高等学校教材

解析几何

（修订本）

吴光磊　丁石孙　姜伯驹　田　畴　程庆民　编

高等教育出版社

高等学校教材

解析几何

（修订本）

吴光磊　丁石孙　姜伯驹　田　畴　程庆民　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是由北京大学数学力学系几何与代数教研室吴光磊、丁石孙、姜伯驹、田畴、程庆民编写的。现在的这一版（第二版），对第一版的内容作了较大的修改。全书内容包括平面直角坐标、直线和圆、常见的平面曲线、坐标变换、二次曲线的一般讨论、向量代数、空间的平面和直线、常见的曲面与曲线、正交变换与仿射变换等九章。可作为综合大学、高等师范学校数学各专业解析几何课程的教材，也可供高等工业学校相近专业选用。

本书于 1962 年出版，恰逢高等教育出版社建社 60 周年，甲午重印，以飨读者。

图书在版编目(CIP)数据

解析几何/吴光磊等编. --2 版(修订本). --北京:高等教育出版社,2014.10
ISBN 978-7-04-040940-6

Ⅰ.①解… Ⅱ.①吴… Ⅲ.①解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.①O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 196173 号

策划编辑 田 玲　责任编辑 田 玲　封面设计 杨立新　版式设计 于 婕
插图绘制 邓 超　责任校对 杨凤玲　责任印制 田 甜

出版发行	高等教育出版社	网　　址	http://www.hep.edu.cn
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号		http://www.hep.com.cn
邮政编码	100120	网上订购	http://www.landraco.com
印　　刷	北京铭成印刷有限公司		http://www.landraco.com.cn
开　　本	850mm×1168mm 1/32		
印　　张	8.75	版　　次	1961 年 7 月第 1 版
字　　数	220 千字		2014 年 10 月第 2 版
购书热线	010-58581118	印　　次	2014 年 10 月第 1 次印刷
咨询电话	400-810-0598	定　　价	18.80 元

物 料 号 40940-00

出版说明

1954年5月,高等教育出版社正式成立。60年来,在教育部领导的关怀下,在数学教育工作者的支持下,高教社出版了众多数学教材,可谓群贤毕至,精品迭出,伴随着青年学子们度过了难忘的大学时光。

由于各种原因,部分优秀教材没有机会再版或重印。这其中有我国第一部高等数学教学大纲的制定者朱公谨先生编写的《高等数学(初稿)》;教材编审委员会主任赵访熊先生主编的《高等数学》;西安交通大学陆庆乐先生主编的《高等数学(基础部分)》;清华大学程紫明主编的《高等数学(基础部分)》;还有项武义先生的《微积分大意》,谷超豪、李大潜、沈玮熙的《应用偏微分方程》,吴大任先生的《微分几何讲义》(修订版),北京大学的《数学分析》及其习题集……这些教材,不仅是数学专家、广大数学教师的教学经验的积累,也是历届数学教材编审委员会的集体智慧的结晶,更是各个时期数学教学改革的成果代表,它们呈现了数学教材建设的真实历史,深深影响了几代人。

虽然这些教材出版时间较早,但从数学学科的发展和教学改革的趋势来看,它们对现在的数学课程教学仍然有一定的借鉴意义。为了使广大读者能够对比各时期高校数学教学要求、教学内容体系的变迁,更好地传承数学的教学思想、教学方法,促进当前数学教学改革,提高教学质量,我们遴选了60年来具有代表性的经典数学教材进行重新印刷。

这套教材的重版,牵动各方专家的关注,凝结了很多前辈的厚

爱和支持。在联系原作著作权人的过程中，西安交通大学马知恩教授、上海交通大学乐经良教授、清华大学盛祥耀教授都给予了我们帮助。已故作者的子女也积极地配合我们工作。高等教育出版社的郭思旭编审从选题到提供样书给予了很大帮助，胡乃冏、徐刚编审提供了部分资料和样书，王雎老师为这套书的封面从选纸到配色做了精美的设计，使得这套教材不仅保持了原有的风貌，更融入了现代元素。

在本套教材的重版编辑过程中，我们克服了重重困难，本着古建筑修复中"整旧如旧"的原则，尽管这套书中提及的有些算法已经不再用了，我们仍然保留了这些部分，以求保持经典教材的原汁原味，仅做了规范方面的微小改动。重温经典，不仅让老专家、老前辈们抚今追昔，也让我们倍感自豪和使命感，我们还会进一步增加重版的品种，奉献给读者更多优秀教材。

由于本套教材的重版在较短时间内完成，虽竭尽全力，疏漏之处在所难免，恳请各位专家和广大读者批评指正。

高等教育出版社

2014 年 4 月

第二版前言

这本书是在去年仓促写成的,有很多不妥之处。出版后,我们收到不少宝贵的意见和中肯的批评。1961—1962学年中,我们试用了这本书,在教学过程中也发现了一些问题。现在根据大家提出的意见和我们教学的经验,部分地改写了本书,并对一些显然的错误作了必要的修改。

本书前五章没有作什么改变。我们认为,在目前中学还没有设置解析几何一课程时,首先让同学通过平面上的直角坐标系来熟悉坐标方法是有好处的。

考虑到教学中的系统性,我们把向量代数与空间的平面与直线分写成两章,并且突出了仿射坐标系的地位。

原书第六章中关于空间曲面的方程一部分现在并入空间曲面与曲线一章,二次曲面的标准方程和图形的讨论作了补充,并加了直纹性的讨论。

最后一章改为正交变换与仿射变换。这样,目标要明确些。对于仿射变换,这次作了比较系统的讨论。考虑到本书前五章的写法,二次曲面的仿射分类较多地用了代数的方法。

我们认为在解析几何的课程中(数学及有关专业)应该包括一些射影几何的内容。但是由于缺乏经验,在这次修改时没有能加进这部分的内容。

限于时间和水平,这一次的修改距离要求还是很远的。我们

希望大家能更多地提出批评和建议。最后,我们对提出意见的同志表示衷心的感谢。

编　者

1962年3月

目 录

第一章

平面直角坐标

在生产实践中，随着活动范围的扩大和对精密度要求的提高，特别是，对描写和掌握运动规律的要求，人们就需要比较精确地刻画一个物体的位置.

刻画一个物体位置的方法就是选取几个物体作为参考，按一定的方法来标明这一物体与它们的相互位置的关系. 在有了一定的度量单位之后，相互位置的关系通常是用数来表示的. 例如，由于航海的需要而产生的地理坐标(经纬度). 又如，为了掌握天体运行的规律或标明天体的位置而产生的各种天文坐标. 就是在日常生活中，我们也常常按这样的方法来确定地点的位置. 下面所讲的平面直角坐标就是一种最常见的，同时也是最自然的一种坐标.

在这一章中，我们将引进平面直角坐标系，并通过平面直角坐标系建立点与数、方程与图形的联系，熟悉这些内容和掌握坐标方法，对学习这门课程将是十分重要的.

§1 平面直角坐标系

在讲平面直角坐标之前，先来看一下我们通常是怎样确定直线上点的位置的. 在直线上，取定一点，记为 O；取一长度的单位；

再取定一个方向. 于是对于直线上任一点 P,就可以按下面的方法来标明它的位置:首先按所取的长度单位量出线段 OP 的长度 $|OP|=x$,如果 P 点不是 O 点,按照从 O 到 P 的方向与选定的方向相同或相反以正数 $+x$ 或负数 $-x$ 来标明 P 点的位置,这个数就称为 P 点的**坐标**. 而 O 点的坐标就是 0. 反之,给定任意一个实数,直线上有唯一的(即有一个且只有一个)点以这个数为坐标. 于是,就给出了直线上点与全体实数之间的一个一一对应. 点 O,长度单位以及选定的方向三者就构成直线上的一个**坐标系**(图 1.1).

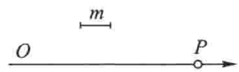

图 1.1

1. 平面上点的坐标

为了确定平面上点的位置,先在平面上取两根互相垂直的并选定了方向的直线,一根叫 x **轴**(或**横轴**),一根叫 y **轴**(或**纵轴**),它们的交点 O 称为**原点**. 于是平面上任意一点 M 的位置便可以这样来确定:由 M 到 x 轴和 y 轴分别作垂线,P、Q 分别是它们的垂足. 设 x 是 P 在 x 轴上的坐标,y 是 Q 在 y 轴上的坐标,不难看出,$|x|$ 就给出了 M 点到 y 轴的距离,x 的符号就说明了它在 y 轴的哪一侧;$|y|$ 就给出了 M 点到 x 轴的距离,y 的符号就说明了它在 x 轴的哪一侧. 因之,M 点的位置便可以数对 (x,y) 来表示(图 1.2). 如此取定的两根互相垂直的且有方向的直线和长度单位称为**平面上的一个直角坐标系**,记为 Oxy;数对 (x,y) 为 M 点的**坐标**,x 为**横坐标**,y 为**纵坐标**.

在平面上取定了直角坐标系以后,平面上的点便与全体有顺序实数对之间建立了一个一一对应关系,也就是说,在给定坐标系下,平面上的任一点唯一地决定一对有顺序的实数,反之,任意给一对有顺序的实数,它也唯一地决定平面上的一个点.

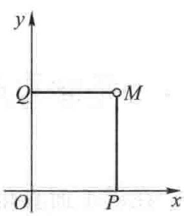

图 1.2

平面上的直角坐标系按 x 轴和 y 轴上选取的方向可以分成两大类:把 x 轴按逆时针方向①绕 O 点转 90°而与 y 轴重合时,如果它们的方向一致,那么这样的坐标系就称为**右手系**(图 1.3),这是一类;否则,就称为左手系,这是另一类(图 1.4).此后我们都用**右手系**.

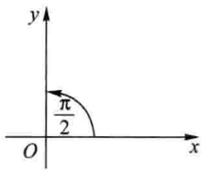

图 1.3

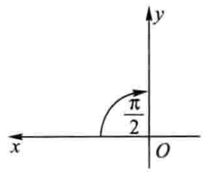

图 1.4

坐标轴把平面分成四部分,称为四个**象限**.按在其中点的坐标的符号为(+,+)、(-,+)、(-,-)、(+,-),分别称它们为第一、第二、第三、第四象限(图 1.5).

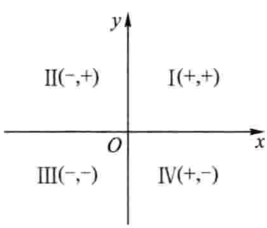

图 1.5

2. 两个简单问题

既然平面上的点的位置完全被它的坐标决定,因而有关点的问题,如两点间的距离,线段上的定比分点应该可以通过点的坐标

① 说"逆时针方向"时,已表示我们取定了平面的一面作为正面,否则这句话没有确定的意义.

来表示. 下面我们就看看这两个简单而基本的问题.

(1) 两点间的距离. 已知两点 M_1、M_2 的坐标分别是 (x_1, y_1), (x_2, y_2). 求 M_1、M_2 之间的距离.

我们先考虑一般的情形, 即线段 M_1M_2 不与坐标轴平行的情形. 过 M_1、M_2 分别作平行于 y 轴、x 轴的两条直线, 它们相交于 $M(x_1, y_2)$. 线段 M_1M_2 是直角三角形 MM_1M_2 的斜边(图 1.6), 由勾股定理得:

$$|M_1M_2|^2 = |MM_1|^2 + |MM_2|^2,$$

由图不难看出:

$$|M_2M| = |x_1 - x_2|, \quad |M_1M| = |y_1 - y_2|.$$

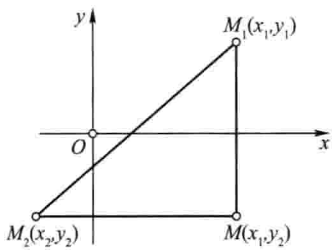

图 1.6

这里取绝对值, 因为线段的长度总不会是负数. 于是

$$\begin{aligned}|M_1M_2|^2 &= |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2,\end{aligned}$$

或者

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}, \tag{1}$$

这就是所求的公式.

例 $M_1(-2, 3)$ 与 $M_2(6, -12)$ 之间的距离为:

$$\begin{aligned}|M_1M_2| &= \sqrt{(-2-6)^2 + [3-(-12)]^2} \\ &= \sqrt{64 + 225} \\ &= 17.\end{aligned}$$

这个公式对于 M_1M_2 平行于 x 轴或 y 轴的情形也是对的. 事实上,如果 M_1M_2 平行于 x 轴,那么 $y_1=y_2$,于是

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_1-x_2)^2} = |x_1-x_2|.$$

平行于 y 轴的情形也一样.

特别地,一点 $M(x,y)$ 到原点的距离 r 就是:

$$r = \sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2} = \sqrt{x^2+y^2}. \tag{2}$$

(2) 线段的定比分点. 已知两点 $M_1(x_1,y_1)$,$M_2(x_2,y_2)$;$M(x,y)$ 是线段 M_1M_2 中的一点,它分线段之比为 $\lambda(\lambda\geqslant 0)$,即

$$\frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda,$$

求 M 点的坐标.

由 M_1、M 和 M_2 分别引 x 轴的垂线,垂足分别是 P_1,P 和 P_2 (图 1.7). 由相似性有

$$\frac{|P_1P|}{|PP_2|} = \frac{|M_1M|}{|MM_2|} = \lambda.$$

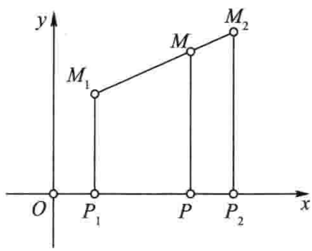

图 1.7

而

$$|P_1P| = |x-x_1|,$$
$$|PP_2| = |x_2-x|,$$

所以,有

$$\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|} = \lambda,$$

同样,也可以得到

$$\frac{|y-y_1|}{|y_2-y|}=\lambda,$$

或者

$$\frac{|x-x_1|}{|x_2-x|}=\lambda,\quad \frac{|y-y_1|}{|y_2-y|}=\lambda. \tag{3}$$

在所考虑的情形下,M_1、M、M_2 是直线上顺次的三个点,因而 $x-x_1$ 与 x_2-x 同号,$y-y_1$ 与 y_2-y 同号,所以(3)中绝对值的符号可以不要,即

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda,\quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=\lambda. \tag{4}$$

从(4)中解出 x 和 y:

$$\begin{cases} x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}. \end{cases} \tag{5}$$

例如,如果 M 是线段的中点,那么 $\lambda=1$,就有

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}. \tag{6}$$

这样的分点通常称为内分点.还有所谓外分点,即点 M 在 M_1 与 M_2 的连线上,但在线段 M_1M_2 之外.对于外分点同样也考虑 $|M_1M|$ 与 $|MM_2|$ 之比.以上的推导中,在(3)以前完全相同,但由(3)到(4)是考虑到 M_1、M、M_2 这三个点的次序,因之在外分点的情形就不同了.这时,考虑三点的次序,不难看出,$x-x_1$ 与 x_2-x 反号,$y-y_1$ 与 y_2-y 也反号.于是代替(4)的应为

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=-\lambda,\quad \frac{y-y_1}{y_2-y}=-\lambda, \tag{4'}$$

其余的推导就一样了.

以上的分析表明:在内分点的情形,由 M_1 到 M 与由 M 到 M_2 的