工业和信息化部“十二五”规划教材

21世纪高等学校
经济管理类规划教材

COMPENDIOUS PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS WITH APPLICATIONS

简明概率论与数理统计及其应用

李昌兴 主编

仝秋娟 冯锋 谢卫强 李立峰 副主编

突出知识重点 凝练核心内容
甄选例题习题 激发学习兴趣
紧贴实际应用 注重创新教育

ECONOMICS AND MANAGEMENT

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

工业和信息化部"十二五"规划教材

COMPENDIOUS PROBABILITY THEORY AND MATHEMATICAL STATISTICS WITH APPLICATIONS

简明概率论与数理统计及其应用

李昌兴 主编

仝秋娟 冯锋 谢卫强 李立峰 副主编

ECONOMICS AND MANAGEMENT

人民邮电出版社

北京

图书在版编目（CIP）数据

简明概率论与数理统计及其应用 / 李昌兴主编. -- 北京 : 人民邮电出版社, 2014.12
21世纪高等学校经济管理类规划教材. 名家精品系列
ISBN 978-7-115-37821-7

Ⅰ. ①简… Ⅱ. ①李… Ⅲ. ①概率论－高等学校－教材②数理统计－高等学校－教材 Ⅳ. ①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第002165号

内 容 提 要

本书根据教育部最新颁布的概率论与数理统计教学基本要求，结合作者多年的教学实践编写而成，书中内容包括：随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析、SPSS 软件在统计分析中的运用. 全书重点着眼于介绍概率论、数理统计的基本概念、基本原理和基本方法，强调直观性，加强可读性，突出基本思想，注重实际应用.

本书可作为高等学校经济管理类、人文社科类和其他非数学类专业概率论与数理统计课程的教材，也可供各类专业技术人员及有志于考研的学生参考.

◆ 主　　编　李昌兴
副 主 编　仝秋娟　冯　锋　谢卫强　李立峰
责任编辑　戴思俊
执行编辑　李　召
责任印制　沈　蓉　彭志环

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
三河市潮河印业有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：14　　2014 年 12 月第 1 版
字数：384 千字　　2014 年 12 月河北第 1 次印刷

定价：34.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前 言 Preface

现实世界广泛存在着内禀的随机性和复杂性，而“概率论与数理统计”正是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科，为人们量化处理随机性问题提供了理论依据和科学方法.“概率论与数理统计”与实际应用结合紧密、面向数据、独具特色，在自然科学、工程技术、认知科学、社会科学、经济和管理科学等领域中获得了广泛的应用，已成为普通高等学校本科各专业普遍开设的一门公共基础课程. 鉴于学科及实际应用发展的新动向，在考虑经济管理和人文社科类各专业教学特点的基础上，我们编写了这部《简明概率论与数理统计及其应用》教材.

在教材编写过程中，认真贯彻落实了教育部“高等教育面向 21 世纪教学内容和课程体系改革计划”及“教育部关于‘十二五’普通高等教育本科教材建设的若干意见”要求和精神，严格执行教育部“数学与统计学教学指导委员会”2009 年修订的工科和管理类“本科数学基础课程（概率论与数理统计）教学基本要求”，努力汲取国内外同类教材之精华，并融入编者近年来教学改革的新成果和新理念. 本书着重突出以下几个特色：对现行教材的内容进行重构，知识模块由大到小、先易后难，做到结构严谨、逻辑清晰、前有孕伏、后有变化、逐步渗透、自然衔接；在基本概念和重要定理引入之前，结合经济学和社会科学等应用背景，提出一些生动有趣且富有启发性的问题，围绕这些问题的产生、发展与解决展开讨论，着重引导学生思考与探索，实现数学知识的返现过程，并力求简明扼要、张弛有度；在学生对基本概念的理解、基本方法的使用、基本技能的训练得到巩固的前提下，适当降低了知识难度，在叙述和论证上做到重点突出、难点分散、化繁为简、淡化抽象的理论推导，简化解题的技巧训练，将教学重点放在学生基本能力的培养与提高等方面；结合经济学和社会科学中的应用，选用的例题和习题更加贴近生活实际，如通过对女士品茶、出行路线的选择、录取者的最低分数、求职面试决策、控制不良贷款等问题的讨论，激发学生的学习兴趣，培养学生的实践能力；此外，为了强化学生创新思维和实践能力的训练，使数学建模思想融入教材，走进课堂，部分章节增设了适量的半开放性和开放性实例.

本书共分 10 章，内容包括随机事件与概率、随机变量及其分布、

多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律和中心极限定理、数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、回归分析与方差分析、SPSS软件在统计分析中的运用. 本书中第3、5章由仝秋娟编写，第4章由冯锋编写，第6、7章由谢卫强编写，第8章由李立峰编写，其余各章由李昌兴编写，最后由李昌兴统纂定稿.

本书可作为经济管理类、人文社科类和其他非数学类专业概率论与数理统计课程的教材，也可供各类专业技术人员及有志于考研的学生参考.

在本书的编写过程中，参阅了大量国内同类教材及相关辅导书，得到了有益的启迪和教益，谨向有关作者表示谢意！

本书虽然经过深思熟虑和反复推敲，但难免一疏，欢迎广大读者批评指正，使本书在教学实践中不断完善.

编　者

2014年9月

目 录 Contents

第1章　随机事件与概率

第2章　随机变量及其分布

第3章 多维随机变量及其分布

第4章 随机变量的数字特征

第5章 大数定律和中心极限定理

第6章 数理统计的基本概念

第7章 参考估计

第8章 假设检验

第9章 回归分析与方差分析

第10章 SPSS软件在统计分析中的运用

附表

参考答案

参考文献

第1章 随机事件与概率

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科，是自然科学、社会科学和思维科学等领域的工作者必备的数学工具．本章主要介绍随机事件、概率的定义、古典概型与几何概型、条件概率以及事件的独立性等内容．

1.1 随机试验、样本空间

1.1.1 随机现象

在自然界和人类的社会生活中常常会出现各种各样的现象，如，一枚硬币向上抛起后必然落地；在标准大气压下，纯净水冷却到 0℃以下时必然会结冰；在相同的大气压与温度条件下，气罐内的分子对罐壁的压力是常数．这类现象的共同特点是在一定条件下，必然会发生某一种结果或者必然不发生某一种结果，这类现象被称为**确定性现象**．另一类现象则不然，如，用同一门炮向同一目标射击，各次弹着点不尽相同，在一次射击之前无法预测弹着点的确切位置．再如，抛一枚硬币，着地时可能出现正面向上，也可能出现反面向上，而在每次抛掷之前，无法确定正面向上还是反面向上，结果呈现出不确定性．但人们经过长期实践并深入研究之后，发现这类现象在大量重复试验或观察下，它的结果呈现出某种规律性．例如，同一门炮向同一目标射击的弹着点按照一定的规律分布，多次重复抛一枚硬币得到正面向上的次数大致占到抛掷总次数的一半等．这种在个别观测中其结果呈现出不确定性，而在大量重复观测中其结果又呈现出规律性的现象称为**随机现象**，这种规律称之为**统计规律**．

1.1.2 随机试验

为研究随机现象的统计规律性而进行的各种科学实验或对事物的某种特征进行的观察统称为试验.一般地，如果一个试验满足下列条件：

（1）每次试验的可能结果不止一个，并且在试验之前能明确试验的所有可能结果；

（2）进行一次试验之前不能预知哪一个结果会出现；

则称这样的试验为**随机试验**，用 E 来表示．如果随机试验在相同的条件下可以重复进行，则称为**可重复的随机试验**，否则，称为**不可重复的随机试验**．

下面举一些随机试验的例子．

E_1：抛一枚硬币，观察正面 H 、反面 T 出现的情况．

E_2：将一枚硬币连续抛两次，观察正面 H 、反面 T 出现的情况．

E_3：将一枚硬币连续抛两次，观察正面 H 出现的次数．

E_4：抛一颗骰子，观察出现的点数．

E_5：记录某城市 119 防灾指挥中心一昼夜接到用户的呼叫次数．

E_6：在一批电子元件中任意抽取一只，测试它的寿命.

E_7.：某人计划去西双版纳旅游，观察在预定的一天能否安全抵达目的地.

E_8：观察某场足球比赛的输赢.

E_9：观察某年国民生产总值的增长率.

试验 $E_1 \sim E_6$ 都是可重复的随机试验，而 $E_7 \sim E_9$ 均是不可重复的随机试验. 可重复的随机试验已得到广泛深入的研究，有一套成熟的理论和方法. 但随着科学技术的进步和社会经济的发展，特别是现代管理和决策分析的需要，对不可重复的随机试验的研究引起了人们的广泛关注. 但本书除了个别章节以外，只讨论可重复的随机试验. 因此，在不引起混淆的情况下，以后把可重复的随机试验简称为随机试验或试验.

1.1.3 样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的，我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的**样本空间**，记为 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为**样本点**.

下面写出上述试验 $E_i\,(i=1,2,3,4,5,6)$ 的样本空间 S_i:

$S_1=\{H,T\}$；

$S_2=\{HH,HT,TH,TT\}$；

$S_3=\{0,1,2\}$；

$S_4=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$S_5=\{0,1,2,3,\cdots\}$；

$S_6=\{t\,|\,t\geqslant 0\}$.

应该注意的是，试验 E_2 和 E_3 的过程都是将一枚硬币连续抛两次，但是由于试验的目的不同，所以样本空间 S_2 和 S_3 截然不同，这说明试验的目的决定着试验所对应的样本空间.

1.2 随机事件

1.2.1 随机事件

在研究随机试验时，人们不仅关心试验的单个样本点，而且常常对试验的某些样本点所组成的集合更感兴趣. 例如，若规定某种电子元件的寿命小于 500 小时为次品，那么对于试验 E_6，我们关心电子元件的寿命是否满足 $t\geqslant 500$（小时)，满足这一条件的样本点组成 S_6 的一个子集 $A=\{t\,|\,t\geqslant 500\}$，并称 A 是试验 E_6 的一个随机事件. 显然，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，有 $t\geqslant 500$（小时)，即电子元件为合格品. 如某次测试结果是电子元件的寿命为 650 小时，便认为 A 在这次试验中发生了.

一般地，称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件**，简称为**事件**[①]. 在一次试验中，当且

① 严格地说，事件是指 S 中的满足某些条件的子集. 当 S 是由有限个元素或由可列个元素组成时，每个子集都可作为一个事件. 当 S 由不可列的无限个元素组成时，某些子集必须排除在外. 幸运的是，这种不容许的子集在实际问题中几乎不会遇到. 本书后面讲到一个事件时都是假定它是容许考虑的那种子集. 读者如有兴趣，可参考较详细的资料.

仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一**事件发生**. 随机事件常用大写字母 A,B,C 等来表示.

下面举出一些随机事件的例子.

例 1.1 在 E_2 中，事件“两次抛硬币均出现正面”，即

$$A_1=\{HH\},$$

事件“两次抛掷中至少出现一次反面”，即

$$A_2=\{HT,TH,TT\},$$

在 E_4 中，事件“出偶数点”，即

$$A_3=\{2,4,6\},$$

在 E_6 中，事件“寿命不超过 700 小时”，即

$$A_4=\{t\mid 0\leqslant t\leqslant 700\}.$$

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 例如，试验 E_1 中有 2 个基本事件 $\{H\}$ 和 $\{T\}$，试验 E_3 中有 3 个基本事件 $\{0\},\{1\},\{2\}$.

样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中都发生，S 称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，而它在每次试验中都不发生，$\varnothing$ 称为**不可能事件**.

1.2.2 事件间的关系与运算

事件是样本空间的子集，所以事件间的关系与运算不外乎是集合与集合间的关系与运算.考虑到相应的概念在概率论中的特殊含义，我们能够对这些关系与运算做概率论方面的解释.

设试验 E 的样本空间为 S，而 A,B,A_k（$k=1,2,\cdots$）是 S 的子集.

（1）事件的包含 如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B\supset A$ 或者 $A\subset B$.

例如，在试验 E_6 中，事件 A 表示“电子元件寿命不超过 300 小时”，事件 B 表示“电子元件寿命不超过 400 小时”，易见 $A\subset B$（或 $B\supset A$）.

（2）事件的相等 如果事件 $A\subset B$ 且事件 $B\subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

（3）和事件 事件 A 与 B 至少有一个发生的事件，称为事件 A 与 B 的和事件，记为 $A\cup B$（或 $A+B$）.

例如，在试验 E_2 中，事件 A 表示“两次都出现正面”，事件 B 表示“两次都出现反面”，则和事件 $A\cup B$ 表示“两次出现同一面”.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$（或 $\sum\limits_{k=1}^{n}A_k$）为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty}A_k$（或 $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}A_k$）为可列个[①]事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的和事件.

（4）积事件 事件 A 与 B 同时发生的事件，称为事件 A 与 B 的积事件，记为 $A\cap B$（或 AB）.

例如，某种圆柱形零件的长度与外径都合格才是合格的，事件 A 表示“长度合格”，B 表示“外径合格”，那么，积事件 $A\cap B$ 表示“产品合格”.

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,\cdots$ 的积事件.

（5）差事件 事件 A 发生而 B 不发生的事件，称为事件 A 与 B 的差事件，记为 $A-B$.

例如，某输油管道长 7km，事件 A 表示“前 4km 正常工作”，事件 B 表示“后 3km 正常工作”，

① 可列个是指无限多个元素可以按照某种次序排成一列. 如自然数有可列无限多个.

那么差事件 $A-B$ 表示“前 4km 正常工作，而后 3km 非正常工作”.

（6）互不相容事件 如果事件 A 与 B 不能同时发生，则称事件 A 与 B 互不相容（或互斥）.

如果 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中任意两个事件是互不相容的，则称这 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容.

如在试验 E_6 中，事件 A 表示“电子元件寿命不超过 200 小时”，事件 B 表示“电子元件寿命至少为 300 小时”，那么，事件 A 与 B 互不相容. 如果事件 C 表示“电子元件寿命超过 200 小时，少于 300 小时”，那么 A、B、C 两两互不相容.

（7）对立事件 如果事件 A 与 B 必有一个发生，且仅有一个发生，则称事件 A 与 B 互为对立事件. 事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

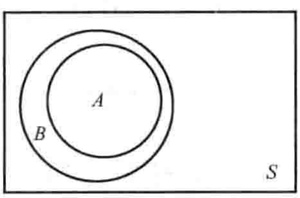
例如，某公司经过一年的市场运作，事件 A 表示“该公司年底结算不盈利”，那么，事件 $\overline{A}$ 表示“公司年底结算亏损”.

（8）完备事件组 如果事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，即 $A_iA_j = \varnothing\,(i \neq j, i, j = 1, 2, \cdots, n)$，且 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = S$，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是样本空间 S 的一个完备事件组或样本空间 S 的一个**划分**.

若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是一个完备事件组，那么，对于每次试验，事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中有一个且只有一个发生.

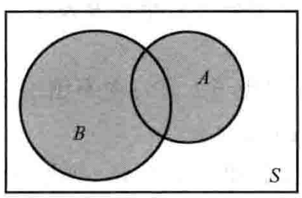
例如，在 E_4 中，E_4 的一组事件 $A_1 = \{1,2,3\}$，$A_2 = \{4,5\}$，$A_3 = \{6\}$ 是 S 的一个划分. 而事件 $B_1 = \{1,2,3\}$，$B_2 = \{3,4,5\}$，$B_3 = \{6\}$ 不是 S 的划分.

用图 1-1～图 1-6 可直观表示上述事件间的关系及运算. 例如，在图 1-1 中，长方形表示样本空间 S，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，事件 B 包含事件 A. 又如在图 1-2 中，长方形表示样本空间 S，圆 A 与圆 B 分别表示事件 A 与事件 B，而阴影部分表示和事件 $A \cup B$.



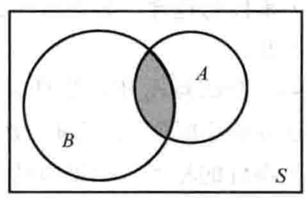
$A \subset B$

图 1-1



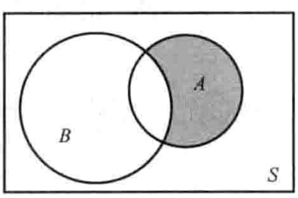
$A \cup B$

图 1-2



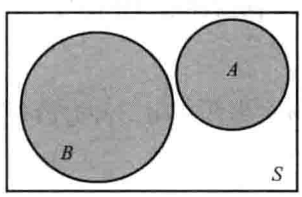
$A \cap B$

图 1-3



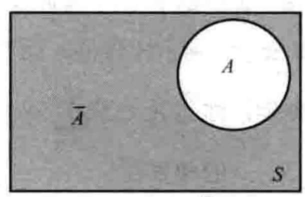
$A-B$

图 1-4



$A \cap B = \Phi$

图 1-5



$A \cup \overline{A} = S$　　$A \cap \overline{A} = \Phi$

图 1-6

在进行事件的运算时，经常要用到下列定律. 设 A, B, C 为事件，则有

交换律：$A \cup B = B \cup A$；$A \cap B = B \cap A$.

结合律：$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$；

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

分配律：$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$；

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

德摩根[①]律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$；$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.2 设试验 E 为抛一枚骰子观察出现的点数，事件 A 表示“出现奇数点”，B 表示“出现点数小于 5”，C 表示“出现点数小于 5 的偶数”. 写出试验的样本空间 S 及事件 $A\cup B$，$A-B$，$A\cap B$，$A\cap C$，$A\cup\overline{C}$，$\overline{A\cup B}$.

解 由题意可知，样本空间 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，且 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，$C=\{2,4\}$. 于是

$A\cup B=\{1,3,5\}\cup\{1,2,3,4\}=\{1,2,3,4,5\}$，　　$A-B=\{1,3,5\}-\{1,2,3,4\}=\{5\}$，

$A\cap B=\{1,3,5\}\cap\{1,2,3,4\}=\{1,3\}$，　　$A\cap C=\{1,3,5\}\cap\{2,4\}=\varnothing$，

$A\cup\overline{C}=\{1,3,5\}\cup\{1,3,5,6\}=\{1,3,5,6\}$，　　$\overline{A\cup B}=S-\{1,2,3,4,5\}=\{6\}$.

例 1.3 从一批产品中每次取一件产品进行检验（每次取出的产品不放回），事件 A_i 表示第 i 次取到合格品（$i=1,2,3$）. 试用 A_1，A_2，A_3 表示下列事件：

（1）三次都取到合格品；

（2）三次中至少有一次取到合格品；

（3）三次中恰有两次取到合格品；

（4）三次中最多有一次取到合格品.

解 用 A,B,C,D 分别表示（1）、（2）、（3）、（4）所述的事件，则有

（1）事件“三次都取到合格品”意味着“第 1 次、第 2 次、第 3 次均取到合格品”，也就是事件“A_1,A_2,A_3 同时发生”，即 $A=A_1A_2A_3$；

（2）事件“三次中至少有一次取到合格品”意味着“第 1 次取到合格品，或第 2 次取到合格品，或第 3 次取到合格品”，也就是“A_1 发生，或 A_2 发生，或者 A_3 发生”，即 $B=A_1\cup A_2\cup A_3$；

（3）事件“三次中恰有两次取到合格品”，但未指明哪两次取到合格品，于是，可以是第 1、2 次恰好取到合格品，或第 2、3 次恰好取到合格品，或第 1、3 次恰好取到合格品. 若第 1、2 次恰好取到合格品，则第 3 次必然取到的是不合格品，因而“三次中第 1、2 次恰好取到合格品”可表示为 $A_1A_2\overline{A_3}$. 类似地，“三次中第 2、3 次恰好取到合格品”可表示为 $\overline{A_1}A_2A_3$，“三次中第 1、3 次恰好取到合格品”可表示为 $A_1\overline{A_2}A_3$. 因此，$C=A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$；

（4）事件“三次中最多有一次取到合格品”意味着“三次中至少有两次取到的是不合格品”，也就是“$\overline{A_1},\overline{A_2},\overline{A_3}$ 至少有两个发生”，即 $D=\overline{A_1}\ \overline{A_2}\cup\overline{A_2}\ \overline{A_3}\cup\overline{A_1}\ \overline{A_3}$.

例 1.4 事件 A_i 表示某射击手第 i 次击中目标（$i=1,2,3$）. 试用文字叙述下列事件：$A_1\cup A_2$；$A_1\cup A_2\cup A_3$；$A_1A_2A_3$；$\overline{A_2}$；A_3-A_2；$A_3\overline{A_2}$；$\overline{A_1\cup A_2}$；$\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$；$\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$；$\overline{A_2A_3}$；$A_1A_2A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$.

解 $A_1\cup A_2$ 表示前两次射击中至少有一次击中目标；

$A_1\cup A_2\cup A_3$ 表示三次射击中至少有一次击中目标；

$A_1A_2A_3$ 表示三次射击都击中目标；

$\overline{A_2}$ 表示第二次未击中目标；

$A_3-A_2=A_3\overline{A_2}$ 表示第三次击中目标而第二次未击中目标；

$\overline{A_1\cup A_2}=\overline{A_1}\cap\overline{A_2}$ 表示前两次都未击中目标；

$\overline{A_2}\cup\overline{A_3}=\overline{A_2A_3}$ 表示第二次、第三次射击中至少有一次未击中目标；

$A_1A_2A_3\cup A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$ 表示三次射击中至少有两次击中目标.

---

① 德·摩根（De Morgan，1806—1871），19 世纪有相当的影响力的数学家，主要在分析学、代数学、数学史及逻辑学等方面作出重要的贡献.

1.3 随机事件的概率

除了必然事件和不可能事件外，任意一个事件在一次试验中可能发生，也可能不发生. 我们希望找到一个恰当的数字刻画事件在一次试验中发生的可能性的大小.

1.3.1 事件的频率

对于随机事件而言，虽然在一次实验中是否发生不能预先确定，但是如果我们独立地重复进行这一试验，就会发现不同的事件发生的可能性的大小不尽相同. 这种可能性的大小是事件本身固有的一种属性，不依赖于人的意志而发生转化. 为了定量描述随机事件的这种属性，下面先介绍频率的概念.

定义 1.1 在相同的条件下将试验重复进行 n 次，在这 n 次试验中，事件 A 发生了 n_A 次，n_A 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频数**，而比值 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频率**.

根据定义，易知频率具有如下性质:

（1）对任意的事件 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

（2）对于必然事件 S，$f_n(S)=1$；

（3）若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).$$

即，两两互不相容事件和的频率等于每个事件频率之和.

由于事件 A 的频率是它发生的次数与试验次数之比 $\dfrac{n_A}{n}$ 的大小，它表示事件 A 发生的频繁程度. 频率越大，事件 A 的发生就越频繁，这就意味着 A 在一次试验中发生的可能性越大. 因此，直观的想法就是用事件 A 的频率表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小，但是否可行呢？先考察下面的例子.

例 1.5 抛一枚质地均匀的硬币试验. 将一枚硬币抛掷 10 次、100 次、1000 次，各做 10 遍. 统计数据如表 1-1 所示（n 表示抛硬币的次数，n_H 表示出现正面的次数，$f_n(H)$ 表示出现正面的频率).

表 1-1

实验序号	$n=10$		$n=100$		$n=1000$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	4	0.4	58	0.58	503	0.503
2	5	0.5	48	0.48	496	0.496
3	3	0.3	55	0.55	482	0.482
4	6	0.6	52	0.52	518	0.518
5	7	0.7	46	0.46	498	0.498
6	6	0.6	42	0.42	516	0.516
7	5	0.5	51	0.51	495	0.495
8	2	0.2	57	0.57	527	0.527
9	9	0.9	45	0.45	476	0.476
10	5	0.5	53	0.53	503	0.503

这种试验历史上有人做过，统计数据如表 1-2 所示.

表 1-2

试验者	n	n_H	$f_n(H)$	$\lvert f_n(H)-0.5\rvert$
德·摩根	2048	1061	0.518 1	0.018 1
蒲丰[①]	4040	2048	0.506 9	0.006 9
威廉·费勒[②]	10 000	4979	0.497 9	0.002 1
皮尔逊[③]	12 000	6019	0.501 6	0.001 6
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5	0.000 5
维尼	30 000	14 994	0.499 8	0.000 2

从上述数据可以看出，抛硬币的次数n较小时，出现正面的频率$f_n(H)$在 0 与 1 之间波动，而且波动幅度较大. 但随着n的增大，频率$f_n(H)$呈现出稳定性，即当n逐渐增大时，$f_n(H)$总在 0.5 的附近摆动，而摆动的幅度越来越小，也就是$f_n(H)$逐渐稳定于 0.5.

例 1.6 考察英语中特定字母出现的频率. 当观察字母个数n（试验次数）较小时，频率具有较大幅度的随机波动. 但当n增大时，频率呈现出稳定性. 表 1-3 就是一份英文字母的统计表[④].

表 1-3

字母	频率	字母	频率	字母	频率	字母	频率
A	0.078 8	B	0.015 6	C	0.026 8	D	0.038 9
E	0.126 8	F	0.025 6	G	0.018 7	H	0.057 3
I	0.070 7	J	0.001 0	K	0.006 0	L	0.039 4
M	0.024 4	N	0.070 6	O	0.077 6	P	0.018 6
Q	0.000 9	R	0.059 4	S	0.063 4	T	0.098 7
U	0.028 0	V	0.010 2	W	0.021 4	X	0.001 6
Y	0.020 2	Z	0.000 6				

大量的实验证实：当重复试验次数n逐渐增大时，频率$f_n(A)$呈现出稳定性，逐渐稳定于某个常数. 这种“频率稳定性”即通常所说的统计规律性，它揭示了隐藏在随机现象中的规律. 重复试验大量的次数，计算$f_n(A)$，以它刻画事件A发生的可能性的大小是相对合适的.

但是，在实际问题中，不可能也没有必要对每一个事件做大量的试验，从中求得事件的频率，用以刻画事件发生可能性的大小. 同时，为了理论研究的需要，从频率的稳定性和性质得到启发，给出刻画事件发生可能性大小的概率的定义.

1.3.2 事件的概率

定义 1.2 设E为随机试验，S是它的样本空间. 对于E中的每一个事件赋予一个实数，记为$P(A)$，称为事件A的概率. 如果集合函数$P(\cdot)$满足下列条件：

（1）**非负性**：对E中的每一个事件A，有$P(A)\geqslant 0$；

（2）**规范性**：对于必然事件，有$P(S)=1$；

① 蒲丰（Buffon，1707—1788），法国数学家、自然科学家，几何概率的开创者.
② 威廉·费勒（William Feller，1907—1970），克罗地亚裔美国数学家，20 世纪最伟大的概率学家之一.
③ 皮尔逊（Pearson，1857—1936），英国数学家、哲学家，现代统计学的创始人之一，被尊称为统计学之父.
④ Dewey. G. 统计了约 438 023 个英语单词中各字母出现的频率.

（3）**可列可加性**：设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $A_iA_j = \varnothing$，$i \neq j$，$i, j = 1, 2, 3, \cdots$，有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) + \cdots.$$

第 5 章中的伯努利[①]大数定理将阐明：当试验次数 n 充分大时，事件 A 的频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于事件 A 的概率 $P(A)$．基于这一事实，我们有理由用概率 $P(A)$ 来度量 A 在一次试验中发生的可能性大小．

由概率的定义可以推出概率具有以下性质．

性质 1　$P(\varnothing) = 0$．

证　令 $A_n = \varnothing\ (n = 1, 2, 3, \cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \varnothing$，且 $A_iA_j = \varnothing$，$i \neq j$，$i, j = 1, 2, 3, \cdots$，由概率的可列可加性，得

$$P(\varnothing) = P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(\varnothing).$$

再由概率的非负性可知，$P(\varnothing) \geqslant 0$，故由上式知，$P(\varnothing) = 0$．

性质 2　（**可加性**）若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

证　令 $A_k = \varnothing\ (k = n+1, n+2, n+3, \cdots)$，则有 $A_iA_j = \varnothing$，$i \neq j$，$i, j = 1, 2, 3, \cdots$，由概率的可列可加性，得

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) &= P(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} P(A_k) \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \end{aligned}$$

性质 2 得证．

性质 3　设 A，B 是两个事件，且 $A \subset B$，则有 $P(B - A) = P(B) - P(A)$，$P(A) \leqslant P(B)$．

证　由 $A \subset B$（参见图 1-1），得 $B = A \cup (B - A)$，且 $A \cap (B - A) = \varnothing$，再由性质 2，得

$$P(B) = P(A) + P(B - A),$$

即

$$P(B - A) = P(B) - P(A).$$

又由概率的非负性知 $P(B - A) \geqslant 0$，从而，$P(A) \leqslant P(B)$．

性质 4　对任意一事件 A，有 $P(A) \leqslant 1$．

证　因为 $A \subset S$，由性质 3，得

$$P(A) \leqslant P(S) = 1.$$

性质 5　对任意一事件 A，有 $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$．

证　因为 $A \cup \overline{A} = S$，$A \cap \overline{A} = \varnothing$，由性质 2，得

$$1 = P(S) = P(A \cup \overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}).$$

移项整理得所证的性质 5．

性质 6　（**加法公式**）对任意两个事件 A，B，有 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$．

证　由等式（参见图 1-2）$A \cup B = A \cup (B - AB)$，且有 $A(B - AB) = \varnothing$，$AB \subset B$，故由性质 2 及性质 3，得

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B - AB) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

---

① 伯努利（Jacob Bernoulli，1654—1705），瑞士数学家，极坐标和大数定律的创始人．

性质6可以推广到多个事件．例如，设 A_1, A_2, A_3 为任意三个事件，则有

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1A_2) - P(A_2A_3) - P(A_1A_3) + P(A_1A_2A_3).$$

一般地，对于任意 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，由数学归纳法可证：

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1A_2 \cdots A_n).$$

例 1.7 已知 $P(\bar{A}) = 0.5$，$P(\bar{A}B) = 0.2$，$P(B) = 0.4$，试求 $P(AB)$，$P(A-B)$，$P(A \cup B)$，$P(\bar{A}\bar{B})$.

解 由于 $P(\bar{A}B) = P(B) - P(AB)$，所以

$$P(AB) = P(B) - P(\bar{A}B) = 0.4 - 0.2 = 0.2.$$

而

$$P(A-B) = P(A) - P(AB) = [1 - P(\bar{A})] - P(AB) = (1-0.5) - 0.2 = 0.3,$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0.5 + 0.4 - 0.2 = 0.7,$$

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.7 = 0.3.$$

1.4 古典概型与几何概型

1.4.1 古典概型

考察一类简单的随机试验，它们具有以下两个特点：

（1）试验的样本空间只包含有限个样本点，即 $S = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$；

（2）试验中每个基本事件发生的可能性相同，即 $P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \cdots = P(\{e_n\})$.

具有上述两个特点的试验是大量存在的，这种试验称为**古典概率概型**，简称**古典概型**．它是概率论发展初期的主要研究对象，古典概型的一些概念具有直观、易于理解的特点，并有着广泛的应用．

对于古典概率模型，由于基本事件两两互不相容，因此

$$\begin{aligned} 1 = P(S) &= P(\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \cdots \cup \{e_n\}) \\ &= P(\{e_1\}) + P(\{e_2\}) + \cdots + P(\{e_n\}) = nP(\{e_i\}), \end{aligned}$$

从而

$$P(\{e_i\}) = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

如果事件 A 包含 k 个样本点，即 $A = \{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_k}\}$，其中 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 中某 k 个不同的数，则有

$$P(A) = P(\{e_{i_1}\}) + P(\{e_{i_2}\}) + \cdots + P(\{e_{i_k}\}) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{中包含基本事件的总数}}{S\text{中包含基本事件的总数}}.$$

令 V_S 表示样本空间中基本事件的总数，V_A 表示事件 A 中包含的基本事件的总数，即有

$$P(A) = \frac{V_A}{V_S}. \tag{1.1}$$

这就是在古典概率模型中，事件 A 的概率计算公式①，其公式表明事件 A 的概率等于 A 中包含样本点的总数在样本空间的全部样本点总数中所占的比例．

① 易知式（1.1）所确定的概率满足非负性、规范性和可列可加性．但此时由于 S 中只含有有限个子集，因而，若在 S 中取可列个两两互不相容的事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$，则其中必包含无限多个不可能事件，即可列可加性和可加性是等价的．