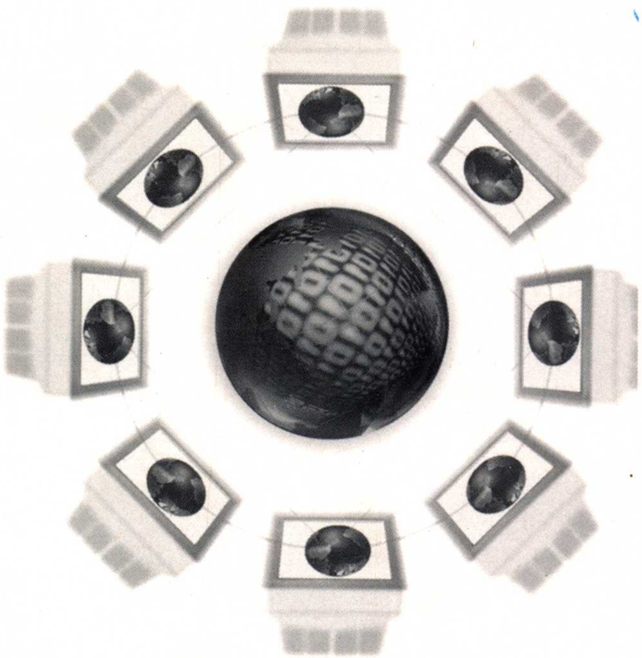
龙门·新教案系列丛书

龙门品牌 学子至爱

新教案

在线课堂

● 丛书主编 周益新 ● 本册主编 卞清胜



高二·数学（下）

龍門書局
www.longmenbooks.com

龙门·新教案系列丛书

新教案
在线课堂

高二数学 下

本册主编 卞清胜

撰　　稿 陈　慧　傅　军　黄烽圣　冷　红　李国文
马仲兰　苏国咏　孙　瑾　汪　军　王　飞
王振华　吴　浩　吴　萍　肖新国　徐生锋
徐月枝　许　敏　严细萍　杨永红　张光玲
张文才

龍門書局
北京

编 委 会

举报电话:(010)64034160 13501151303(打假办)
邮购电话:(010)64034160

图书在版编目(CIP)数据

龙门新教案.在线课堂.高二数学.下/周益新丛书主编;卞清胜本册主编.—北京:龙门书局,2007
ISBN 978-7-80191-226-8

Ⅰ.龙… Ⅱ.①周… ②卞… Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 087789 号

责任编辑:杨帅英 / 封面设计:高海英

龍門書局 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码:100717
www.longmenbooks.com

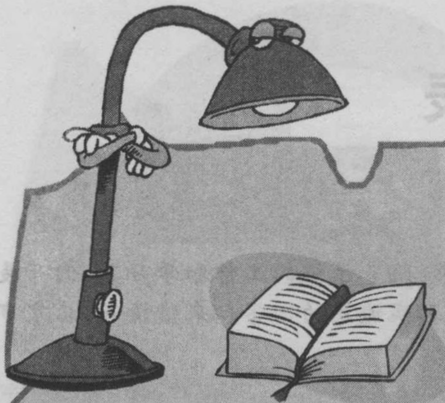
北京一二零一工厂 印刷
科学出版社总发行 各地书店经销

*

2003 年 12 月第 一 版 开本:880×1230 大 16 开
2007 年 9 月第四次修订版 印张:16 3/4
2007 年 9 月第 七 次 印 刷 字数:431 000

定 价: 25.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)



编辑寄语

转眼间夏天过去，秋色蹒跚而来——八月尽头，又是一年开学时。想看的书还没来得及看，想写的文章还未能开头，想做的事情还不容动手。每当此时，我就会想起那篇朱自清先生的《匆匆》。

去的尽管去了，来的尽管来着；去来的中间，又怎样地匆匆呢？早上我起来的时候，小屋里射进两三方斜斜的太阳。太阳他有脚啊，轻轻悄悄地挪移了；我也茫茫然跟着旋转。于是——洗手的时候，日子从水盆里过去；吃饭的时候，日子从饭碗里过去；默默时，便从凝然的双眼前过去。我觉察他去的匆匆了，伸出手遮挽时，他又从遮挽着的手边过去，天黑时，我躺在床上，他便伶伶俐俐地从我身上跨过，从我脚边飞去了。等我睁开眼和太阳再见，这算又溜走了一日。我掩着面叹息。但是新来的日子的影儿又开始在叹息里闪过了。

时间就是如此任性。它从你我的手中流逝，从你我的身边溜走，而我们又做了什么呢？少壮不努力，老大徒伤悲！可有些人虽然知道应该珍惜时间，却不知如何去做。

《龙门新教案》正是为了这样的初衷而创作的。它记录真实的教学，回放精彩的瞬间，触摸细节的意蕴，让每节课、每次作业都活灵活现。**《龙门新教案》**包括**《在线课堂》**和**《同步测控》**两个系列。其中，**《在线课堂》**根据各学科的特点以不同形式展现生动活泼的情景探究课堂；**《同步测控》**则是一种同步知识点，点点对应练习的作业本。总之，它引导您合理规划课堂内外的时间，轻松达到事半功倍的效果。

同学们，准备好了吗？拿起**《龙门新教案》**，带着梦想起程吧。

读者反馈表

亲爱的读者朋友：

您好！非常感谢您阅读本书。为了更好地满足您的阅读需求，服务于您的工作和学习，我们开展了此次读者调研活动。诚望得到您的配合与支持，也希望得到您真实诚恳的回答。来信请寄：北京市东黄城根北街16号龙门书局杨帅英收，邮编：100717。

姓名________ 学校________ 年级________

联系地址________ 联系电话________

1. 您是：学生□ 教师□ 教育管理者□ 家长□ 其他________
2. 性别：男□ 女□
3. 您从何处了解到本书：
   媒体广告□ 书店卖场宣传□ 老师推荐□ 朋友介绍□ 偶然看到□ 其他________
4. 您从哪购买到本书：
   新华书店□ 其他书店□ 批发市场□ 网上书店□
5. 您在哪个时间段使用本书：
   课前□ 课堂□ 课后□ 其他________
6. 从整体上说，您比较关注本书哪些方面的信息(可多选)：
   重点讲解□ 例题讲解□ 课后作业□ 中考链接□
   其他________
7. 相比较而言，本书所有栏目中，最吸引您的是哪个(单选)：
   问题探究□ 教材全解□ 综合运用□ 拓展创新□ 研讨应用□
   预习参考□ 整体感悟□ 文章品读□ 体验拓展□ 目标预览□ 随堂练习□
   为什么？________
8. 您希望本书中再增加哪些方面的栏目？
   ____
9. 您对本书内容的下列方面比较满意：
   教材讲解□ 例题讲解□ 例题的题型□ 习题的题型□ 习题答案□
10. 您认为本书的差错多吗：
    无差错□ 较少差错□ 有差错，但能接受□ 差错较多□ 差错太多，无法容忍□
11. 您对本书的哪些方面还不满意(可多选)：
    封面设计□ 版面形式□ 开本大小□ 售后服务□
    为什么？________
12. 您认为本书目前的价格：
    偏高□ 偏低□ 恰好□ 对价格无所谓□
    您认为什么样的价格比较好接受？________
13. 您对目前市场上教辅书的满意度如何：
    很满意□ 比较满意□ 一般满意□ 比较不满意□ 很不满意□
14. 您觉得教辅书主要存在哪些问题：
    题目选取不典型□ 讲解不到位□ 差错率太高□ 内容陈旧□ 栏目设置与教学实际不符□
15. 对于教辅类图书，您更喜欢下面哪种开本形式(单选)：
    大16开□ 16开□ 大32开□ 32开□ 无所谓□ 其他________

再次感谢您对我们的支持！

龙门书局

目录

龙门新教案

高二数学(下)

第九章 直线、平面、简单几何体

第十章 排列、组合和二项式定理

第十一章 概率

第九章　直线、平面、简单几何体

第一节　平面的基本性质

第一讲

大至金字塔、三峡大坝、"东方明珠"、宇宙飞船，小至桌椅门窗、机械零件，它们的设计，仅仅依靠平面几何的知识是远远不够的，所以，我们必须学习一门新的数学知识——立体几何．

立体几何是平面几何的扩充和发展，平面几何主要研究平面图形的性质，立体几何则重点研究空间图形的画法和性质．一些平面图形的基本性质，在研究范围扩大到空间以后，是否仍然成立？空间图形中的角度、距离应该如何度量？这些都是我们迫切希望解决的问题．

这节课，我们开始学习平面的基本性质．

教材全解

重点1　平面的概念　★

生活中常见的桌面、黑板面、平静的水面都是平面的局部形象．

(1)平面是最基本的几何概念，对它只加以描述而不给出定义．

(2)几何中的平面是无限延展的，平面与平面无大小、厚薄之分，仅有位置上的不同．

(3)一个平面将整个空间分成两部分．

重点2　平面的画法　★

常用平行四边形表示平面．

(1)所画的平行四边形表示它所在的整个平面，需要时可以把它延展出来．有时根据需要也用其他平面图形(如三角形、矩形、圆等)表示平面．

(2)当平面水平放置时，通常把平行四边形的锐角画成45°，横边画成邻边的2倍长，如图9-1-1(1)．画直立平面时，要有一组对边为铅垂线，如图9-1-1(2)．

(3)当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线(或不画)，如图9-1-1(3)．这与平面几何中添加的辅助线应画成虚线不同．

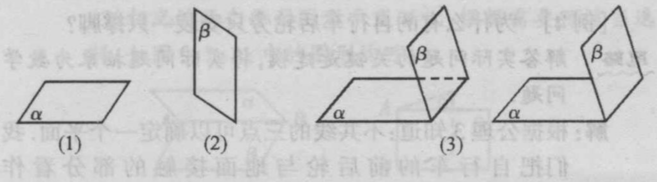


图9-1-1

注意：添加的辅助线未被平面遮住时，仍画成实线，只有被另一平面遮住的部分才画成虚线．

[例1]　下列的说法中正确的一个是　(　　)

A. 平面就是平行四边形

B. 任何一个平面图形都是一个平面

C. 平静的太平洋面就是一个平面

D. 圆和平面多边形都可以表示平面

思路　利用平面的基本特征以及平面与平面图形的区别进行判断．

解：A、B选项都不正确，平面是无限延展，没有边界的，而平行四边形和所有的平面图形都是有边界的．当我们画平面时，只能画出它的一部分，因为习惯上用平行四边形来表示平面；C选项也不正确，一则太平洋洋面不可能平静，二是太平洋再大也会有边际，加之地球为椭球状，因此平静的太平洋无论如何都不可能是绝对平的；D选项正确，在需要时，除用平行四边形表示平面外，还能用三角形、圆等来表示平面．故选D．

总结　平面与平面图形是两个既有联系又有区别的易混概念，在本节课的学习中，务须突破这一难点，突破难点的关键之一是准确把握平面的基本特征——平面没有厚度、绝对平展、且无边界，是一种理想的图形；关键之二是掌握课本的约定——用平面图形来表示平面，画出的只能是平面的一部分．

重点3　平面的表示方法　★

一般用一个希腊字母α、β、γ…来表示．

(1)平面可以用平行四边形的对角顶点的字母表示，也可以用三角形三个顶点的字母表示．

(2)点A在直线l上，记作$A\in l$；点A在直线l外，记作$A\notin l$．直线l和直线m相交于A，记作$l\cap m=A$．

(3)平面内有无数个点，平面可以认为是由它内部的所有的点组成的点集，其中每个点都是它的元素．点A在平面α内，记作$A\in\alpha$，作图时，点必须画在表示平面的图形内部(图9-1-2)．点A不在平面α内，记作$A\notin\alpha$．这里的平面看作是集合，而点看作是元素．

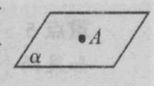


图9-1-2

重点4　公理1　★★★

如果一条直线上的两点在同一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内．

如图9-1-3．

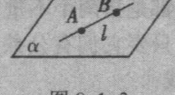


图9-1-3

(1)符号语言表述：$A\in l$，$B\in l$，$A\in\alpha$，$B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$．这时说直线在平面内，或说平面经过直线．直线$l$在平面$\alpha$内，记作$l\subset\alpha$；作图时，表示直线的线段必须画在表示平面的图形内部

(图 9-1-3);直线 l 不在平面 α 内,记作 $l\not\subset\alpha$;直线 l 和平面 α 相交于点 A,记作 $l\cap\alpha=A$.

(2)公理 1 是研究直线和平面关系的.

(3)从集合的角度看,公理 1 是说:如果一条直线(点集)中有两个元素(点)属于一个平面(点集),那么这条直线就是这个平面的真子集.

(4)公理 1 的作用:①判定直线或点是否在平面内;②检验平面.

[例 2]　一条直线经过平面内一点与平面外一点,则它和这个平面有几个公共点?为什么?

思路　由本题结论易知,说明理由必须依据所学的定义、公理、定理.对于证明含有"只有""不可能""至多""至少"字眼的命题的情况,一般考虑用反证法.

解:这条直线和这个平面只有一个公共点.

假设这条直线和这个平面有两个公共点,根据公理 1 可得:______________,这与已知这条直线过平面外一点矛盾,说明直线与这个平面有两个公共点是不可能的.所以,这条直线与这个平面只有一个公共点.

思结　原命题与逆否命题等价,我们证明原命题比较困难时就可证明它的逆否命题,即否定结论,推出与已知矛盾的结果,这就是反证法.

随堂练习

1.如图 9-1-4 中的△ABC,若 AB、BC 在平面 α 内,判断 AC 是否在平面 α 内.

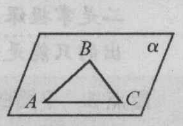


图 9-1-4

重点 5　公理 2　★★★

如果两个平面有一个公共点,那么它们还有其他公共点,且所有这些公共点的集合是一条直线.

如图 9-1-5.

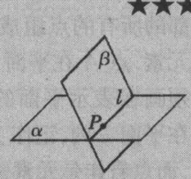


图 9-1-5

(1)符号语言表述:$P\in\alpha\cap\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$ 且 $P\in l$.平面 α 与平面 β 相交于直线 a,记作 $\alpha\cap\beta=a$.

(2)公理 2 是研究平面和平面的关系的基础.以后说到两个平面,如不特别说明,都是指两个不重合的平面.

(3)对于两个平面,只要它们有公共点,它们就是相交的位置关系,交集是一条直线.

(4)公理 2 的作用:①判断两个平面是否相交;②判定点是否在直线上.点若是某两个平面的公共点,那么这个点就在这两个平面的交线上.

[例 3]　已知△ABC 在平面 α 外,$AB\cap\alpha=P$,$AC\cap\alpha=R$,$BC\cap\alpha=Q$,如图 9-1-6.求证:P、Q、R 三点共线.

思路　应用公理 2,注意选择恰当的平面,只要证明三点都是某两个平面的公共点,即可推出三点在两个平面的交线上.

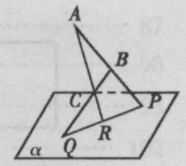


图 9-1-6

证明:∵ $AB\cap\alpha=P$,

∴ $P\in AB$,$P\in$ 平面 α.

又 $AB\subset$ 平面 ABC,

∴ $P\in$ 平面 ABC.

∴ 由______可知,点 P 在______________.

同理可证 Q、R 也在______________.

∴ P、Q、R 三点共线.

思结　要证明空间诸点共线,通常证明这些点同时落在两个相交平面内,则必落在它们的交线上.

随堂练习

2.如图 9-1-7,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,画出平面 A_1D_1CB 与平面 A_1ACC_1 的交线.

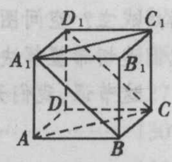


图 9-1-7

重点 6　公理 3　★★★

经过不在同一条直线上的三点,有且只有一个平面.

如图 9-1-8.

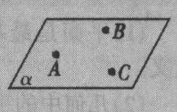


图 9-1-8

(1)符号语言表述:A、B、C 三点不共线⇒有且只有一个平面 α,使 $A\in\alpha$,$B\in\alpha$,$C\in\alpha$.

(2)公理 3 是研究有关平面的条件.公理 3 中的"三点"是条件的骨干,不会被忽视,但"不在同一直线上"这一附加条件则易被遗忘,如舍之结论就不成立了,因此绝对不能遗忘.同时还应认识到经过一点、两点或在同一直线上的三点可有无数个平面;过不在同一直线上的四点的平面不一定存在.

公理 3 中的"有且只有一个"强调的是存在性和惟一性两个方面,要准确理解和完整使用这一公理,不能仅用"只有一个"来替代"有且只有一个",否则就没有表达存在性."确定一个平面"中的"确定"是"有且只有"的同义词,也是指存在性和惟一性这两方面的,这个术语今后也会常常出现,要理解好.

(3)公理 3 的作用:①确定平面;②证明点线共面问题.

[例 4]　为什么有的自行车后轮旁只安装一只撑脚?

思路　解答实际问题的关键是建模,将实际问题抽象为数学问题.

解:根据公理 3 知道:不共线的三点可以确定一个平面.我们把自行车的前后轮与地面接触的部分看作是______,因此,只需要在自行车旁安装一只撑脚作为______,由这不共线的三点可以确定一个平面.因此,自行车只安装一只撑脚就可以了.

随堂练习

3. 空间不共线的四个点可以确定多少个平面？

综合延伸

[例5] 画相交的两个平面.

思路 两个平面相交的图形有三种：人字形、丁字形、十字形. 其中人字形最简单，十字形最复杂. 如果没有必要，应尽可能从简.

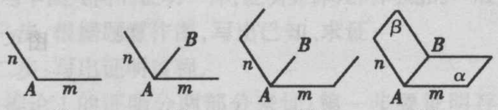


图 9-1-9

画法：(1)画相交于点 A 的线段 m、n，如图 9-1-9(1)，呈人字形.

(2)画两平面的交线 AB(线段)，如图 9-1-9(2).

(3)过线段 m、n 的端点画出与交线 AB 平行且相等的线段，如图 9-1-9(3).

(4)连结两平行四边形的另一边，注意被平面遮住的部分应画成虚线或者不画，如图 9-1-9(4)，即为所求作的相交的两平面. 丁字形和十字形相交的两平面见图 9-1-10，画法略.

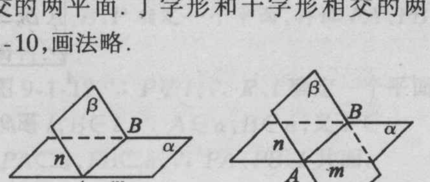


图 9-1-10

总结 (1)画好两个相交平面的图形，是画好一切立体图形的基础.

(2)画空间图形的过程，是培养我们空间想像能力的过程，一定要认真对待，绝不可以掉以轻心.

(3)相交的两个平面图形千变万化，根据需要可适当选择. 如图 9-1-11 中的图形均可.

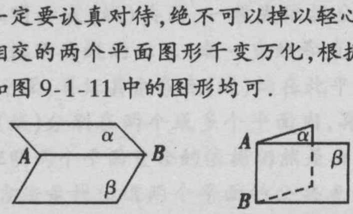


图 9-1-11

要点记忆

1. 平面的概念、画法和表示方法.(★)

2. 平面的基本性质，三个公理中每个公理的三种语言表述及公理的应用.(★★★)

重点：了解平面的概念，会正确画图表示两相交平面的位置关系，掌握平面的基本性质的三个公理，掌握共线问题的证明方法.(考点)

难点：平面的基本性质的三个公理的掌握与运用.

心得笔记

[例2] 这条直线上所有的点都在这个平面内

[例3] 公理2；平面 ABC 与平面 α 的交线上；平面 ABC 与平面 α 的交线上

[例4] 两个点；第三个点

课后作业

班级______ 姓名______ 分数______

[基础演练]

1. 下列命题:①书桌面是平面;②8 个平面重叠起来,要比 6 个平面重叠起来厚;③有一个平面的长是 50m,宽是 20m;④平面是绝对的平、无厚度、可以无限延展的抽象的数学概念.其中正确的命题个数为 ( )

A. 1 B. 2 C. 3 D. 4

2. 点 P 在直线 l 上,而直线 l 在平面 α 内,用符号表示为 ( )

A. $P\subset l\subset\alpha$ B. $P\in l\in\alpha$

C. $P\subset l\in\alpha$ D. $P\in l\subset\alpha$

3. 如图 9-1-12,若一直线 a 在平面 α 内,则正确的图形是 ( )

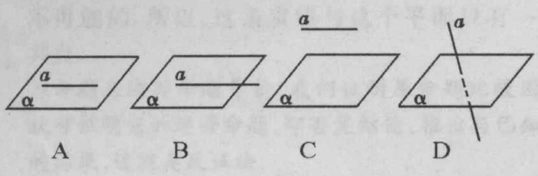


图 9-1-12

4. 下面空间图形画法错误的是 ( )

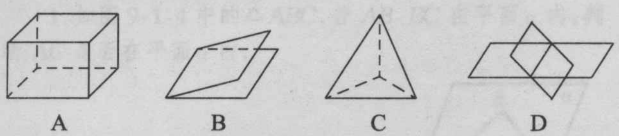


图 9-1-13

5. 下列说法中正确的个数是 ( )

①"有且只有一个"中的"有一个"是指"最少有一个";②"有且只有一个"中的"只有一个"是指"最多有一个";③"有且只有一个"就是指"只有一个".

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

6. 下列推理,错误的是 ( )

A. $A\in l,A\in\alpha,B\in l,B\in\alpha\Rightarrow l\subset\alpha$

B. $A\in\alpha,A\in\beta,B\in\alpha,B\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=AB$

C. $l\not\subset\alpha,A\in l\Rightarrow A\notin\alpha$

D. $A,B,C\in\alpha,A,B,C\in\beta$,且 A,B,C 不共线 $\Rightarrow\alpha$ 与 β 重合

7. 如图 9-1-14 所示,已知 $\alpha\cap\beta=EF,A\in\alpha,B、C\in\beta,BC$ 与 EF 相交,画出平面 ABC 分别与 α 和 β 的交线.

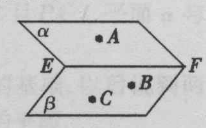


图 9-1-14

8. 下面是四个命题的叙述语:(其中 $A、B$ 表示点,a 表示直线,α 表示平面)

①$\because A\subset\alpha,B\subset\alpha,\therefore AB\subset\alpha$;②$\because A\in\alpha,B\in\alpha,\therefore AB\in\alpha$;③$\because A\notin\alpha,a\subset\alpha,\therefore A\notin a$;④$\because A\notin a,a\subset\alpha,\therefore A\notin\alpha$.

其中命题叙述方法和推理过程都正确的命题的序号是______.

9. "直线 l 上有两点在平面 α 内"是"平面 α 经过 l"的______条件;"两个平面有公共点"是"这两个平面相交"的______条件.

[综合测试]

10. 证明:不在平面内的一条直线和这个平面最多只有一个公共点.

11. 如图 9-1-15,已知 $\triangle ABC,AB\cap$ 平面 $\alpha=P,BC\cap\alpha=Q$,画出直线 AC 与平面 α 的交点,并说明理由.

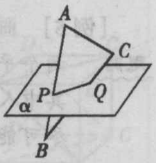


图 9-1-15

[探究升级]

12. 如图 9-1-16,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,设 A_1C 与平面 ABC_1D_1 交于点 Q,求证:$B、Q、D_1$ 共线.

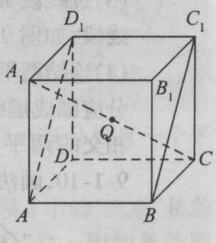


图 9-1-16

第一节　平面的基本性质

第二讲

尽可能把立体几何问题转化为平面几何问题，是我们解决立体几何问题时的常见思路，公理3为我们确定平面提供了理论依据和具体方法，但这还不够，这节课我们将学习公理3的三个推论，为我们确定平面提供更多的方法.

教材全解

重点1　推论1　★★★

经过一条直线和直线外的一点有且只有一个平面.

如图9-1-17.

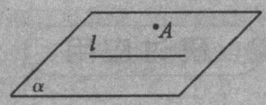


图9-1-17

(1)与平面几何的证明一样，证明立体几何问题的一般步骤是：第一步：根据题意作图，写出已知、求证；第二步：写出证明过程.

(2)推论1的证明分两部分来证：第一步要证明存在一个平面，第二步要证明这个平面是惟一的.

(3)本讲的三个推论的作用与公理3的作用相同，用于确定平面及证明点、线共面.推论1的符号表示：$A\notin l\Rightarrow$有且只有一个平面α，使得$A\in\alpha$，$l\subset\alpha$.

[例1]　过直线l外一点P引两条直线PA、PB和直线l分别相交于A、B两点，求证：三条直线PA、PB、l共面.

思路　根据已知条件可知直线l及l外一点P确定一个平面，再证直线PA、PB在这个平面内；也可以根据不共线的三点A、B、P确定一个平面，再证PA、PB、l在这个平面内.

证明1：如图9-1-18，$\because P\notin l$，$\therefore P$、l确定一个平面α.

$\because A\in l$，$B\in l$，$\therefore A\in\alpha$，$B\in\alpha$，又$P\in\alpha$.

$\therefore PA\subset\alpha$，$PB\subset\alpha$. $\therefore PA$、PB、l共面.

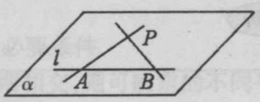


图9-1-18

证明2：________________________________.

总结　(1)平面的基本性质是证明诸点(线)共面的主要依据.

(2)证明诸点(线)共面，一般先依据公理3或者其推论，先选不共线的三点(或一直线和直线外一点)确定一个平面，再证其余各点(线)均在此平面内；或者先证此点(线)分别在两个或多个平面内，再证这些平面重合.证明两个平面重合的依据仍然是公理3及其推论，基本方法是找出这两个平面的公共点(线)，而由这些点(线)又只能确定一个平面，命题得证.

随堂练习

1. 一条直线和这条直线外的不在同一条直线上的三点能确定________个平面.

重点2　推论2　★★★

经过两条相交直线有且只有一个平面.

符号表示：$a\cap b=P\Rightarrow$有且只有一个平面α，使得$a\subset\alpha$，$b\subset\alpha$.

如图9-1-19.

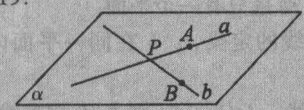


图9-1-19

已知：直线a、b，且$a\cap b=P$.

求证：过a、b有且只有一个平面.

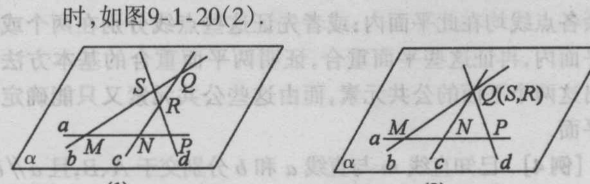
证明：如图9-1-19，在a、b上分别取不同于点P的点A和点B，点A、B、P是不在同一直线上的三点(否则与a、b为两条相交直线矛盾)，由公理3，过A、B、P三点有一个平面α.因为a、b各有两点在α内，所以a、b在α内.因此，过a、b有平面α.

因为点A、B、P分别在直线a、b上，所以它们在过a、b的平面内.又由公理3，过点A、B、P的平面只有一个，所以过直线a、b的平面只有一个.

[例2]　已知a、b、c、d是两两相交且不共点的四条直线，求证：a、b、c、d共面.

思路　首先应考虑到两两相交且不共点的四条直线有两种情况：(1)没有三线共点；(2)有三线共点.本题可以对上面两种情况分别证明，但最佳选择是分两种情况画图，采用统一的证明.

证明：如图9-1-20(1)，$a\cap b=M$，$a\cap c=N$，$a\cap d=P$，$b\cap c=Q$，$b\cap d=S$，$c\cap d=R$.当Q、S、R三点重合时，如图9-1-20(2).



(1)　　(2)

图9-1-20

$\because$________，$\therefore a$、b可确定一个平面α.

$\because N\in a$，$Q\in b$，$\therefore N\in\alpha$，$Q\in\alpha$.

$\therefore NQ\subset\alpha$，即$c\subset\alpha$.同理________，$\therefore a$、$b$、$c$、$d$共面.

总结　处理点、线、面的位置关系问题时，应对图形的所有可能性进行逻辑分类，逐一考查，做到“不重”“不漏”.

随堂练习

2. 共点的三条直线可以确定______个平面.

重点3　推论3 ★★★

经过两条平行的直线有且只有一个平面.

符号表示:$a // b \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α,使得 $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$.

如图9-1-21.

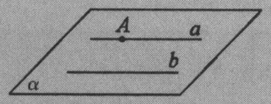


图9-1-21

已知:直线 a、b,且 $a // b$.

求证:过 a、b 有且只有一个平面.

证明:由平行线的定义,a、b 在同一平面内.这就是说,过 a、b 有平面 α.

设点 A 为直线 a 上任一点,则点 A 在直线 b 外,点 A 和直线 b 在过 a、b 的平面 α 内,又由公理3的推论1,过点 A 和直线 b 的平面只有一个.所以过直线 a、b 的平面只有一个.

[例3]　已知空间四点 A、B、C、D 不在同一平面内,求证:AB 和 CD 既不平行,也不相交.

思路　直接判定困难,考虑用反证法.

证明:假设________,则 AB、CD 可确定一个平面 α,于是 $AB \subset \alpha$, $CD \subset \alpha$,可得________.这与已知 A、B、C、D 不共面矛盾.因此 AB 和 CD 既不平行,也不相交.

随堂练习

3.三条直线两两平行且不共面,它们可以确定______个平面.

重点4　证明共面问题

证明诸点线共面,一般先选部分点线确定一个平面,再证其余各点线均在此平面内;或者先证这些点线分别在两个或多个平面内,再证这些平面重合,证明两平面重合的基本方法是找出这两个平面的公共元素,而由这些公共元素又只能确定一个平面.

[例4]　已知直线 m 与直线 a 和 b 分别交于 A、B,且 $a // b$.

求证:经过 a、b、m 有且只有一个平面.

思路　要证经过 a、b、m 三条直线有且只有一个平面,须证两件事,其一是存在性,即"有",其二是唯一性,即"只有".

证明:如图9-1-22,

$\because a // b$,

$\therefore$ 过 a,b 有一个平面 α.

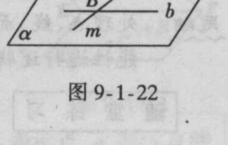


图9-1-22

假设过 a、b、m 还有一个平面 β 异于 α,

则 $a \subset \alpha$, $b \subset \alpha$, $a \subset \beta$, $b \subset \beta$.

这与 $a // b$,过 a、b 有且只有一个平面相矛盾,因此,过 a、b、m 有且只有一个平面.

思结　(1)证明过三线有且只有一个平面(即确定平面)与证明三线共面是有差异的,前者不仅须证明存在性,还须证明唯一性;而后者则不然,只须证明平面存在即可了.

(2)证明唯一性,常常使用反证法.

随堂练习

4.已知空间五点中,任意四点在同一平面内,求证:这五点在同一平面内.

研讨应用

[例5]　已知 $a // b // c$, $a \cap l = A$, $b \cap l = B$, $c \cap l = C$.求证:a、b、c 共面,有三位同学的证明如下,请判断正误.

甲生

证明:$\because a \cap l = A$, $\therefore a$ 与 l 共面.同理,b 与 l 共面,c 与 l 共面.$\therefore a$、b、c 与 l 共面,即 a、b、c 共面.

乙生

证明:$\because a // b$, $\therefore a$、b 确定平面 α.

$\because A \in a, B \in b$, $\therefore A \in \alpha, B \in \alpha$.

又 $A \in l, B \in l$, $\therefore l \subset \alpha$.

又 $C \in l$, $\therefore C \in \alpha$ 且 $C \notin a$,

$\therefore \alpha$ 也是 C 和 a 确定的平面.

$\because C \in c$,且 $c // a$, $\therefore c \subset \alpha$.

$\therefore a$、b、c 都在同一平面 α 内,即 a、b、c 共面.

丙生

证明:$\because a // b$, $\therefore a$、b 确定平面 α. $\because A \in a, B \in b$,

$\therefore A \in \alpha, B \in \alpha$.又 $A \in l, B \in l$, $\therefore l \subset \alpha$.

同理,a、c 确定平面 β, $l \subset \beta$.

因为 a、l 既在 α 内,又在 β 内,而相交直线 a, l 确定惟一一个平面,所以 α 和 β 重合,故 a、b、c 共面.

要点记忆

公理3的三个推论及其应用.(★★★)

重点:掌握共面问题的证明方法.(考点)

难点:处理点、线、面位置关系时的逻辑分类.

课后作业

班级______　姓名______　分数______

[基础演练]

1. 空间四点,没有三点共线,可确定平面的个数为　(　　)

A. 1　B. 4　C. 1或4　D. 0或1

2. 下列命题中真命题的个数是　(　　)

①两点和一条直线可以确定两个平面　②两条直线确定一个平面　③两条平行直线确定一个平面

A. 0　B. 1　C. 2　D. 3

3. 给出下列四个命题,其中正确的是　(　　)

①空间四点共面,则其中必有三点共线

②空间四点不共面,则其中任何三点不共线

③空间四点中存在三点共线,则此四点共面

④空间四点中任何三点不共线,则此四点不共面

A. ②③　B. ①②③　C. ①②　D. ②③④

4. 下列命题中,①有三个公共点的两个平面重合;②梯形的四个顶点在同一平面内;③三条互相平行的直线必共面;④两组对边分别相等的四边形是平行四边形.其中正确命题的个数是　(　　)

A.0　B.1　C.2　D.3

5. 空间五个点,没有三点共线,但有四点共面,这样的五个点可以确定平面数最多为　(　　)

A.3　B.5　C.6　D.7

6. 在空间内,可以确定一个平面的条件是　(　　)

A. 两两相交的三条直线

B. 三条直线,其中的一条与另外两条直线分别相交

C. 三个点

D. 三条直线,它们两两相交,但不交于同一点

7. 直线 $l_1 /\!/ l_2$,在 l_1 上取三点,在 l_2 上取两点,由这五个点能确定______个平面.

8. **(2006·上海)**若空间中有四个点,则"这四个点中有三点在同一条直线上"是"这四个点在同一个平面上"的　(　　)

A.充分非必要条件

B.必要非充分条件

C.充分必要条件

D.既非充分又非必要条件

9. 空间四条直线两两相交,则可确定的不同平面数为　(　　)

A.1个　B.4个

C.6个　D.1个或4个或6个

[综合测试]

10. 怎样检查一张桌子的四条腿的下端是否在同一平面内?

11. 已知直线 $a /\!/ b$,c 与 a、b 都相交,过 a、c 作平面 α,求证:$b \subset \alpha$.

[探究升级]

12. 如图 9-1-23,在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中,点 M、N、P、Q 分别是棱 AB、BC、D_1C_1、C_1C 的中点,求证:M、N、P、Q 四点共面.

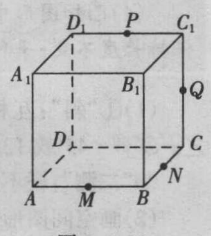


图 9-1-23

心得笔记

[例1]　如图9-1-18,∵ P、A、B 不共线,∴ P、A、B 确定一平面 α.∵ $A\in l$,$B\in l$,∴ $l\subset\alpha$.同理 $PA\subset\alpha$,$PB\subset\alpha$,∴ PA、PB、l 共面

[例2]　$a\cap b=M$;$d\subset\alpha$

[例3]　AB 和 CD 平行或相交;A、B、C、$D\in\alpha$

[例4]　又 $m\cap a=A$,$m\cap b=B$.∴ $A\in a$,$B\in b$,∴ $A\in\alpha$,$B\in\alpha$.又 $A\in m$,$B\in m$,∴ $m\subset\alpha$,即过 a、b、m 有一平面 α.

[研讨应用]　诊断:甲生错误明显.a 与 l 共面 α,b 与 l 共面 β,c 与 l 共面 γ,但 α、β、γ 未必是同一平面,因而也就推不出 a、b、c 共面,乙生的毛病在于"∵ $C\in c$,且 $c /\!/ a$,∴ $c\subset\alpha$"这一步推理的理由未表述清楚,应补充更正如下:"∵ $a /\!/ c$,∴ a、c 确定平面 β,又 $C\in c$,∴ β 必过 C 和 a,故 β 与 α 重合,∴ $c\subset\alpha$."丙生的证明非常好!

几何推理每一步必须有公理、定理作为依据,不能凭感觉.

第一节　平面的基本性质

第三讲

立体几何是研究空间图形的，如何用平面图形表示空间图形呢？这就是我们本节课要解决的问题——空间图形的直观图的画法.

教材全解

重点 1　斜二测画法的规则　★

(1)在已知图形中取水平平面，取互相垂直的轴 Ox、Oy，再取 Oz 轴，使 $\angle xOz=90^\circ$，且 $\angle yOz=90^\circ$；

(2)画直观图时，把它们画成对应的轴 $O'x'$、$O'y'$、$O'z'$，使 $\angle x'O'y'=45^\circ$(或 135°)，$\angle x'O'z'=90^\circ$. $x'O'y'$ 所确定的平面表示水平平面.

(3)已知图形中平行于 x 轴、y 轴或 z 轴的线段，在直观图中分别画成平行于 x' 轴、y' 轴或 z' 轴的线段.

(4)已知图形中平行于 x 轴和 z 轴的线段，在直观图中保持长度不变；平行于 y 轴的线段，长度为原来的一半.

(1)①"斜"：互相垂直的 Ox、Oy 轴画线 $O'x'$、$O'y'$ 轴，使 $\angle x'O'y'=45^\circ$ 或 135°.

②"二测"：横不变，纵折半.

(2)画空间图形的直观图，首先画与坐标轴平行的线段(平行性不变)，与坐标轴不平行的线段通过与坐标轴平行的线段确定它的两个端点，然后连结成线段.

(3)为了简便，如果要求不太严格，那么长度和角度可"适当地"选取，只要有一定的立体感就可以了.

[例 1]　画水平放置的等腰梯形 $ABCD$ 的直观图.

思路　画水平放置的平面多边形的直观图，关键是确定多边形的顶点位置. 确定点的位置，一般借助于与坐标轴平行的线段，也可以借助于平面直角坐标系.

画法：(1)在等腰梯形 $ABCD$(图 9-1-24)中，以 AB 为 x 轴，AB 的中点 O 为坐标原点建立直角坐标系 xOy，并画相应的坐标系 $x'O'y'$，使 $\angle x'O'y'=$______.

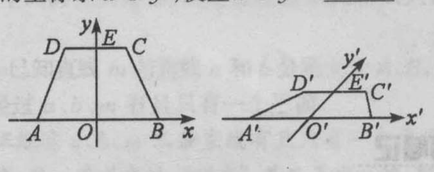


图 9-1-24

(2)以 O' 为中点在 $O'x'$ 轴上取 $A'B'=$______，在 $O'y'$ 轴上取 $O'E'=$______，以 E' 为中点，过 E' 作 $D'C'$ 平行于 x' 轴，并使 $D'C'=$______，连结 $A'D'$、$B'C'$，所得梯形 $A'B'C'D'$ 即为 $ABCD$ 水平放置的直观图.

总结　平面图形用其直观图表示时，一般说来，直线的平行关系不变，点的共线性不变，线的共点性不变，但角的大小有变化(特别是垂直关系发生变化)，有些线段的度量关系也发生变化. 因此，图形的形状发生变化，这种变化，目的是为了使图形富有立体感.

随堂练习

1. 如图 9-1-25 建立坐标系，得到边长为 1 的正 $\triangle ABC$ 的直观图不是全等三角形的一组是　　(　　)

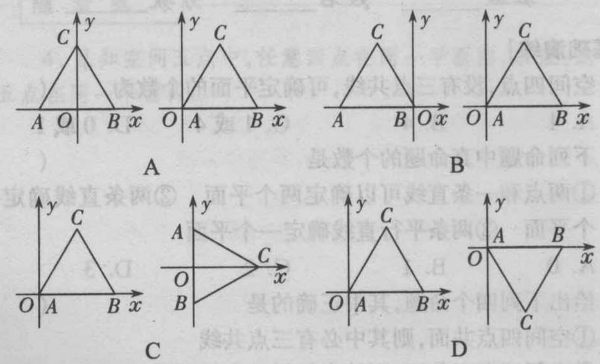


图 9-1-25

[例 2]　如图 9-1-26，$\triangle A'B'C'$ 是水平放置的平面图形的斜二测直观图，将其恢复成原图形.

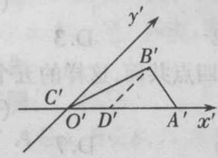


图 9-1-26

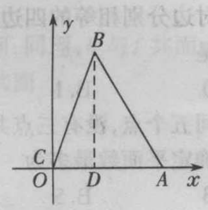


图 9-1-27

思路　本例是逆向作图问题，只需将画法规则颠倒过来即可.

作法：(1)画直角坐标系 xOy，在 x 轴上取 $OA=O'A'$，即 $CA=C'A'$；

(2)在图 9-1-26 中，过 B' 作 $B'D'\parallel y'$ 轴，交 x' 轴于 D'，在 x 轴上取 $OD=O'D'$，在图 9-1-27 中，过 D 作 $DB\parallel y$ 轴，并使 $DB=2D'B'$.

(3)连结 AB、BC，则 $\triangle ABC$ 即为 $\triangle A'B'C'$ 原来的图形，如图 9-1-27.

随堂练习

2. 如图 9-1-28，直观图所表示($A'C'\parallel O'y'$，$B'C'\parallel O'x'$)的平面图形是　　(　　)

A. 正三角形

B. 锐角三角形

C. 钝角三角形

D. 直角三角形

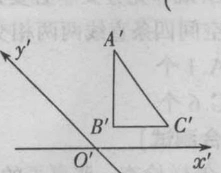


图 9-1-28

重点 2　证明线共点问题　★★

转化为证明点在直线上.

[例 3]　如图 9-1-29，三个平面 α、β、γ 两两相交于三条直线，$\alpha\cap\beta=c$，$\beta\cap\gamma=a$，$\gamma\cap\alpha=b$，若直线 a 和 b 不平行. 求证：a、b、c 三条直线必过同一点.

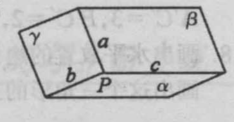


图 9-1-29

思路　先证两线共点，再证此交点在第三条直线上.

证明：$\because\ \alpha\cap\gamma=b,\beta\cap\gamma=a$，

$\therefore\ a\subset\gamma,b\subset\gamma$.

由于________，$\therefore\ a$、b 必相交，

设 $a\cap b=P$，则 $P\in a,P\in b$.

$\because\ a\subset\beta,b\subset\alpha,\therefore\ P\in\beta,P\in\alpha$，则 $P\in$_______.

又 $\alpha\cap\beta=c,\therefore$ _______，即交线 c 经过点 P.

$\therefore\ a$、b、c 三条直线相交于同一点.

思维　证明三条直线交于一点，首先证明其中的两条直线相交于一点，然后再证明第三条直线是经过这两条直线的两个平面的交线，由公理 2 可知两个平面的公共点必在两个平面的交线上，即三条直线交于一点.

随堂练习

3. 如图 9-1-30，已知 $\alpha\cap\beta=l$，梯形 $ABCD$ 两底分别为 AD、BC，如果 $AB\subset\alpha,CD\subset\beta$，求证：$AB$、$CD$、$l$ 交于一点.

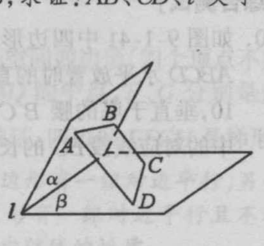


图 9-1-30

研讨应用

[例 4]　(1)画出图 9-1-31(1)中四边形 $OABC$ 的直观图.

(2)如图 9-1-31(2)，已知四边形 $ABCD$ 的水平放置的直观图是一个边长为 2 的正方形 $A'B'C'D'$. 请画出这个四边形的真实图形.

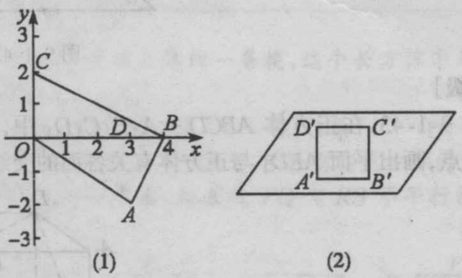


图 9-1-31

有两位同学对这两道题的解答如下，请判断正误.

甲生

(1)如图 9-1-32(1)，作 $\angle C'O'B'=45°$，其中 $O'B'$ 是水平的，$O'B'=4,O'D'=3,O'C'=1$，过 D' 作 $\angle B'D'A'=90°$，作 $A'D'=1$. 顺次连结 $O'A'$、$A'B'$、$B'C'$、$C'O'$，所得四边形 $O'A'B'C'$ 即为 $OABC$ 的直观图.

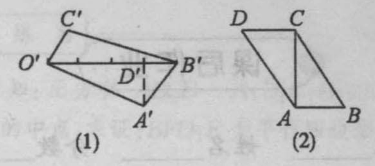


图 9-1-32

乙生

(2)$\because$ 直观图中 $C'D'\parallel A'B',A'B'=C'D'=2,\angle B'A'C'=45°,\therefore$ 真实图形 $ABCD$ 中，$AB\parallel CD,AB=CD=2,\angle BAC=90°,AC=2\sqrt{2}$，由此画出如图 9-1-32(2)所示的真实图形.

要点记忆

斜二测画法规则.(★)

重点：掌握水平放置的空间图形的直观图的画法和线共点问题的证法.

难点：根据直观图想像真实的空间图形.

心得笔记

[例 1]　$45°;AB,\frac{1}{2}OE;DC$

[例 3]　直线 a 和 b 不平行；$\alpha\cap\beta;P\in c$

[研讨应用]　诊断：甲生的错误在于未把 $\angle B'D'A'$ 画成 $135°$；乙生的错误在于将真实图形中 AC 的长 $4\sqrt{2}$ 画成了 $2\sqrt{2}$. 正确的直观图和真实图分别如图 9-1-33 的(1)、(2)所示

返还真实图形时注意逆向思考

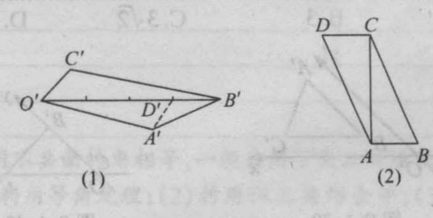


图 9-1-33

课后作业

班级______　姓名______　分数______

[基础演练]

1. 用斜二测法画水平放置的平面图形的直观图，对其中三条线段结论错误的是　(　　)
A. 原来相交的仍相交　　B. 原来垂直的仍垂直
C. 原来平行的仍平行　　D. 原来共点的仍共点

2. 如图 9-1-34，直观图所示的平面图形是　(　　)
A. 任意四边形　　B. 直角梯形
C. 任意梯形　　D. 等腰梯形

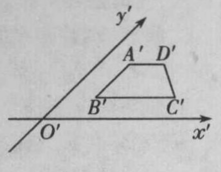


图 9-1-34

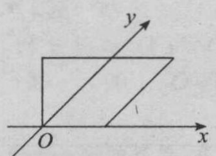


图 9-1-35

3. 如图 9-1-35，所示为一平面图形的直观图，则此平面图形可能是图 9-1-36 中的　(　　)

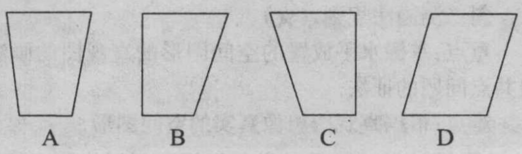


图 9-1-36

4. 如图 9-1-37 为水平放置的正方形 $ABCO$，它在直角坐标系 xOy 中点 B 的坐标为(2,2)，则在用斜二测画法画出的正方形的直观图中，顶点 B' 到 x' 轴的距离为　(　　)
A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$　C. 1　D. $\sqrt{2}$

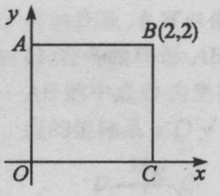


图 9-1-37

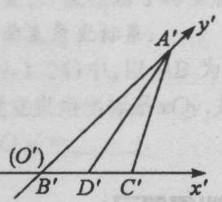


图 9-1-38

5. 如图 9-1-38，$\triangle A'B'C'$ 是水平放置的 $\triangle ABC$ 的直观图，则在 $\triangle ABC$ 的三边及中线 AD 中，最长的线段是　(　　)
A. AB　B. AD　C. BC　D. AC

6. 图 9-1-39 是 $\triangle ABC$ 利用斜二测画法得到的水平放置的直观图 $\triangle A'B'C'$，其中 $A'B' \parallel y'$ 轴，$B'C' \parallel x'$ 轴，若 $\triangle A'B'C'$ 的面积是 3，则 $\triangle ABC$ 的面积是　(　　)
A. 6　B. 3　C. $3\sqrt{2}$　D. $6\sqrt{2}$

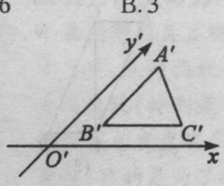


图 9-1-39

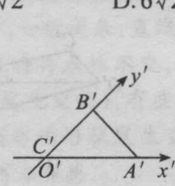


图 9-1-40

7. 水平放置的 $\triangle ABC$ 的斜二测直观图如图 9-1-40 所示，已知 $A'C'=3$，$B'C'=2$，则 AB 边长的中线的实际长度为______.

8. 画出水平放置的边长为 4cm 的正三角形的直观图，并在图中画出这个三角形的三条高.

9. 画长、宽、高分别等于 4cm、3cm、2cm 的长方体的直观图.

[综合测试]

10. 如图 9-1-41 中四边形 $A'B'C'D'$ 是直角梯形，它是四边形 $ABCD$ 水平放置时的直观图，下底 $A'B'=20$，上底 $C'D'=10$，垂直于底的腰 $B'C'=10$. 求 $B'C'$ 在原平面图形 $ABCD$ 中的对应线段 BC 的长度.

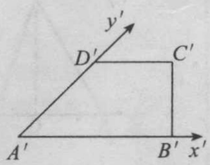


图 9-1-41

11. 如图 9-1-42，设 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A_1B_1C_1$ 不在同一平面内，直线 AA_1、BB_1、CC_1 两两相交，求证：AA_1、BB_1、CC_1 相交于一点.

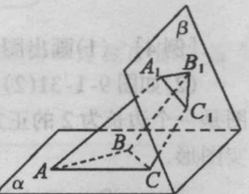


图 9-1-42

[探究升级]

12. 如图 9-1-43，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 CC_1 的中点，画出平面 AED_1 与正方体有关各面的交线.

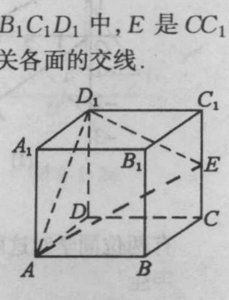


图 9-1-43