学科主编
周沛耕

国家奥林匹克集训队教练
北京大学附中数学特级教师

特别收录
最新奥赛真题

# 金牌奥赛

# 解题方法与赛前实战

## 初中数学

《金牌奥赛》编委会 编

课本内容概述
课外知识拓展
奥赛真题解析
助力初中奥赛

考试让你得高分！

北京出版集团公司
北京教育出版社

# 金牌奥赛

# 解题方法与赛前实战

## 初中数学

《金牌奥赛》编委会 编


**本册主编**：戴有刚　毕淑云　俞晓宏　李英淑

**编　　委**：于志斌　王红娟　王美玲　尹志梅　兰俊义　孙冬梅　任延明　邵　波　苏正楷　苏孝从　苏岫云　李永哲　李英淑　李海军　陈家锐　陈天辉　辛德辉　林　银　周　萌　金成哲　金英兰　郑培敏　施　恩　胡均宇　郭灵恩　黄凤龙　梁永久　程晓敏　舒　秀



北京出版集团公司

北京教育出版社

# 前言

用最简单的方法解最难的题，这就是奥赛解题方法吸引学生眼球的最根本的原因。

多年来，许多教师、家长和学生都在苦苦思索着：哪种方法更能开阔视野、启迪思维、开发智力、提升能力？怎样才能在不断创新的竞赛中运筹帷幄？怎样才能把知识转化为能力？

这些想法其实存在着一定的误区，中医讲究把脉，奥赛也一样，只要你把住了它的“脉”，问题就会变得极其简单。

本书就是奥赛教练、部分省市教研员依据最新教材、教学大纲、考试说明和奥赛说明，结合奥赛智力训练的实际情况，经过大量细致的调研、认真分析，针对学生应具备的学科基础知识和基本技能，顺应由浅入深的脉络编写而成的。

本书具有以下特色：

一、适用于所有想学奥赛知识的同学，让学生在快乐中学习

本书涵盖了学科的全部基础知识、基本方法、基本技能和思想，并对课本内容进行了必要概述、合理变通和适当拓展。本书由浅入深的解析、重点突出的评述、竞赛习题的罗列，会使同学们在瞬间感受到游刃于课本与课外之间的快乐。

二、本书所选习题具有典型性、通透性

最简单的方法往往适用于最难的题，因此本书通过典型习题和富有启发性的解答，对于较难的习题进行详尽透彻的分析，使同学们能顺着分析的脉络，开动脑筋，悟出自己的解题方法来。

三、缩短知识与实践的距离

怎样把知识转化为能力？本书对此进行了详尽的诠释。它既考虑到内容编排的科学性，又注意到自身的可读性，层次清晰，拓展了同学们对各种题型的解题思路，提高了同学们把握关键问题的能力。最重要的是同学们会在本书中发现解题的规律技巧和解题的关键，这对消化、掌握知识有巨大的帮助。

四、高才生轻巧攻关的摇篮

本书整合了目前社会上众多奥赛训练方法的精髓，深入浅出地演示了精彩的解题方法，加上画龙点睛的归纳总结，为高才生提供了超前的、便捷的解题方法，也为同学们参加奥赛或升学考试起到相当大的指导作用。

由于时间仓促，书中难免存在谬误之处，敬请批评指正。

# 目 录

# 第一讲 整 数

整数问题的研究在数学里占有极为重要的地位，整数问题的解法灵活多变，技巧独特，易于考查学生的能力和智力.

## 一、基本内容

### 1 十进制整数及表示方法

我们通常所说的整数都是十进制的数.

两位数可表示为$\overline{ab}$,

$\overline{ab}=10a+b$;

三位数可表示为$\overline{abc}$,

$\overline{abc}=100a+10b+c$

……

$(n+1)$位数$N$可表示为

$$N=\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}$$
$$=a_n\times10^n+a_{n-1}\times10^{n-1}+\cdots+a_2\times10^2+a_1\times10+a_0.$$

其中$a_i(i=0,1,2,\cdots,n)$都是整数，且$0\leqslant a_i\leqslant9$，$a_n\neq0$.

### 2 质数与合数

一个大于1的正整数$a$，若仅有1与$a$这两个正约数，则$a$叫做质数（或素数）.

若还有其他的正约数，则$a$叫做合数.

若将正整数按约数的个数分类，可分为三类：1、质数、合数.

☆质数、合数具有以下性质：

(1)1既不是质数也不是合数；

(2)质数有无穷多个，不存在最大的质数，但存在最小的质数2，它也是质数中唯一的偶数；

(3)若正整数$a$的一个约数$P$是质数，则约数$P$叫做$a$的质约数(质因数).

任何一个大于1的自然数$N$都能分解成质因数的乘积形式：

$$N=P_1^{\alpha_1}\cdot P_2^{\alpha_2}\cdot\cdots\cdot P_n^{\alpha_n}.$$

其中$P_i(i=1,2,\cdots,n)$为质数，$\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$为正整数，这种分解式是唯一的，这时自然数$N$约数的个数为

$$\alpha(N)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_n+1)$$

.其中$\alpha(N)$中包括1和$N$在内.

### 3 最大公约数和最小公倍数

(1)最大公约数：

整数$a$和$b$公有的约数$d$，叫做$a$和$b$的公约数，其中的最大者$d$叫做最大公约数，记作$d=(a,b)$.

**性质1** 若$(a,b)=1$，则称$a$与$b$互质.

**性质2** 若$b|a$，则$(a,b)=b$.

**性质3** 若$(a_1,a_2,\cdots,a_n)=d$，则$(ka_1,ka_2,\cdots,ka_n)=kd$.

**性质 4**　若$(a,b)=1$,则$(a,b,c)=1$.

**性质 5**　$(a,b)=(a\pm b,b)$.

**性质 6**　$(a,b,c)=((a,b),c)$.

(2)最小公倍数:

设$a_1,a_2,\cdots,a_n$和$m$均为正整数,且$a_1|m,a_2|m,\cdots,a_n|m$,则称$m$为$a_1,a_2,\cdots,a_n$的公倍数.公倍数中的最小者$m$叫做最小公倍数,记作$[a_1,a_2,\cdots,a_n]=m$.

**性质 1**　若$b|a$,则$[a,b]=a$.

**性质 2**　若$[a_1,a_2,\cdots,a_n]=m$,则$[ka_1,ka_2,\cdots,ka_n]=km$.

(3)最大公约数与最小公倍数之间的关系:

**性质 1**　$(a,b)\cdot[a,b]=ab$.

**性质 2**　$(a,m)=1,(b,n)=1$,则

$$\left(\frac{m}{a},\frac{n}{b}\right)=\frac{(m,n)}{[a,b]},$$

$$\left[\frac{m}{a},\frac{n}{b}\right]=\frac{[m,n]}{(a,b)}.$$

## 4 奇数与偶数

整数可以分为奇数和偶数两类.

在整数中能被2整除的数叫做偶数,不能被2整除的数叫做奇数,通常用$2k$表示偶数,用$2k+1$(或$2k-1$)表示奇数,其中$k$为整数.

☆奇数和偶数具有下列性质:

(1)奇数≠偶数.

(2)

| + | 奇 | 偶 |
|---|---|---|
| 奇 | 偶 | 奇 |
| 偶 | 奇 | 偶 |

| × | 奇 | 偶 |
|---|---|---|
| 奇 | 奇 | 偶 |
| 偶 | 偶 | 偶 |

(3)$x+y$与$x-y$具有相同的奇偶性.

(4)若$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$为偶数,则$a_1,a_2,\cdots,a_n$中至少有一个是偶数.

(5)若$a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n$为奇数,则对任何$n$,$a_n$均为奇数.

(6)偶数的平方能被4整除,奇数的平方被8除余1.

## 5 整数的整除

整数$a,b(b\neq0)$,如果存在整数$c$,使$a=bc$,则称$b$整除$a$(或$a$被$b$整除),记作$b|a$,这时$a$是$b$的倍数,$b$是$a$的约数.

(1)整除的基本性质:

①若$a|b,b|c$,则$a|c$.

②若$b|a$,则$b|ka$,其中$k$为任意整数.

③若$m|ab,(m,a)=1$,则$m|b$.

④若$a|b,a|c$,则$a|b\pm c$.

⑤若$a|m,b|m$,则$[a,b]|m$.

⑥若$b|a,c|a$,且$(b,c)=1$,则$bc|a$.

(2)整数的整除的常用判定方法:

①末位数字是偶数的整数,能被2整除.

②末位数字是0或5的整数,能被5整除.

③末两位数能被4(或25)整除的整数能被4(或25)整除.

④末三位数能被8(或125)整除的整数能被8(或125)整除.

⑤各位数字之和能被3(或9)整除的整数能被3(或9)整除.

⑥一个整数的奇数位数字和与偶数位数字之和的差能被11整除,则这个数能被11整除.

⑦奇位千进位的总和与偶位千进位的总和之差能被7或11或13整除,则这个数能被7或11或13整除.

## 6 同余、余数的分类

$a,b$为两个整数,$b\neq0$,则必存在唯一的整数$q$和$r$,有$a=bq+r$,其中$0\leqslant r<b$.

在$a=bq+r$中,$r$可取$0,1,2,\cdots,b-1$.

(1)如果我们按$r$的取值,每一个值

分为一类，则可分为 $b$ 类.

(2)两整数 $a$ 和 $b$ 被 $c$ 除时，余数相等，叫做 $a$ 和 $b$ 对模 $c$ 同余，记作 $a\equiv b(\bmod c)$.

### 7 整数的末位数

当 $x$ 为正整数时，$x^n$($n$ 为正整数)的个位数随 $n$ 的变化而周期变化.

(1)数 0,1,5,6 周期为 1;4,9 的周期为 2;2,3,7,8 的周期为 4.

(2)$x^2$ 的末位数($x^2$)$=0,1,4,5,6,9$.

(3)$x^4$ 的末位数($x^4$)$=0,1,5,6$.

(4)$x(x+1)$的末位数($x(x+1)$)$=0,2,6$.

(5)$x^{4n+9}$ 的末位数($x^{4n+9}$)$=x^9$ 的末位数($x^9$).

## 二、典型例题

**例1** $\overline{abcd}$ 是一个四位的自然数，已知$\overline{abcd}+a+b+c+d=1\,999$，求四位数$\overline{abcd}$.

解：依题意，得 $1\,000a+100b+10c+d+a+b+c+d=1\,999$，

即 $1\,001a+101b+11c+2d=1\,999$.

(1)显然 $a=1$，所以

$101b+11c+2d=998$.

(2)因为 $11c+2d\leqslant 11\times 9+2\times 9=117$，所以 $101b\geqslant 998-117=881$，

所以 $b=9$，则

$11c+2d=998-909=89$.

(3)因为 $0\leqslant 2d\leqslant 18$，所以 $89-18\leqslant 11c\leqslant 89$，故 $c=7$ 或 $c=8$.

当 $c=7$ 时，$11c+2d=77+2d=89$，有 $d=6$；

当 $c=8$ 时，$11c+2d=88+2d=89$，有 $d=\frac{1}{2}$(舍去).

故所求的四位数为 1 976.

**例2** 七位数$\overline{62xy427}$($x\neq 0$)，能被 99 整除，求$\overline{xy}$.

解：因为 $99=9\times 11$，所以$\overline{62xy427}$能被 9 和 11 整除．故

$$\begin{cases}9\mid(6+2+x+y+4+2+7)\Rightarrow 9\mid(x+y+21),\\ 11\mid[6+x+4+7-(2+y+2)]\Rightarrow 11\mid(13+x-y).\end{cases}$$

设$\begin{cases}x+y+21=9h,\\ 13+x-y=11k,\end{cases}$

则$\begin{cases}x+y=9h-21,\\ x-y=11k-13,\\ 0<x+y\leqslant 18,\\ -9<x-y\leqslant 9,\end{cases}$

所以$\begin{cases}0<9h-21\leqslant 18,\\ -9<11k-13\leqslant 9\end{cases}\Rightarrow$

$\begin{cases}\frac{7}{3}<h\leqslant\frac{13}{3},\\ \frac{4}{11}<k\leqslant 2.\end{cases}$

因为 $h$、$k$ 为整数，

所以 $h=3$、$4$，$k=1$、$2$.

由方程组解出，

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(9h+11k-34),\\ y=\frac{1}{2}(9h-11k-8).\end{cases}$$

又因为 $h$,$k$ 同奇同偶，所以

$\begin{cases}h=3,\\ k=1,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}h=4,\\ k=2,\end{cases}$ 代入求出

$\begin{cases}x=2,\\ y=4,\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=12,\\ y=3.\end{cases}$ (舍去)

所以$\overline{xy}=24$.

**例3** 已知$\overline{ab}\mid\overline{a0b}$，$a<b$，求$\overline{ab}$.

解：依题意，得 $\overline{a0b}=\overline{ab}\times n$，$n$ 为整数，且 $n<10$，所以 $100a+b=10na+nb$.

移项，合并同类项，得

$10(10-n)a=(n-1)b$.　　①

由 $a<b$ 知，$1\leqslant a\leqslant 8$，$2\leqslant b\leqslant 9$，又知 $n-1>0$，$10-n>0$，

所以 $2\leqslant n\leqslant 9$. 当 $n=9$ 时，由①有 $5a=4b$，所以 $a=4$，$b=5$.

当 $n=8$ 时，由①有 $20a=7b$，无解.

当 $n=7$ 时，由①有 $5a=b$，所以 $a=1$，$b=5$.

当 $n=6$ 时，由①有 $8a=b$，所以 $a=1$，$b=8$.

当 $2\leqslant n\leqslant 5$ 时，①不成立.

所以 $\overline{ab}=15,18,45$.

**例4** 已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $1,2,3,\cdots,n$ 的任意一个排列，$n$ 为奇数，求证：$(a_1-1)(a_2-2)\cdot\cdots\cdot(a_n-n)$ 是偶数.

证明：假设 $(a_1-1)(a_2-2)\cdot\cdots\cdot(a_n-n)$ 是奇数，则 $a_1-1,a_2-2,\cdots,a_n-n$ 都是奇数.

又因为 $n$ 为奇数，故 $n$ 个奇数的和也是奇数.

而 $(a_1-1)+(a_2-2)+\cdots+(a_n-n)=(a_1+a_2+\cdots+a_n)-(1+2+\cdots+n)=0$，

0 是偶数，不是奇数，发生矛盾.

因此，$(a_1-1)(a_2-2)\cdot\cdots\cdot(a_n-n)$ 是偶数.

**例5** （英国第八届数学邀请赛试题）设 $n$ 是满足下列条件的最小正整数：它是 75 的倍数且恰有 75 个正整数因子（包括 1 和本身）. 求 $\frac{n}{75}$.

解：由条件知 $n=75k=3\times5^2k$，

欲使 $n$ 尽可能小，可设 $n=2^\alpha\cdot3^\beta\cdot5^\gamma(\gamma\geqslant2,\beta\geqslant1)$，且有 $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=75$.

由奇偶性得　$\alpha+1,\beta+1,\gamma+1$ 都为奇数，所以 $\alpha,\beta,\gamma$ 都是偶数，故取 $\gamma=2$.

由 $(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=75$，得 $(\alpha+1)(\beta+1)=25$.

(1)当 $\alpha+1=\beta+1=5$ 时，$\alpha=4$，$\beta=4$，则 $n=2^4\cdot3^4\cdot5^2$.

(2)当 $\alpha+1=1$，$\beta+1=25$ 时，$\alpha=0$，$\beta=24$，则 $n=2^0\cdot3^{24}\cdot5^2$.

所以，最小的正整数 $n$ 是 $2^4\cdot3^4\cdot5^2$，

所以 $\frac{n}{75}=\frac{2^4\cdot3^4\cdot5^2}{75}=432$.

## 三、竞赛训练题

### 一、选择题

1. 一个六位数 $N=\overline{a1998b}$ 能被 12 整除，这样的六位数共有(　　)个.

A. 9　　B. 12

C. 15　　D. 20

2. 设六位数 $N=\overline{x1527y}$ 是 4 的倍数，且 $N$ 被 11 除余 5，那么 $x+y=$(　　).

A. 8　　B. 9

C. 10　　D. 11

3. 已知 $x$ 为正整数，$y$、$z$ 是素数，且满足 $x=yz$，$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}$，则 $x=$(　　).

A. 4　　B. 8

C. 10　　D. 6

4. 两个两位数，它们的最小公倍数是最大公约数的 6 倍，又知最小公倍数与最大公约数的和为 49，则这两个两位数是(　　).

A. 28,42　　B. 18,24

C. 14,21　　D. 12,18

5. $A$、$B$ 两数的质因数都只有 3 和 5，它

们的最大公约数是 75，已知 $A$ 数有 12 个约数，$B$ 数有 10 个约数，那么 $A$、$B$ 两数的和是（　　）.

A. 1 950　　B. 2 250

C. 2 550　　D. 2 850

6 设 $x_1, x_2, \cdots, x_{51}$ 都是正整数，$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{51}$ 且 $x_1 + x_2 + \cdots + x_{51} = 1\,995$，当 $x_{26}$ 在它的可以取得的值中达到最大时，$x_{51}$ 可以取得的最大值是（　　）.

A. 91　　B. 92

C. 94　　D. 95

7 今天是星期日，从今天算起，第 $\underbrace{11\cdots1}_{2\,000\text{个}1}$ 天是星期（　　）.

A. 一　　B. 二

C. 三　　D. 四

8 用自然数 $n$ 去除 63，91，130，分别得到 3 个余数，它们的和为 26，则 $n$ =（　　）.

A. 41　　B. 42

C. 43　　D. 44

9 将 1 000 到 1 997 这 998 个自然数任意排成一行，然后依次地求出三个相邻数的和，在这些和数中，奇数的个数至多有（　　）个.

A. 499　　B. 496

C. 996　　D. 995

## 二 填空题

10 若自然数 $n$ 的各位数字之和为 527，则 $n$ 的最小值为________.

11 五位数 $\overline{abcde}$ 是 9 的倍数，其中 $\overline{abcd}$ 是 4 的倍数，那么 $\overline{abcde}$ 的最小值是________.

12 已知 $4 \times \overline{abcd} = \overline{dcba}$，则 $\overline{abcd} =$ ________.

13 用 $\frac{5}{28}, \frac{15}{56}, 1\frac{1}{20}$ 分别去除某分数，得到的商都是整数，则这个分数的最小值为________.

14 已知 $a, b, c$ 为整数，且 $a+b=2\,006$，$c-a=2\,005$. 若 $a<b$，则 $a+b+c$ 的最大值为________.

15 设 $a, b, c$ 为互不相等的正整数，满足 $\frac{11}{a}+\frac{11}{b}+\frac{11}{c}=\frac{143}{210}$，若 $a, b, c$ 的最小公倍数最小，则这 3 个数为________.

16 有若干个五位数，每一个数的数字之和不小于 40，且最大公约数为 11，则这样的五位数共有________个.

17 已知 $\begin{cases} [x,y,z]=60, \\ (x,y)=4, \\ (y,z)=3, \end{cases}$ 则 $x=$________.

## 三 解答题

18 （九届希望杯初二培训题）$a$ 为正整数，记号 $[2a+1, 2a+2, 2a+3]$ 表示 $2a+1, 2a+2, 2a+3$ 的最小公倍数，以 $N$ 表示它，若 $2a+4$ 能整除 $N$，求 $a$.

19 试找出由 0，1，2，3，4，5，6 这 7 个数字组成的没有重复数字的七位数中，能被 165 整除的最大数和最小数.

20 求所有满足下列条件的四位数：能被 111 整除且除得的商等于该四位数的各位数字之和.

## 简答或提示

1. A　提示：

$12=3\times4$，

$3|N\Rightarrow3|(a+b+27)\Rightarrow3|(a+b)$，

$4|N\Rightarrow4|\overline{8b}\Rightarrow b=0,4,8$.

当 $b=0$ 时，要使 $3|a$，$a$ 可取 3，6，9.

当 $b=4$ 时，要使 $3|(a+4)$，$a$ 可取 2，5，8.

当 $b=8$ 时，要使 $3|(a+8)$，$a$ 可取 1，4，7.

共 9 个.

2. B　提示：

$4|N\Rightarrow4|\overline{7y}\Rightarrow y=2,6$.

因为 $N$ 被 11 除余 5，所以

当 $y=2$ 时，$11|(\overline{x15272}-5)=\overline{x15267}$.

$(x+5+6)-(1+2+7)=x+1$，

但满足 $11|(x+1)$ 的 $x$ 不存在.

当 $y=6$ 时，$11|(\overline{x15276}-5)=\overline{x15271}$，

所以 $11|[x+5+7-(1+2+1)]=x+8$，

$x=3$，所以 $x+y=3+6=9$.

3. D　提示：

因为 $\frac{1}{x}=\frac{1}{z}-\frac{1}{y}=\frac{y-z}{yz}$，$yz=x$，

所以 $y-z=1$，$y$、$z$ 是相邻的自然数，且 $y$、$z$ 是素数，所以 $y=3$，$z=2$，所以 $x=6$.

4. C　提示：

$\begin{cases}[a,b]=6(a,b),\\(a,b)+[a,b]=49,\end{cases}$

所以 $(a,b)=7$，$[a,b]=42$，

所以这两个两位数为 14，21.

5. C　提示：

设 $A=3^a\times5^b$，$B=3^c\times5^d$. 因为 $A$ 有 12 个约数，所以 $(a+1)(b+1)=12$，$a=\frac{11-b}{b+1}$.

讨论：因为 $b\geqslant2$，所以 $b=2$ 时，$a=3$；$b=3$ 时，$a=2$；$b=5$ 时，$a=1$.

同理 $(c+1)(d+1)=10$，$c=\frac{9-d}{d+1}$.

因为 $d\geqslant2$，所以 $d=4$ 时，$c=1$，

所以 $B=3\times5^4$.

又因为 $(A,B)=75=3\times5^2$，

所以 $A=3^3\times5^2$.

所以 $A=675$，$B=1\ 875$.

所以 $A+B=2\ 550$.

6. D　提示：

要使 $x_{26}$ 最大，则 $x_1,x_2,\cdots,x_{25}$ 必须最小，从而 $x_{26}+x_{27}+\cdots+x_{51}$

$=1\ 995-(1+2+\cdots+25)=1\ 670$.

为了使 $x_{51}$ 最大，则 $x_{26},x_{27},\cdots,x_{50}$ 必须最小，所以

$x_{26}+(x_{26}+1)+(x_{26}+2)+\cdots+(x_{26}+24)+x_{51}$

$=1\ 670(x_{51}>x_{26}+24)$，

即 $25x_{26}+x_{51}$

$=1\ 670-(1+2+\cdots+24)$

$=1\ 370$.

$x_{26}$ 可以取得的最大值为 51，$1\ 370=25\times51+95$.

故取 $x_{51}=95$.

7. C　提示：

因为 $111\ 111=7\times15\ 873$，所以

$\underbrace{11\ 111\cdots1}_{2\ 000个1}=\overbrace{\underbrace{111\ 111}_{6个1}\cdots\underbrace{111\ 111}_{6个1}}^{1\ 998个1}11\equiv$

$11(\mathrm{mod}7)\equiv4$.

所以，从今天算起，第 $\underbrace{11\cdots1}_{2\ 000个1}$ 天应该是星期三.

8. C　提示：

设 $63=k_1n+r_1$，$91=k_2n+r_2$，

$130=k_3n+r_3$，则

$63+91+130$

$=(k_1+k_2+k_3)n+(r_1+r_2+r_3)$，

又 $r_1+r_2+r_3=26$，所以

$258=n(k_1+k_2+k_3)$，

所以 $258=2\times3\times43=n(k_1+k_2+k_3)$.

因为

$\frac{26}{3}=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}\leqslant\max\{r_1,r_2,r_3\}\leqslant26$，

所以 $n>8$.

所以 $n=43$.

9. D　提示：

由于要求奇数的个数最多，不妨这样排列：偶偶奇偶偶奇…偶偶奇偶奇奇…奇，三个相邻的数的和共有 996 个，而这 996 个和

数中有一个数“偶奇奇”不是奇数，所以有995个奇数.

10. $\underbrace{59\cdots9}_{58个9}$ 提示：

如果 $n$ 是两位数，各位数字之和最多是18；如果 $n$ 是三位数，各位数字之和最多是27……如果 $n$ 是58位数，各位数字之和最多是522，因此这个数至少是59位数，要使 $n$ 最小，$n=\underbrace{59\cdots9}_{58个9}$.

11. 10 008 提示：

要求 $\overline{abcde}$ 最小，$\overline{abcd}$ 也必须最小，且被4整除，所以 $\overline{abcd}$ 取1 000；补上一个末位数字 $e$ 变为五位数，且是9的倍数，则这五个数字之和是9的倍数，所以补上的数字只能是8. 所以，所求的 $\overline{abcde}$ 的最小值是10 008.

12. 2 178 提示：

因为 $4\times\overline{abcd}$ 为四位数，所以 $1\leqslant a\leqslant 2$ 且 $a$ 为偶数，故 $a=2$.

当 $a=2$ 时，$d=8$ 或 9，但 9 是不可能的，因为 $\overline{dcb2}$ 的个位数为 2，$4\times\overline{abc9}$ 的个位数为 6.

当 $a=2,d=8$ 时，

$4\times\overline{abcd}=\overline{dcba}\Rightarrow 4\times\overline{2bc8}=\overline{8cb2}$，

$4\times(2\,000+100b+10c+8)$

$=8\,000+100c+10b+2$，

即 $390b-60c+30=0$，

所以 $b=1,c=7$，

所以 $\overline{abcd}=2\,178$.

13. $26\frac{1}{4}$ 提示：

设这个分数最小为 $\frac{M}{N}$，则

$$\frac{M}{N}\div\begin{cases}\frac{5}{28}=a,\\ \frac{15}{56}=b,\\ 1\frac{1}{20}=c\end{cases}\Rightarrow\frac{M}{N}\times\begin{cases}\frac{28}{5}=a,\\ \frac{56}{15}=b,\\ \frac{20}{21}=c.\end{cases}$$

因为我们所求的是最小值，故

$M=[5,15,21]$，$N=(28,56,20)$，所以

$$\frac{M}{N}=\frac{[5,15,21]}{(28,56,20)}=\frac{105}{4}=26\frac{1}{4}.$$

14. 5 013 提示：

由 $a+b=2\,006$，$c-a=2\,005$，得 $a+b+c=a+4\,011$.

因为 $a+b=2\,006$，$a<b$，$a$ 为整数，所以 $a$ 的最大值为 1 002.

于是 $a+b+c$ 的最大值为 5 013.

15. 210，105，21 或 210，42，30 或 105，42，35 提示：

由题意得 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{13}{210}$，

$210=2\times3\times5\times7$，

$13=1+2+10=1+5+7=2+5+6$

$\quad=a_1+b_1+c_1$.

这三种情况是

$$\begin{cases}a=210, & 210, & 3\times5\times7,\\ b=3\times5\times7, & 2\times3\times7, & 2\times3\times7,\\ c=3\times7, & 2\times3\times5, & 5\times7.\end{cases}$$

故 $a,b,c$ 的最小公倍数取最小值 210 时，满足条件的 $a,b,c$ 共有 3 组，它们是 210、105、21；210、42、30；105、42、35.

16. 15 提示：

设符合条件的数为 $\overline{abcde}$，

$A=a+c+e$，$B=b+d$.

当 $A=27$，$B=16$ 时，有 99 979，97 999，98 989.

当 $A=26$，$B=15$ 时，

奇数位上依次可以是 9，9，8；9，8，9；8，9，9；

偶数位上依次可以是 9，6；8，7；7，8；6，9.

共有 $3\times4=12$（个）.

当 $A=25$ 时，$B=14$，这时 $A+B=25+14<40$，不合题意.

综上，共有 15 个符合条件的五位数.

17. 4 或 20 提示：

因为 $(x,y)=4$，$(y,z)=3$，$(4,3)=1$.

所以 $12\mid y$，又 $[x,y,z]=60$，所以 $y=12$ 或 60.

$[x,y,z]=60=3\times4\times5$.

当 $y=12$ 时，$[x,12,z]=60=3\times4\times5$ 可知 $x,z$ 中有一个含约数 5.

若 $x$ 中含约数 5，又 $x$ 含约数 4，$(4,5)=$

1,所以 $x$ 中含因数 20,而$[x,y,z]=60$,$(x,y)=4$,所以 $x=20$;若 $x$ 中不含约数 5,$x$ 中含约数 4,且 $x$ 是 60 的约数,所以 $x=4$或 12,而$(4,12)=4$,所以 $x=4$.

当 $y=60$ 时,$(x,60)=4$,而 $x$ 中不含 5,且$[x,60,z]=60=3\times4\times5$,所以 $x=4$.

所以 $x=4$ 或 20.

**18. 解:**

因为 $2a+1,2a+2,2a+3$ 三数互质,即

$$N=[2a+1,2a+2,2a+3]$$
$$=(2a+1)(2a+2)(2a+3).$$

又因为$(2a+4)\mid N$,所以

$$\frac{N}{2a+4}=\frac{(2a+1)(2a+2)(2a+3)}{2a+4}$$
$$=\frac{(2a+1)(a+1)(2a+3)}{a+2}\text{为整数.}$$

又$(a+1,a+2)=1$,

再证$(2a+3,a+2)=1$.

设$(2a+3,a+2)=d>1$,则

$2a+3=pd,a+2=qd$.

又 $2(a+2)-(2a+3)=2qd-pd=1$,

所以 $d=\frac{1}{2q-p}<1$ 与假设矛盾.

所以$(2a+3,a+2)=1$.

因而只有 $a+2$ 整除 $2a+1$,

即$\frac{2a+1}{a+2}=2-\frac{3}{a+2}$是整数.

$\therefore a+2=3.\ \therefore a=1$.

**19. 解:**

由 $165=3\times5\times11$,

知要求的数一定能被 3,5,11 整除.

可设要求的七位数的奇数位上的四个数字和为 $A$,偶数位上的三个数字之和为 $B$,则有

$|A-B|=11k,k$ 为非负整数.

又 $A+B=21$,

所以$|A-B|<21$.

又 $A+B$ 为奇数,所以 $A-B$ 也是奇数,$A-B\neq0$,所以 $k=1$.

所以 $A$ 和 $B$ 中一个是 16,另一个是 5.

又 $0+1+2+3=6$,故 $A$ 不能是 5,则 $A=16,B=5$.

在七个数字中,三个数字之和为 5 的只有 0,1,4 或 0,2,3 两种,则

(1)$B=0+1+4,A=2+3+5+6$,

(2)$B=0+2+3,A=1+4+5+6$.

显然,0 在偶数位,不可能为末位数字,又因所求数能被 5 整除,故末位数字是 5.

易得,最大数为 6 431 205,最小数为 1 042 635.

**20. 解:**

设四位数为$\overline{abcd}$,则

$$\frac{\overline{abcd}}{111}=\frac{1\,000a+100b+10c+d}{111}$$
$$=9a+b+\frac{a-11b+10c+d}{111}.$$

因为$-98\leqslant a-11b+10c+d\leqslant108$,且$\overline{abcd}$能被 111 整除,所以 $a-11b+10c+d=0$,

所以 $11b=a+10c+d$.　①

又因为 $9a+b=a+b+c+d$,

所以 $8a=c+d$,

所以 $11b=9(a+c)$.　②

又 $c+d\leqslant18$,所以 $8a\leqslant18$,

所以 $a=1$ 或 $a=2$,

由②可知 $b=9,a+c=11$,

所以 $a=2,c=9,d=7$.

故所求的四位数为 2 997.

# 第二讲 实 数

当我们认识了零、负整数和负分数后，数的天地扩充到有理数，然后扩充到实数.

## 一、基本内容

### 1 实数的概念及分类

能够表示成分数$\frac{q}{p}$的形式（$p$、$q$ 均为整数，且 $p\neq0$）的数是有理数．反过来，有理数能写成$\frac{q}{p}$（$p$、$q$ 为整数，且 $p\neq0$）的形式.

有理数的加减乘除（除数$\neq0$）是封闭的.

无理数是无限不循环小数，不能写成$\frac{q}{p}$的形式，无理数的加减乘除不具有封闭性.

有理数和无理数统称为实数.

- 实数
  - 有理数
    - 整数
      - 正整数
      - 零
      - 负整数
    - 分数
      - 正分数
      - 负分数
      - （正分数、负分数）有限小数或无限循环小数
  - 无理数
    - 正无理数
    - 负无理数
    - （正无理数、负无理数）无限不循环小数

### 2 相反数

若 $a$，$b$ 互为相反数，则 $a+b=0$，反之亦成立.

### 3 倒数

若 $a$，$b$ 互为倒数，则 $ab=1$，反之亦成立.

### 4 绝对值

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0),\\ 0 & (a=0),\\ -a & (a<0).\end{cases}$$

绝对值的几何意义：在数轴上，表示一个数 $a$ 的点与原点之间的距离就叫做数 $a$ 的绝对值．$|x-a|$ 表示 $x$ 所对应的点与表示数 $a$ 的点之间的距离.

**性质 1**：$|a|\geqslant0$，$|a|\geqslant a$，$|a|\geqslant-a$.

**性质 2**：若 $|a|=|b|$，则 $a$，$b$ 相等或互为相反数.

**性质 3**：$|a^2|=|a|^2=a^2$.

**性质 4**：$|ab|=|a|\cdot|b|$，$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

$(b\neq 0)$.

**性质 5**：$||x|-|y||\leqslant|x\pm y|\leqslant|x|+|y|$.

### 5 非负数

正数或零叫做非负数，常见的非负数有：实数的绝对值、实数的偶数幂、算术根.

## 二、典型例题

**例 1** 设 $n$ 为自然数，若 $\frac{n}{810}=0.\dot{d}2\dot{5}$，求 $n$.

分析：若 $x=0.\dot{8}\dot{1}$，则

$100x=81.818\,1\cdots$，所以

$99x=81, x=\frac{81}{99}$.

一般地，$0.\dot{a}bc\dot{d}=\frac{\overline{abcd}}{9\,999}$.

解：$\frac{n}{810}=0.\dot{d}2\dot{5}$，

$$\frac{n}{810}=\frac{\overline{d25}}{999}\Rightarrow\frac{n}{30}=\frac{\overline{d25}}{37},$$

解出 $n$，得

$$n=\frac{100d+25}{37}\times 30=\frac{3\,000d+750}{37}$$

$$=81d+20+\frac{3d+10}{37},$$

因为 $n$ 为自然数，所以 $d=9$，所以 $n=750$.

**例 2** 证明 $\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n个1}-\underbrace{22\cdots2}_{n个2}}$ 是一个有理数.

证明：令 $\underbrace{11\cdots1}_{n个1}=m$，则

$$\sqrt{\underbrace{11\cdots1}_{2n个1}-\underbrace{22\cdots2}_{n个2}}$$

$$=\sqrt{m(9m+2)-2m}$$

$$=\sqrt{9m^2}=3m=\underbrace{33\cdots3}_{n个3}$$，是有理数.

**例 3** 已知 $x,y$ 为有理数，且 $\left(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x+\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{12}\right)y-2.25-1.45\sqrt{3}=0$. 求 $x$、$y$.

解：原式可以变形为

$$\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y-2.25\right)+\left(\frac{1}{2}x-\frac{y}{12}-1.45\right)\sqrt{3}=0,$$

所以

$$\begin{cases}\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y-2.25=0,\\ \frac{1}{2}x-\frac{y}{12}-1.45=0.\end{cases}$$

整理，得 $\begin{cases}4x+3y=27,\\ 6x-y=17.4,\end{cases}$

解这个方程组，得 $\begin{cases}x=3.6,\\ y=4.2.\end{cases}$

**注意**

$a,b$ 为有理数，$m$ 为无理数时，已知 $a+bm=0$，则 $a=b=0$. 反之亦然.

**例 4** 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 都是实数，且 $n(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)=(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2$. 求证：$x_1=x_2=\cdots=x_n$.

证明：令 $s=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$，则

$$ns^2=\frac{(x_1+x_2+\cdots+x_n)^2}{n}.$$

由题设得

$$x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2-ns^2$$
$$=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-2ns^2+ns^2$$
$$=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)-2(x_1+x_2+\cdots+x_n)s+ns^2$$
$$=(x_1^2-2x_1s+s^2)+(x_2^2-2x_2s+s^2)+\cdots+(x_n^2-2x_ns+s^2)$$
$$=(x_1-s)^2+(x_2-s)^2+\cdots+(x_n-s)^2$$