知识及相应的计算方法。这些数学方法涉及许多数学分支，包括几何学、代数学、分析学、概率论统计学等，这给学习计算机视觉和从事计算机视觉研究的人呈现了一幅繁杂而困惑的画面。并且在计算机视觉领域经常可以看到缺乏权威性的现象；许多有用的做法并没强调理论基础，而一些理论又未强调在实际中的应用；许多卓有成效的研究成果之间又缺乏联系。这些存在于计算机视觉领域中的现象吸引着众多研究者不断地探索与研究。

全景视觉是计算机视觉中的一个重要组成部分。在机器人导航、视觉监控、基于真实场景图像的虚拟漫游、基于图像的测量与三维重建等许多计算机视觉领域，都需要摄像机有一个大的成像视场。增大摄像机视场的有效方式是将传统摄像机与鱼镜头或反射镜面结合形成全景摄像机。全景摄像机根据镜面不同分为鱼眼摄像机和折反射摄像机。折反射摄像机根据是否有固定视点可分为中心和非中心两类。中心折反射摄像机的反射镜面有抛物面镜、双曲面镜、椭球面镜和平面镜四种类型。特别地，中心折反射摄像机所成的像比较容易反投到空间从而获得场景中的三维信息，并且中心折反射摄像机获取的图像容易转化为透视图像，因此在实际中有着广泛的应用。非中心折反射摄像机随着镜面的不同它的成像模型也不尽相同，这使得很难找到一个统一的数学理论去刻画它。而中心折反射摄像机的成像模型可以用一个统一的单位球模型表达，因此可以使用一个统一的数学原理来刻画中心折反射摄像机。本书将着重讨论与中心折反射摄像机相关的数学理论与计算方法。

本书由以下内容组成。

第一篇：射影几何。它是计算机视觉的数学理论基础，主要内容包括二维射影几何和三维射影几何。着重阐述了这两个射影空间中的几何元素的表示以及它们在相应射影变换下的性质。

第二篇：全景摄像机。它是全景视觉的核心，主要内容包括全景摄像机的发展历程、全景摄像机几何、中心折反射摄像机标定。特别在本篇的第 5 章中讨论了中心折反射摄像机的标定问题，介绍了一些与之相关的典型性标定方法。

第三篇：全景图像拼接技术。它是全景图像生成的一个至关重要的环节，主要介绍了基于柱面和球面两种全景图像拼接技术。

第四篇：全景视觉技术的应用。它是对基本理论的一个检验，主要介绍了全景视觉技术两个典型的应用——基于全景图像的虚拟导航和基于链式全景图的大范围场景漫游。

附录：矩阵理论和迭代估计方法。重点讨论了本书中用到的矩阵知识和迭代优化方法。

上述组成部分中的内容既相互独立，又相互渗透，通过全景视觉使它们形成了一个有机的整体。

本书的第 1、2 章由王亚林、罗欢、赵越编写；第 3、4 章由罗欢、宋罡、卢冲、赵越编写；第 5 章由王亚林、杨玉静、张小芬、赵越编写；第 6 章由杨玉静、宋罡、赵越编写；第 7 章由张小芬、赵越编写；第 8 章由罗欢、赵越编写；附录由王亚林、卢冲、宋罡编写。全书由赵越审阅统稿。

本书的出版除得到云南大学研究生精品课程建设项目(XT512004)资助外，还得到中西部高校提升综合实力工程、云南省高等教学团队(云南大学信息与计算科学教学团队)、国家自然科学基金项目(11361074)的资助，特此致谢。

由于编者水平有限，书中难免有许多不足和疏漏之处，欢迎广大读者批评指正。

编 者

2014 年 7 月于昆明

符号说明

$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{R}^{n \times 1}$	n 元实列向量集合
$\mathbb{R}^{1 \times n}$	n 元实行向量集合
$\mathbb{N}_+$	正整数集
$\mathbb{C}$	复数集
$\mathbb{C}^{n \times 1}$	n 元复列向量集合
$\mathbb{C}^{1 \times n}$	n 元复行向量集合
$O_w - x_w y_w z_w$	世界坐标系
$O - xyz$	镜面坐标系(视球坐标系)
$O_c - x_c y_c z_c$	摄像机坐标系
K	摄像机内参数矩阵
O_c	摄像机的光心
K_M	metric 投影方式下摄像机内参数矩阵
K_A	metric 平面到折反射图像平面的内参数矩阵
f_e	有效焦距
r	纵横比
s	倾斜因子
$p = (u_0, v_0, 1)^T$	主点的齐次坐标
$\hat{o}$	图像中心
ξ	镜面参数
ε	镜面离心率
H_c	共线性映射
H	单应矩阵
H_∞	无穷远单应矩阵
R	旋转矩阵
t	平移向量
$h(x)$	内射函数
Π_1	折反射图像平面
$\bar{n} = (n_x, n_y, n_z)^T$	平面的单位法向量
C_0	镜面轮廓的投影
C_S	球的像
Ω_∞	绝对二次曲线(AC)
ω	绝对二次曲线的像(IAC)

$\mathcal{Q}^*$	绝对对偶二次曲面 (DAC)
ω^*	绝对对偶二次曲面的像 (DIAC)
I, J	一对圆环点
$\ \cdot\ $	向量的 2 范数

目 录

前言

符号说明

第一篇 射影几何

第 1 章 二维射影几何	2
1.1 射影平面	2
1.1.1 中心射影	2
1.1.2 射影直线与射影平面	3
1.1.3 齐次坐标	7
1.1.4 对偶原理	8
1.1.5 复元素	9
1.1.6 交比	10
1.2 二维射影变换	18
1.3 二次曲线	19
1.3.1 二次曲线的定义	20
1.3.2 二次曲线的切线	21
1.3.3 极点与极线, 配极原则	22
1.3.4 二次曲线的仿射性质	25
1.3.5 二次曲线的度量性质	27
1.3.6 对偶二次曲线	31
1.3.7 直线与二次曲线在二维射影变换下的规则	32
1.3.8 二次曲线束	32
1.3.9 双接触定理与三曲线定理	34
第 2 章 三维射影几何	37
2.1 三维射影空间	37
2.1.1 三维射影空间的基本特征	37
2.1.2 点、平面、直线的表示	37
2.1.3 共线平面束的交比	40
2.2 三维射影变换	41
2.2.1 三维射影变换	41
2.2.2 平面与直线在三维射影变换下的像	42
2.3 二次曲面	42

2.3.1 二次曲面	42
2.3.2 对偶二次曲面	44
2.3.3 二次曲面在三维射影变换下的像	45
2.3.4 绝对二次曲线(AC)	45
2.3.5 绝对对偶二次曲面(DAC)	46

第二篇 全景摄像机

第3章 全景摄像机概述	48
3.1 全景摄像机简介	48
3.2 全景摄像机的发展史	48
3.3 全景摄像机研究现状	49
第4章 全景摄像机几何	51
4.1 针孔摄像机成像模型	51
4.1.1 针孔摄像机	52
4.1.2 几何元素的投影与反投影	56
4.1.3 消失点(线)与摄像机内参数	60
4.1.4 圆环点与摄像机内参数	61
4.2 鱼眼摄像机几何	61
4.2.1 鱼眼镜头的成像模型	62
4.2.2 基于球面模型的鱼眼图像的校正	63
4.3 折反射摄像机几何	66
4.3.1 折反射摄像机和鱼眼摄像机的统一成像模型	67
4.3.2 基于柱面展开的折反射全向图像校正	70
4.4 单位球模型下几何体的投影	74
4.4.1 空间点	74
4.4.2 空间直线	76
4.4.3 球	77
第5章 全景摄像机的标定	79
5.1 基于标定物的中心折反射摄像机的标定	79
5.1.1 基于一维标定物的全景摄像机标定方法	79
5.1.2 基于二维标定模板的全景摄像机标定	83
5.2 使用空间直线标定中心折反射摄像机	86
5.2.1 基于正交方向的消失点标定中心折反射摄像机	86
5.2.2 基于圆环点的中心折反射摄像机标定	90
5.2.3 基于直线投影的几何不变量的中心折反射摄像机标定	97
5.2.4 基于共点线束的中心折反射摄像机标定	107
5.2.5 基于正交线束的中心折反射摄像机标定	117
5.3 使用球标定中心折反射摄像机	119

5.3.1 基于球投影的几何不变量的中心折反射摄像机标定	120
5.3.2 利用球在中心折反射下像的投影几何性质的标定方法	133
5.3.3 基于对拓球像的中心折反射摄像机标定	142
5.3.4 使用两个相交球像标定抛物折反射摄像机	150
5.4 使用 DLT——相似方法标定中心折反射摄像机	152
5.5 双平面折反射摄像机自标定	157
5.5.1 双平面镜折反射摄像机的几何模型与成像原理	157
5.5.2 双平面镜折反射系统中的几何不变量	158
5.5.3 基于圆环点的平面折反射摄像机的标定	161

第三篇 全景图像拼接技术

第 6 章 全景图像的拼接技术	168
6.1 柱面全景图像拼接技术	168
6.1.1 基于特征的拼接算法	168
6.1.2 基于相位相关拼接算法	174
6.2 基于球面的全景图像拼接	176
6.2.1 球面全景图像基础知识	176
6.2.2 球面全景图像拼接	181

第四篇 全景视觉技术的应用

第 7 章 基于全景图像的虚拟导航	188
7.1 基于全景图像的目标识别	188
7.2 将均值漂移和动态阈值调整植入粒子滤波器的目标跟踪算法	190
7.3 基于全景图像的目标定位方法	192
7.4 基于全景图像的自主导航	193
第 8 章 基于链式全景图的大范围场景漫游	195
8.1 链式全景图的组成	195
8.2 链式全景图的调度机制	195
8.3 变换系数的估计	195
8.3.1 针孔摄像机成像几何模型	196
8.3.2 平移运动下两幅图像之间的关系	196
8.3.3 变换系数的求取	197
8.4 平滑过渡的实现与平滑过渡质量评价	197
参考文献	199
附录 1 矩阵理论	201
A1.1 基本知识	201
A1.1.1 矩阵	201

A1.1.2	行列式	202
A1.1.3	矩阵的秩	204
A1.1.4	矩阵的运算	204
A1.2	矩阵的特征值、特征向量和相似性	209
A1.2.1	矩阵的特征值与特征向量	209
A1.2.2	相似性	210
A1.3	正交矩阵	210
A1.4	对称与反对称矩阵	212
A1.4.1	对称矩阵	212
A1.4.2	反对称矩阵	212
A1.5	矩阵分解	213
A1.5.1	正交三角分解	213
A1.5.2	Cholesky 分解	214
A1.5.3	奇异值分解	215
A1.6	最小二乘问题	216
A1.6.1	用 SVD 解线性最小二乘问题	216
A1.6.2	用正规方程求解线性最小二乘问题	218
A1.6.3	齐次方程组的线性最小二乘解	218
附录 2	迭代估计方法	220
A2.1	非线性最优化原理	220
A2.1.1	最优性条件	220
A2.1.2	迭代格式	221
A2.2	无约束非线性最优化迭代	222
A2.2.1	最速下降法	222
A2.2.2	Newton 迭代	222
A2.2.3	Levenberg-Marquardt 迭代	224

第一篇 射影几何

本篇内容分为两章，主要介绍在计算机视觉中涉及的射影几何理论。从这两章中可以体会到射影几何的重要性。各章具体内容如下。

第1章介绍二维射影几何。主要内容包括：射影平面上常见几何元素(点、直线和二次曲线)的齐次表示；二维射影变换；二次曲线与对偶二次曲线的性质以及射影平面上常见几何元素在二维射影变换下的像。

第2章介绍三维射影几何。主要内容包括：三维射影空间的特征；三维射影空间中的常见几何元素(空间点、空间直线、平面和二次曲面)的齐次表示；三维射影变换；二次曲面与对偶二次曲面的性质；三维射影空间中常见几何元素在三维射影变换下的像；绝对二次曲线与绝对对偶二次曲面的性质。

第 1 章 二维射影几何

1.1 射影平面

本节首先通过在欧氏空间引入无穷远元素的方式来建立射影平面的概念,然后在射影平面上引入齐次坐标,介绍对偶原理,通过引入复元素的方式将实射影平面扩充到了复射影平面,最后定义了交比。这部分内容是学习二维射影几何的基础。

1.1.1 中心射影

中心射影又称为透视对应,是射影几何中的基本方法。下面给出中心射影的定义。

1. 直线到直线的中心射影

定义 1.1.1 设 l, l' 为两条相异的共面直线, O 为平面上不属于直线 l, l' 上的一个定点。则由此确定了直线 l 到 l' 的一个以 O 为投射中心的中心射影。

若 O 与 l 上任一点 A 的连线 OA 交 l' 于点 A' , 则称 A' 为 A 在 l' 上的中心射影, 直线 OA 称为投射射线。或者, 称 A' 为 A 在该中心射影下的像, 而称 A 为 A' 的原像。显然, A 也是 A' 在直线 l 上的像, 即一个中心射影的逆对应也是中心射影。图 1.1.1 给出了直线 l 到 l' 的一个中心射影。

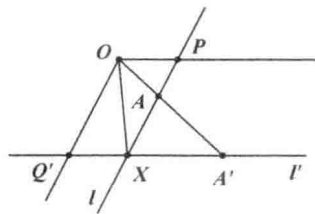


图 1.1.1 直线到直线的中心射影

若直线 l 与 l' 有交点 X , 则 X 是中心射影的自对应点; 若直线 l 与 l' 平行, 则没有自对应点。对于取定的两直线 l 与 l' , 不同的投射中心将确定不同的中心射影。

如图 1.1.1 所示, 当直线 l 与 l' 不平行时, 在直线 l 上存在一点 P , 使得 $OP \parallel l'$, 这样 OP 与 l' 不存在交点, 即 P 在 l' 上不存在像点, 称 P 为 l 上的影消点。同样, 在 l' 上也存在影消点 Q' 。由于影消点的存在, 欧氏几何中直线到直线的中心射影不是一一对应的。

2. 平面到平面的中心射影

定义 1.1.2 设 π, π' 为两个相异的平面, O 为不在此二平面上的任一定点。则由此确定了平面 π 到 π' 上的点之间的一个以 O 为投射中心的中心射影。

若 O 与 π 上任一点 A 的连线 OA 交 π' 于点 A' , 则称 A' 为 A 在 π' 上的中心射影, 直线 OA 称为投射射线。或者, 称 A' 为 A 在该中心射影下的像, 而称 A 为 A' 的原像。同样, 平面到平面上点之间的中心射影的逆对应也是中心射影。图 1.1.2 给出了平面 π 到 π' 上的点之间的一个中心射影。

若平面 π 与 π' 的交线为 x , 则直线 x 上的任一点 X 都是该中心射影的自对应点, 进而, 直线 x 为该中心射影下的自对应直线; 若平面 π 与 π' 平行, 则没有自对应直线。对于取定的两平面 π 与 π' , 不同的投射中心将确定不同的中心射影。

立了圆与仿射直线间的一一对应, 这样的对应是连续的, 因此圆可以看成是仿射直线的一个直观模型。

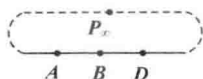


图 1.1.3 仿射直线模型

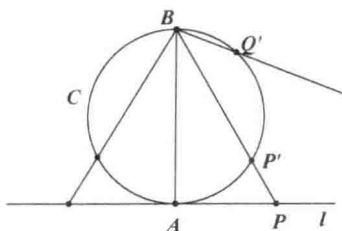


图 1.1.4 圆与仿射直线间的中心射影

仿射直线与普通直线是不同的: 如图 1.1.3 所示, 仿射直线上任一点 A 不能把仿射直线分成不连通的两段; 而仿射直线上任意的两个非无穷远点 A, B 把它分成两段, 其中一段包含无穷远点, 另一段就是原来直线上的线段; 仿射直线上的任意三个非无穷远点 A, B, D 不能排成唯一顺序(一点介于另两点之间)。

定义 1.1.4 在欧氏平面上添加一条无穷远直线便可得到一个新的平面, 称为仿射平面。

下面给出欧氏空间中的一个仿射平面的模型。如图 1.1.5 所示, 设有以 O 为球心的球面, 过球心 O 作平面 α 交球面与大圆 C , 这里规定: 半球面 S 为仿射平面, 大圆 C 上的点为无穷远点, 并且大圆 C 的每一直径的两个端点视为相同的无穷远点, 半球面上除大圆 C 外的所有点均为非无穷远点; 大圆 C 为无穷远直线, 半球面上的半大圆弧为普通直线, 相交于大圆 C 上同一点的半大圆弧为平行直线。关于半球面与仿射平面间一一对应的建立留作练习。

在普通平面上, 一条直线可以把平面分成不连通的两部分。但是在仿射平面上一条仿射直线不能把它分成不连通的两部分。如图 1.1.6 所示, l 是一条直线, A, B 是 l 两侧的点。直线 l 上包含无穷远点的线段 AB 与直线 l 不相交(两直线只有一个交点, 直线 l 与不包含无穷远点的线段 AB 相交)。这说明 l 两侧的点可以用不与 l 相交的线段连接, 于是, 直线 l 不能把仿射平面分成不连通的两部分。同样不难知道, 图 1.1.7 中两条仿射直线 l, m 将仿射平面分为两个不同的区域 I 和 II, 这里, I 和 I 是连通的, II 和 II 也是连通的, 但是, I 和 II 两部分互不连通。

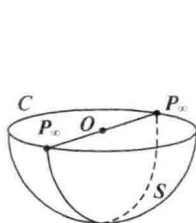


图 1.1.5 仿射平面模型

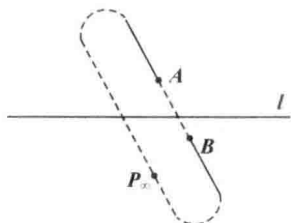


图 1.1.6 一条仿射直线划分仿射平面

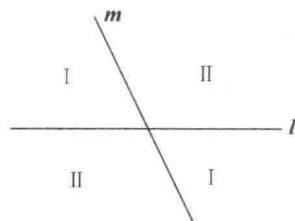


图 1.1.7 两条仿射直线划分仿射平面

3. 射影直线与射影平面

定义 1.1.5 如果把仿射直线上的无穷远点与非无穷远点同等看待而不加区分, 则称这条直线为射影直线。

射影直线可以看成是封闭的, 欧氏平面上的圆通常可看成射影直线的模型(图 1.1.8)。如

图 1.1.8 所示, 和仿射直线类似, 射影直线上任一点 A 不能把射影直线分成不连通的两段; 而射影直线上任意的两点 A, B 把它分成两段; 射影直线上的任意三个点 A, B, D 不能排成唯一顺序(一点介于另两点之间)。

将射影直线的概念加以推广, 就可得到射影平面的概念。

定义 1.1.6 在仿射平面上, 如果对于普通元素和无穷远元素不加区分, 即可得到射影平面。

将仿射平面的模型图 1.1.5 中的无穷远元素和普通元素不加区分, 就得到射影平面的一个模型。射影平面也是封闭的。图 1.1.9 是一个 Möbius 带, 它是射影平面的一部分, 不难发现, Möbius 带是一个单侧曲面。把 Möbius 带与一个圆片沿着它们的边界粘合起来, 便可得到射影平面, 射影平面是封闭的单侧曲面。但在欧氏空间中只能看到射影平面的一部分, 即图 1.1.9 中的 Möbius 带。类似于仿射平面, 射影平面中的任一直线 l 不能把射影平面分成不连通的两部分。而射影平面中的任意两条直线 l, m 只能将射影平面分为两个不同的区域。

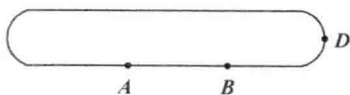


图 1.1.8 射影直线模型

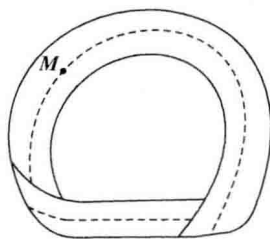


图 1.1.9 Möbius 带

根据前面的定义, 可以得到射影平面上的点与直线的两个基本性质。下面以公理的形式给出这两个基本性质。

公理 1.1.1 射影平面上任意两个相异的点确定唯一直线。

公理 1.1.2 射影平面上任意两条相异的直线确定唯一点。

4. 射影基本形和图形的射影性质

平面射影几何主要涉及两对射影基本形, 它们分别是关于点和直线的。

定义 1.1.7 一直线 l 内所有点 $A, B, C, \dots$ 的集合称为点列, 直线 l 称为点列的底, 记为 $l(A, B, C, \dots)$ 。

定义 1.1.8 一平面内通过一点 O 的所有直线 $a, b, c, \dots$ 的集合称为线束, 点 O 称为线束的中心(顶点), 记为 $O(a, b, c, \dots)$ 。

定义 1.1.9 平面 π 上所有点的集合称为一个点场, 平面 π 称为该点场的底。

定义 1.1.10 平面 π 上所有线的集合称为一个线场, 平面 π 称为该线场的底。

这四个射影基本形中, 点列和线束为一维基本形, 点场和线场为二维基本形。

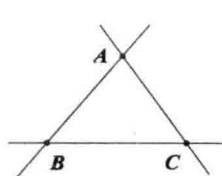
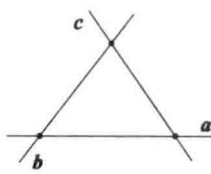
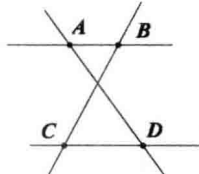
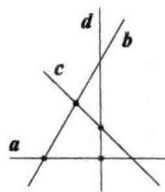
下面介绍一些在平面射影几何中经常用到的基本图形。

定义 1.1.11 平面内 $n(n \geq 3)$ 个有序的点(无三点共线)及其两两顺次连线所构成的图形称为简单 n 点形。这 n 个点称为顶点, n 条连线称为边。

定义 1.1.12 平面内 $n(n \geq 3)$ 条有序的直线(无三线共点)及其两两顺次相交的交点所构成的图形称为简单 n 线形。这 n 条直线称为边, n 个交点称为顶点。

对于简单 n 点(线)形, 图 1.1.10 和图 1.1.11 分别给出了 $n=3$ 和 $n=4$ 的情形。这里需要注意, 对于给定的 n 个点(n 条直线), 由它们所构成的简单 n 点(线)形与这 n 个点(n 条直线)的

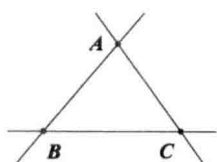
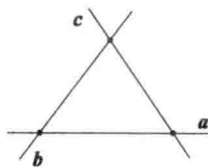
排序有关,不同的排序将得到不同的简单 n 点(线)形。此外,这两类图形与欧氏几何中的多边形是不同的概念。

(a) 简单三点形 ABC (b) 简单三线形 abc (a) 简单四点形 $ABCD$ (b) 简单四线形 $abcd$ 图 1.1.10 简单三点形 ABC 和简单三线形 abc 图 1.1.11 简单四点形 $ABCD$ 和简单四线形 $abcd$

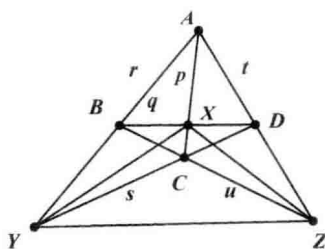
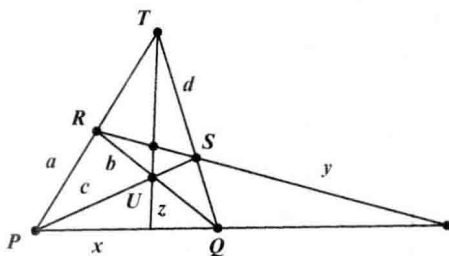
定义 1.1.13 平面内 $n(n \geq 3)$ 个点(无三点共线)及其每两点连线所构成的图形称为完全 n 点形。这 n 个点称为顶点, $n(n-1)/2$ 条连线称为边。

定义 1.1.14 平面内 $n(n \geq 3)$ 条直线(无三线共点)及其每两条直线的交点所构成的图形称为完全 n 线形。这 n 条直线称为边, $n(n-1)/2$ 个交点称为顶点。

在完全 n 点(线)形中,最常见的例子是 $n=3$,三角形与三线形。如图 1.1.12 所示,图 1.1.12(a)是三角形,图 1.1.12(b)是三线形。

(a) 三角形 ABC (b) 三线形 abc 图 1.1.12 三角形 ABC 和三线形 abc

在完全 n 点(线)形中,最重要的例子是 $n=4$,完全四点(线)形。图 1.1.13 是一个完全四点形 $ABCD$,图 1.1.14 是一个完全四线形 $abcd$ 。如图 1.1.13 所示,完全四点形 $ABCD$ 的 4 个顶点为 A, B, C, D ; 6 条边为 p, q, r, s, t, u ; 3 对对边(没有公共顶点的边)为 p, q, r, s, t, u ; 3 个对边点(对边的交点)为 X, Y, Z ; 对边三点形为 XYZ 。如图 1.1.14 所示,完全四线形 $abcd$ 的 4 条边为 a, b, c, d ; 6 个顶点为 P, Q, R, S, T, U ; 3 对对顶(不在同一条边上的顶点)为 P, Q, R, S, T, U ; 3 个对顶线(对顶的连线)为 x, y, z ; 对顶三线形为 xyz 。

图 1.1.13 完全四点形 $ABCD$ 图 1.1.14 完全四线形 $abcd$

引入无穷远元素以后,便可通过中心射影建立一平面上两直线上点之间的一一对应。同样,也可通过中心射影建立两平面之间点的一一对应。

定义 1.1.15 经过中心射影后图形的不变性质(量)称为图形的射影性质(不变量)。

容易证明,保持点与点、直线与直线间的一一对应、同素性、结合性均为图形的射影性质。这里的同素性指经过中心射影后,点对应点、直线对应直线;结合性指一点在一直线上,则对应点在对应直线上。点列、线束、点场、线场、简单 n 点(线)形、完全 n 点(线)形均为射