



普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学

第三版

G

孟 军◎主编

AODENG SHUXUE

普通高等教育农业部“十二五”规划教材
全国高等农林院校“十二五”规划教材

高等数学

第三版

孟军 主编

中国农业出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高等数学 / 孟军主编. —3 版. —北京: 中国农业出版社, 2013. 7

普通高等教育农业部“十二五”规划教材 全国高等农林院校“十二五”规划教材

ISBN 978-7-109-17876-2

I. ①高… II. ①孟… III. ①高等数学-高等学校-教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 095942 号

中国农业出版社出版
(北京市朝阳区农展馆北路 2 号)
(邮政编码 100125)
策划编辑 朱 雷 魏明龙
文字编辑 魏明龙

北京中兴印刷有限公司印刷 新华书店北京发行所发行

2013 年 7 月第 3 版

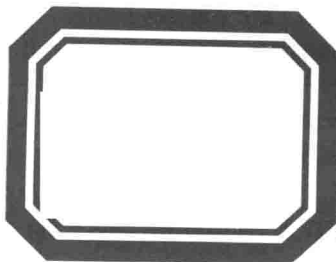
北京第 1 次印刷

1/16 印张: 17.75

15 千字

2.00 元

错误, 请向出版社发行部调换)





内 容 提 要

本教材是普通高等教育农业部“十二五”规划教材,教材的编写以培养学生的数学意识和能力为教学的出发点,加强学生创造性思维的训练,并结合 Mathematica 软件,在每一章的后面增加了数学实验.本教材的主要内容包括:极限、函数的连续、导数、微分、积分、多元函数微分、二重积分、微分方程、级数、预备知识和 Mathematica 软件的使用.全书取材广泛,大部分应用实例皆来自于生产实践.在每章的后面还附有与微积分发展有关的数学家的经典故事,以扩大知识面,增加学习兴趣.

本教材可作为农林院校生命科学和经济类本专科学学生的学习教材,也可作为研究生、教师和科技人员的学习参考书.

第三版编写人员

主 编 孟 军

副主编 张亚卓 郭雅丽 王 佳

编 者 孟 军 张亚卓 郭雅丽 王 佳

主 审 葛家麒

第二版编写人员

主 编 孟 军 朱荣胜
副主编 李放歌 汤 岩
编 者 孟 军 朱荣胜 李放歌 汤 岩
徐 丹 焦 扬 杜 晶 刘 慧
主 审 葛家麒

第一版编写人员

主 编 孟 军
副主编 葛家麒 尹海东
编 者 郑 煜 于晓秋
主 审 王凯捷

第三版前言

本教材是面向 21 世纪课程教材《高等数学》的第三版，同时也是普通高等教育农业部“十二五”规划教材。前两版教材在使用过程中已充分得到了读者的认可，但同时我们也发现并认识到一些需要改进和完善的地方。因此，我们对第二版教材进行这次修订。

本次修订保持了教材原有的风格，仅对一些细节作出了修订，具体修订内容如下：

1. 调整了部分章节间或章节内的顺序；
2. 在相应章节中删减了经济问题中的弹性分析；
3. 在积分章节增加了积分上限函数及相关内容，使此部分更加完善；
4. 在微分方程章节中增加了部分微分方程模型；
5. 在相应章节增加了部分农业、生命和经济等方面的习题；
6. 增减了各章节的部分例题和习题；
7. 增加部分章节的习题答案；
8. 将数学软件 Mathematica 的版本升级为 Mathematica7.0，在此版本环境下，对软件简介部分进行了部分修订，并完善了各章的实验部分；
9. 在附录中增加了预备知识，其中包括常用的数学公式以及常用几何图形的面积和体积公式；
10. 对书中部分图形进行了修改。

本教材的编写修订工作如下：东北农业大学孟军教授负责提出全书编写及修订的总体思路及全部书稿审阅，郭雅丽负责第一章、第二章、第三章、第四章；张亚卓负责第五章、第六章、第七章；王佳负责第八章、第九章、第十章；张亚卓和王佳负责编写附录。全书由葛家麒教授主审。

本教材在编写修订过程中，得到了东北农业大学理学院数学系全体教师的热心帮助和大力支持，他们对本教材提出了中肯而又宝贵的意见；本教材在出版过程中得到了东北农业大学教务处和校级领导的大力支持，在此表示由衷的感谢。

编者

2013 年 3 月于哈尔滨

第一版前言

该教材是教育部“面向 21 世纪高等农林教育教学内容和课程体系改革计划”项目的成果。

江泽民同志指出：“创新是一个民族进步的灵魂，是国家兴旺发达之不竭动力。”人类社会已进入知识经济时代，生产的发展已不是由资本的积累和生产规模的扩大所决定的，主要决定于知识的创新。一个民族在未来社会中的地位也将主要依赖于它拥有的创新人才的数量和质量。因此，在《中华人民共和国高等教育法》中把培养具有创新精神的高级专门人才作为高等教育的主要任务之一。作为农业高等院校基础课之一的数学系列课的教学改革也以创新人才的培养为目标。

随着计算机技术的普及和应用，数学在各门科学中的应用也日益广泛。当前数学科学已和自然科学、社会科学并列为基础科学的三大领域。对于非数学专业学生数学素质的要求已不是具有较深厚的数学理论知识和较强的推理证明能力，而是要求具有应用数学方法，借助于计算机技术解决实际问题的意识和能力。因此，数学系列课程教学改革的基本方向为：以培养学生用数学的意识和能力为出发点，使学生具有宽广的数学基础知识，掌握常用的数学方法，了解数学的前沿发展方向，具有一定的数学建模能力，并能在计算机上完成对所建模型的求解，掌握数学的思维方式，为学生创造潜能的发挥打下基础。本书就是为了适应这个教学改革的需求而编写的。本书在编写上有如下特点：

一、在结构上，本着不影响微积分基本学习体系的情况下，大胆变革。淡化对极限数学定义的讲解和证明，只要求学生在思想上理解极限的概念；需要的定理只是直接给出结论和必要的说明，并不给出定理的证明；弱化对学生解题技巧的培养；增加导数、定积分和微分方程的数值解法，加强学生对离散问题的感性认识；将不定积分和定积分合为一章，增加定积分应用一章，将空间解析几何和多元函数内容合二为一。

二、加强对高等数学实际应用的讲解。书中所举例题的大部分都是实际应用的例子，也有些是数学应用的经典例子（如 Logistic 方程、库柏-道格拉斯生产函数等）。这样使学生在学完基本的数学知识后，不但知道所学的数学知识有什么用，而且还知道怎样用。同时在书后的习题中配有大量数学应用方面的习题，学生在掌握好书本上的基础知识之后，可以通过完成课后习题，在巩固基础知识的同时，使学生用数学的能力得到培养，从而激发了学生的创造潜能。

三、在适当的地方增加一些现代数学发展前沿知识的介绍,如分形理论、微分方程的定性理论、边际效益分析等,使学生在学高等数学基础知识的同时,对现代数学发展的最新方向有所了解,增强学生的学习兴趣,扩大学生的视野,激发学生对数学知识的探索欲。

四、结合国际通用的数学软件 Mathematica,在每一章的后面都增加了演示与实验,这是符合面向 21 世纪高等院校数学教学改革要求的。通过数学实验,使学生知道怎样在计算机上实现数学的推导、计算,怎样将自己的想法通过计算机去完成;同时由于计算机的引入,很多在计算机上可以简单实现的推导、计算和画图,在理论课教学中可以淡化,从而可以有更多的学时去丰富讲课内容。

五、在每一章的后面介绍了与微积分发展有关的数学家的生平典故,使学生在学数学知识的同时了解微积分的发展史,增加数学课上的人文氛围,加强数学文化的熏陶,进而提高学生的数学素质。

本书为高等农林院校经济类和生命科学类学生编写,书中所举的大部分例子也都围绕着这两方面取材。本书适用的教学时数在 80~120 学时之间。教师可根据自己学校不同情况,对书中的内容进行适当的删减。近几年来,数学建模在全国大专院校中蓬勃兴起,也逐渐成为数学教学的重要内容。本书在对实际问题进行举例分析时,就已经把数学建模的思想和方法潜移默化地传授给学生,但书中所举的例子还是比较简单的,教师可根据学生的学习兴趣增加一些较复杂的数学建模实例。书中的数学实验是为了配合高等数学教学而设置,所以课后的演示与实验还是比较简单的,只是要求能用 Mathematica 进行有关高等数学的运算,更深层次的数学实验本书并未涉及,有兴趣的读者也可自己阅读有关书籍。

本书的编写分工如下:东北农业大学孟军教师负责提出全书编写的总体思路,并编写第五章、第六章、第七章、第八章;葛家麒负责第一章、第二章、第三章;尹海东负责编写第四章、第九章、第十章;东北林业大学的郑煜负责编写附录及每章的数学实验;黑龙江省八一农垦大学的于晓秋负责编写每章后面的数学家的故事。全书由王凯捷主审。

本书在编写过程中得到东北农业大学数学教研室全体教师的热心帮助,在东北农业大学试用 1 年,任课教师对本书提出了很多中肯而又宝贵的意见;本书在出版的过程中得到了东北农业大学教材科任喜英科长和教务处及校领导的大力支持,在此表示感谢。

编者

2001 年 5 月于哈尔滨

第 二 版 前 言

本书是面向 21 世纪课程教材《高等数学》的第二版。原教材经过 6 年的使用已充分得到了读者的认可，但同时我们也发现并认识到一些需要改进和完善的地方，故此，我们对原教材进行修订。

本次修订保持了教材原有的风格，仅对一些细节作出了改动，具体修改内容如下：

1. 完善了每章的实验部分；
2. 调整了部分章节间或章节内的顺序；
3. 增减了部分例题和习题；
4. 增加了习题答案；
5. 重新编写了软件简介部分；
6. 对书中部分图形进行了修改。

修订工作由孟军教授总体筹划，具体为朱荣胜负责第七章、第九章和第十章以及附录的修订，李放歌负责第五章、第六章和第八章的修订，汤岩负责第一章、第二章、第三章及第四章的修订。杜晶、刘慧、徐丹完成了全书习题的答案，焦扬对书中部分图形进行了修订。全书由葛家麒教授审阅。

本书在修订过程中得到东北农业大学理学院信息与计算科学系全体教师的大力支持，在此表示由衷的感谢。

编 者

2007 年 6 月于哈尔滨

目 录

第三版前言	
第一版前言	
第二版前言	

第一章 函数	1
§ 1.1 函数的概念及特性	1
一、函数的概念	1
二、函数的几种特性	3
三、反函数	4
四、复合函数	5
§ 1.2 初等函数	6
一、基本初等函数	6
二、初等函数	6
习题一	7
演示与实验一	8
实验习题一	12
数学家的故事	13
第二章 极限与连续	14
§ 2.1 数列的极限	14
§ 2.2 函数的极限	18
一、当 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限	18
二、当 $x \rightarrow \infty$ 时函数的极限	19
§ 2.3 极限的运算法则与性质	20
一、极限的运算法则	20
二、两个重要极限	21
§ 2.4 无穷大量与无穷小量	24
一、无穷大量	24
二、无穷小量	25
三、无穷小的比较	25
四、渐近线	27
§ 2.5 函数的连续性	27
一、连续与间断的直观描述	27

二、连续的定义	28
三、函数的间断点	29
四、初等函数的连续性	30
五、闭区间上连续函数的性质	31
习题二	33
演示与实验二	35
实验习题二	36
数学家的故事	37
第三章 导数与微分	38
§ 3.1 导数的概念	38
一、导数的概念	38
二、可导性与连续性	43
§ 3.2 求导法则	43
一、函数和、差、积、商的求导法则	43
二、反函数求导法则	45
三、基本求导公式	46
四、复合函数求导法则	46
五、隐函数求导法则	47
六、对数求导法	48
七、导数的实际意义	49
八、相关变化率	50
§ 3.3 高阶导数	51
§ 3.4 微分及其应用	53
一、微分的概念	53
二、微分的运算	54
三、微分的应用	56
习题三	58
演示与实验三	61
实验习题三	63
数学家的故事	63
第四章 中值定理与导数应用	65
§ 4.1 中值定理	65
§ 4.2 洛必达法则	68
一、洛必达法则	68
二、其他类型未定式的计算	71
§ 4.3 导数在几何上的应用	72
一、函数的单调性	72
二、函数的极值与最值	73
三、函数的凸凹性和拐点	75

※ § 4.4 经济学中的最值问题	76
一、边际分析	76
二、税收问题	77
§ 4.5 导数在其他问题中的应用	79
习题四	80
演示与实验四	81
实验习题四	83
数学家的故事	83
第五章 积分	85
§ 5.1 定积分的概念	85
一、变速直线运动位移的计算	85
二、曲边梯形面积的计算	86
三、定积分的定义	87
四、定积分的基本性质	88
§ 5.2 定积分基本定理	89
一、原函数的定义	89
二、积分上限的函数及其导数	90
三、微积分基本定理	92
§ 5.3 不定积分	93
一、不定积分的定义及性质	93
二、不定积分的几何意义	94
§ 5.4 不定积分的计算	95
一、不定积分计算的基本公式	95
二、不定积分计算的基本方法	95
§ 5.5 定积分的计算	105
一、定积分直接积分法	105
二、定积分换元积分法	105
三、定积分分部积分法	107
§ 5.6 无穷限积分	108
※ § 5.7 定积分的近似计算	109
一、梯形法	110
二、辛普生(Simpson)法	112
习题五	115
演示与实验五	116
实验习题五	118
数学家的故事	118
第六章 定积分的应用	120
§ 6.1 定积分应用的基本思想方法	120
一、黎曼和	120

二、微元法	121
§ 6.2 平面图形的面积	123
一、直角坐标情形	123
二、极坐标情形	126
§ 6.3 立体的体积	128
一、旋转体的体积	128
二、平行截面面积为已知的立体的体积	129
* § 6.4 社会科学中的应用	130
一、函数平均值	130
二、在经济学中的应用	132
三、学习曲线模型	136
四、生物上的应用	136
习题六	137
演示与实验六	139
实验习题六	141
数学家的故事	141
第七章 多元函数微分学	143
§ 7.1 多元函数的基本概念	143
一、引例	143
二、多元函数	143
三、二元函数的几何表示	144
四、极限与连续	150
§ 7.2 偏导数与全微分	151
一、偏导数	152
二、高阶偏导数	153
三、全微分	154
§ 7.3 复合函数与隐函数求导法	155
一、复合函数偏导数的链式法则	155
二、隐函数求导法	156
§ 7.4 二元函数的极值	158
一、(无)条件极值的概念	158
二、无条件极值	158
三、条件极值	160
* § 7.5 多元微分的应用	162
一、用偏导数作经济边际分析	162
二、经济函数优化问题	163
习题七	166
演示与实验七	167
实验习题七	172
数学家的故事	173

第八章 二重积分	175
§ 8.1 二重积分的概念与性质	175
一、二重积分的概念	175
二、二重积分的性质	176
§ 8.2 二重积分的计算	176
一、在直角坐标系中计算二重积分	176
二、在极坐标系中计算二重积分	180
习题八	182
演示与实验八	183
实验习题八	184
数学家的故事	184
第九章 微分方程及其应用	187
§ 9.1 微分方程及其相关概念	187
§ 9.2 微分方程的解析解	189
一、直接积分法	189
二、变量代换法	191
三、猜测法	193
§ 9.3 微分方程的应用	197
一、自由落体运动模型	197
二、物体冷却的数学模型	198
三、衰变问题模型	199
四、指数增长模型与阻滞增长模型	200
五、经典数学模型在其他领域中的应用	202
※ § 9.4 定性理论初步	203
一、方向场	204
二、一阶方程的平衡点及稳定性	205
※ § 9.5 微分方程的数值解法	206
一、欧拉法	206
二、改进的欧拉方法	207
习题九	208
演示与实验九	210
实验习题九	211
数学家的故事	212
第十章 无穷级数	214
§ 10.1 无穷级数及其性质	214
§ 10.2 常数项级数的敛散性	217
一、正项级数敛散性的判别	217
二、交错级数的敛散性	219

§ 10.3 幂级数及其运算	220
一、收敛域的概念	220
二、幂级数的概念及敛散性	221
三、幂级数的运算	223
§ 10.4 幂级数展开	224
§ 10.5 幂级数的应用举例	226
习题十	228
演示与实验十	229
实验习题十	234
数学家的故事	234
附录一 部分习题参考答案	237
附录二 预备知识	248
附录三 Mathematica 软件使用简介	251
参考文献	266



第一章 函 数

函数是对现实世界中各种变量之间的相互依存关系的一种抽象,是客观世界中表达自然规律的基本概念.17世纪初,人们首先从对运动(如天文、航海等)的研究中引出了函数这个基本概念.在那以后的300多年里,这个概念在几乎所有的科学研究工作中占据了重要位置.

§ 1.1 函数的概念及特性

一、函数的概念

1. 区间与邻域

区间是高等数学中使用较多的数集.设 a 和 b 都是实数,且 $a < b$,数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为**开区间**,记为 (a, b) ;数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为**闭区间**,记为 $[a, b]$;数集 $\{x | a < x \leq b\}$ 或 $\{x | a \leq x < b\}$ 称为**半开区间**,分别记为 $(a, b]$ 或 $[a, b)$,其中 a 和 b 叫做区间的端点, $b - a$ 叫做区间的长度.除了上述有限区间外,还有无限区间,即数集

$$\{x | a \leq x < +\infty\}, \{x | -\infty < x \leq b\}, \{x | a < x < +\infty\} \text{ 或 } \{x | -\infty < x < b\}$$

称为**无限区间**,分别记为 $[a, +\infty)$ 、 $(-\infty, b]$ 、 $(a, +\infty)$ 或 $(-\infty, b)$;数集 $\{x | -\infty < x < +\infty\}$ 表示全体实数,记为 $(-\infty, +\infty)$.

设 a 和 δ 是两个实数,且 $\delta > 0$,数集 $\{x | |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的 **δ 邻域**,其中点 a 叫做邻域的**中心**, δ 叫做邻域的**半径**,此绝对值不等式也可记为

$$a - \delta < x < a + \delta,$$

所以邻域也可以用开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 表示,即点 a 的 δ 邻域,就是以点 a 为中心,长度为 2δ 的开区间.

2. 函数的概念

在观察各种自然现象时,常常会遇到各种不同的量.其中有的量保持一定的数值,这种量叫**常量**;还有一些量可以取不同的数值,这种量叫**变量**.例如,在一个自由落体运动中,重力加速度是不变的,是常量,而物体与地面之间的距离或者物体运动的速度都是变化的,是变量.常量常用 a 、 b 、 c 等表示,而变量常用 x 、 y 、 z 等表示.

在同一问题的变化过程中,往往同时有几个变量,并且它们之间不是孤立的,而是相互联系的,且遵循着一定的变化规律.如圆的面积 S 与圆的半径 r 是两个变量,它们之间存在着下列关系:

$$S = \pi r^2 (\pi \text{ 是常量}).$$

如果抽去所考虑量的具体意义,它们都表达了两个变量之间的依赖关系:当其中一个变量在某一范围内取一个数值时,另一个变量就有唯一确定的值与之对应,两个变量之间的这种对