数学奥赛辅导丛书

第二辑

有趣的差分方程

Youqu de Chafen Fangcheng

第2版

李克大 李尹裕 编著

中国科学技术大学出版社

数学奥赛辅导丛书·第二辑

有趣的差分方程

李克大　李尹裕　编著

中国科学技术大学出版社

内 容 简 介

本书将高中的数列与递推知识作为基本起点，从斐波那契数列等趣味问题开始，引入差分方程的理论与方法，研究差分方程的解法，并侧重于运用差分方程解决递推数列、求和、近似计算等问题. 最后还扩展到差分方程与多个数学分支的联系以及差分方程的前景. 为了理论的严谨性，书末给出了几个附录，对于不同层次的读者，可以按照实际情况和需要，有所选择地阅读.

图书在版编目(CIP)数据

有趣的差分方程/李克大，李尹裕编著. —2 版. —合肥：中国科学技术大学出版社，2011. 5(2013. 11 重印)
(数学奥赛辅导丛书·第二辑)
ISBN 978-7-312-02823-6

Ⅰ. 有…　Ⅱ. ①李… ②李…　Ⅲ. 差分方程—高中—教学参考资料　Ⅳ. G634-603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2011)第 070803 号

中国科学技术大学出版社出版发行
安徽省合肥市金寨路 96 号，230026
http://press.ustc.edu.cn
合肥现代印务有限公司印刷
全国新华书店经销
*
开本：880×1230/32　印张：8.5　字数：184 千
1994 年 10 月第 1 版　2011 年 5 月第 2 版
2013 年 11 月第 4 次印刷
定价：18.00 元

第 2 版序

递归数列这个数学内容在中学数学教材中常见，考大学时也要用到它，所以受到了中学生，甚至是中学教师的重视，后者还对此做了很多的科学研究. 计算机出现后，离散数学的崛起使得差分方程在大学学习中也占有一席之地，像华罗庚的《高等数学引论》就包含差分方程的研究. 可是总的来说，这方面的深入浅出的参考书太少了. 此书正是这方面的一部最好的参考书，这是因为作者有高水平的研究经验和教学实践. 因此，我乐意推荐此书作为中学生的课外读物、中学教师的研究指南和大学生的参考著作.

林　群

2010 年 10 月

序

数列中有许多问题，如求数列的通项、和等等，已有不少人注意到，但能跳出“庐山之中”而从更高的观点来看待这些问题的书还不多见. 这本《有趣的差分方程》就是这样的书.

李氏昆仲，既有从事科学研究的体会，又有教学工作的经验，所以这本《有趣的差分方程》既有相当深度，又是通俗易懂的读物.

当然，读数学书总得花点力气，特别是内容丰富的书. 这本书中，不仅有很多有趣的中学数学问题与较难的数学竞赛题，而且有差分算子、常系数差分方程、常差分方程、偏差分方程、牛顿公式、纤维丛……读此书当然不会太轻松. 怎么办? 硬着头皮读下去，读完了，自然苦尽甘来，不仅学到了知识、技巧，而且也就学会了读书. 如果一遇到困难就退缩，那只能看“白开水”或“低幼读物”，逐渐成熟起来的读者是不会采取这种态度的.

李氏昆仲是我的良师益友，读了他们的手稿，很受启发，特向爱好数学的同志们推荐，相信每一位读者都会从这本书中学到一些有用的东西.

单 墫

1991 年 2 月

目　　次

1　从斐波那契数列谈起

中世纪的意大利，曾有过一个商业蓬勃发展的时期.有一位和马可·波罗几乎同时代的著名数学家，名叫里昂纳多·斐波那契（Leonardo Fibonacci，约1170～约1250）.他曾以一个商人的身份去东方旅行，途中搜集了许多算术与代数方面的素材，在1202年，写出了一本书——《算盘书》（*Liber Abaci*）.在这本书中，有一个兔子繁殖问题，很能给人以启迪.直到现在，人们还常常引用它.问题是这样的：

如果一对大兔每个月繁殖一对小兔，而小兔一个月后长成大兔（即到第2个月便能繁殖）.在没有兔子死亡的情况下，一对大兔在一年中繁殖成多少对兔？

现在，让我们借用这个问题打开一扇数学之门，这就是本书的主题——差分方程.

先来着手分析和解决这个兔子繁殖问题.

我们将第1个月，第2个月，……，第 n 个月的兔子对数分别记作 $F_1, F_2, \cdots, F_n$，然后注意这些数之间的联系.在第 n 个月的 F_n 对兔子中，有 F_{n-1} 对在第 $n-1$ 个月就已经存在了，因而在第 n 个月已长成大兔；而其余的都是小兔.在第 $n+1$ 个月，

这 F_{n-1} 对大兔都要繁殖，于是第 $n+1$ 个月就比第 n 个月增加了 F_{n-1} 对兔. 这样我们就有

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \tag{1.1}$$

这是一个连续三个月的兔子对数之间满足的关系式. 我们又注意到，第 1 个月和第 2 个月都只有一对兔，也就是说 $F_1 = 1$，$F_2 = 1$. 由式(1.1)，我们就可以推算出以后逐月的兔子对数，它们分别是

$$F_3 = 2,\ F_4 = 3,\ F_5 = 5,\ F_6 = 8,\ F_7 = 13,$$

$$F_8 = 21,\ F_9 = 34,\ F_{10} = 55,\ F_{11} = 89,\ F_{12} = 144.$$

可见一年中繁殖成了 144 对兔.

学过高中代数的读者立即会想到，数列的递推形式不就是这样的吗？确实，它也正是我们了解差分方程的起点.

现在我们丢开兔子繁殖这个实际问题，只注意式(1.1)和

$$F_1 = F_2 = 1, \tag{1.2}$$

这样便得到一个数列 $\{F_n\}$，它被人们称作**斐波那契数列**. 对它的任一项 F_n，都可以像上面求 F_{12} 那样，通过逐步推算求出. 尽管如此，我们仍有理由感到不满足. 因为对一个数列，我们常常特别重视它的通项公式. 有了通项公式不仅可以直接算出任意一项，还有利于研究数列的各种性质. 那么，数列 $\{F_n\}$ 有没有通项公式呢？如果你试着按公式

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \tag{1.3}$$

写出一个数列，就会看到写出的各项与斐波那契数列的各项完

全相同. 事实上，我们可以用数学归纳法来证明这一点①. 过程如下：

(1) 因为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}-\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=1=F_1, \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\right]=1=F_2, \end{cases} \tag{1.4}$$

所以，$n=1$ 和 $n=2$ 时结论成立.

(2) 假设结论对 $n=k-1$ 和 $n=k-2$ 都成立($k>2$)，则有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right] \\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\right] \\ &=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k-2}\right] \\ &=F_{k-1}+F_{k-2}=F_k, \end{aligned} \tag{1.5}$$

所以，结论对于 $n=k$ 也成立.

因此，对任意自然数 n，都有

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \tag{1.6}$$

换句话说，式(1.6)正是我们所希望找到的$\{F_n\}$的通项公式.

读者若把式(1.1)和(1.6)作一个比较，可能会有一串疑问.

---

① 这里所用的是稍有变化的数学归纳法. 不了解这种方法的读者可以参阅关于数学归纳法的小丛书，例如[1].

例如，式(1.1)是一个只有加法运算的表达式，为什么式(1.6)中会出现指数运算呢？能不能找到一个不含指数运算的通项公式呢？还有，由式(1.1)和(1.2)出发逐项计算，所得的每个 F_n 显然都应当是正整数，可是为什么这些整数却要用 $\sqrt{5}$ 这个无理数来表示呢？(如果你试图消去这个无理数，还会徒劳一场!)而我们更应该关心的是，表达式(1.6)到底是怎样得来的. 其实，这个问题一解决，前面那些疑问也就不难解释了. 这些问题将在本书第3节中加以解决.

从数列的角度看，式(1.1)和(1.6)是同一个数列所满足的两个式子. 其中式(1.6)是我们熟悉的解析表达式，而式(1.1)则通常称为一个"差分方程"，它表达数列的相邻几项之间的关系.

谈到方程，人们往往最关心它的解是什么，不妨把差分方程与代数方程作一个比较. 代数方程的未知量是一个数，因而它的解也是数. 而对于差分方程，我们所求的是一个**数列**(如 $\{F_n\}$)，所以我们把这个数列的通项公式(如式(1.6))称作这个差分方程(如式(1.1))的**解**. 一个数列也可以看做一个**整变量函数**，即定义在整数集的一个子集上的函数. 例如，我们可以定义一个**正整数集**上的函数 f 如下：

$$f(n)=F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],\qquad(1.7)$$

那么也可以说 f 是方程(1.1)的一个解①.

---

① 如果读者将来学到了微分方程，就会发现微分方程与差分方程有很多相似之处. 微分方程、差分方程以及函数方程的未知元都是函数.

其实,差分方程与我们的距离并不遥远,甚至并不陌生.我们的读者一定熟悉等差数列与等比数列,它们的基本形式分别为

$$a_{n+1}=a_n+d\ (d\text{ 为常数})\tag{1.8}$$

和

$$a_{n+1}=qa_n\ (q\text{ 为非零常数}).\tag{1.9}$$

它们本身就是两个差分方程.而它们的通项公式

$$a_n=a_1+(n-1)d\tag{1.10}$$

和

$$a_n=a_1q^{n-1}\tag{1.11}$$

则分别就是上面两个方程的解.

还有一个例子.我们知道,组合数 C_n^m①满足公式

$$C_{n+1}^m=C_n^m+C_n^{m-1},\tag{1.12}$$

这也可以看做一个差分方程.由于其中含有 n 和 m 两个变元,我们把这样的差分方程叫做**偏差分方程**.应用公式(1.12)进行推算,我们便可以写出杨辉三角形.

许多差分方程具有很有趣的性质或重要的应用,例如方程

$$a_n=2a_{n-1}^2-1,\tag{1.13}$$

它的右端含有 a_{n-1} 的平方项,这一点和我们上面看到的差分方程都不相同.当 $a_1=3$ 时,我们不难算出 $a_2=17$,$a_3=577$,$a_4=$

---

① 组合数 C_n^m 的定义为:从 n 个不同元素中取出 m 个不同元素的所有取法的种数($m\leqslant n$),它的公式为 $C_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.在有的书中组合数也记作 $\dbinom{n}{m}$.

665 857. 如果我们计算$\frac{a_3}{2^3a_1a_2}$和$\frac{a_4}{2^4a_1a_2a_3}$，就会惊奇地发现，前者是 1.414 215…，后者是 1.414 213 562 374…，分别与 $\sqrt{2}$ 相差不足 3×10^{-6} 和 2×10^{-12}. 这样我们就有一个计算 $\sqrt{2}$ 的好方法. 迄今为止还没有什么方法比这更快、更准确.

有时候，我们还会遇到像下面这样看上去似乎不难，但做起来却很棘手的问题.

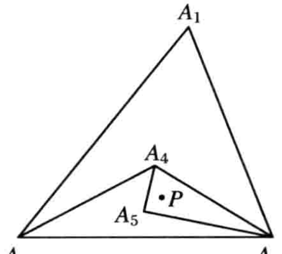


图 1.1

【例 1】 给定一个平面上的三角形$\triangle A_1A_2A_3$. 设 A_4 为$\triangle A_1A_2A_3$ 的重心，A_5 为$\triangle A_2A_3A_4$ 的重心……一般地，A_n 为$\triangle A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}$的重心. 这样我们就得到一列点 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$. 如果画一个图就会看到(图 1.1)，我们得到一串一个套一个的三角形，每个三角形的面积是前一个的$\frac{1}{3}$，因而很自然地想到点列 $A_1, A_2, A_3, \cdots$会趋向某个点 P，也就是说，当 n 趋于无穷大时，线段 A_nP 的长度趋于 0，可是怎样确定点 P 的位置呢?

如果我们建立一个坐标系①，并设 A_n 的坐标为(x_n, y_n)，那么由解析几何知识可知，$\triangle A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}$的重心坐标是$\left(\frac{x_{n-3}+x_{n-2}+x_{n-1}}{3}, \frac{y_{n-3}+y_{n-2}+y_{n-1}}{3}\right)$. 由于 $\Delta A_{n-3}A_{n-2}A_{n-1}$

① 熟悉复数的读者可以建立复平面，将点 A_n 的坐标记为 z_n，于是式(1.14)可改写成 $z_n=\frac{z_{n-3}+z_{n-2}+z_{n-1}}{3}$. 参看[2].

的重心是 A_n，我们有

$$x_n=\frac{x_{n-3}+x_{n-2}+x_{n-1}}{3},\quad y_n=\frac{y_{n-3}+y_{n-2}+y_{n-1}}{3},\tag{1.14}$$

而点 P 的坐标应该是数列 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 的极限. 读者如果尝试一下，从式(1.14)出发，就会发现这不是一个简单的求极限问题. 我们将在第 5 节看到怎样利用差分方程来解决这个问题.

【例 2】 有一位幼儿园老师给 20 个小朋友分糖果. 她打开糖盒看了看，然后把盒里糖果的 $\frac{1}{2}$ 分给第 1 个小朋友. 接着从另一个盒中抓了 4 块糖补充进来，再将盒里糖果的 $\frac{1}{3}$ 分给第 2 个小朋友. 以后她一直这样，先从别的盒子中抓 4 块糖补充进来，再将盒里糖果的 $\frac{1}{n+1}$ 分给第 n 个小朋友. 这样，所有的小朋友都分过了，盒里最后余下 40 块糖. 问哪个小朋友分得的糖最多？

看到这里你也许会怀疑：难道这也与差分方程有关吗？如果你要用推算的方法找答案，可别从第 1 个小朋友开始，而应该从最后的结果算起. 只要推算几次，就会觉得其中有一种固定的关系，而这恰好可以表达为一个差分方程！解出这个差分方程，那么分糖果的情况便明白了. 那时你一定会说这个老师分糖分得很公平呢. 有意思吗？在第 8 节我们将对这个问题先建立一个差分方程，再做出答案.

还可以举一些例子. 如：你能将根式

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{重根号}}\tag{1.15}$$

写成一个关于 n 的解析式吗？又如：你会求

$$C_n^0+2\cdot 2^1C_n^1+3\cdot 2^2C_n^2+\cdots+(n+1)\cdot 2^nC_n^n \tag{1.16}$$

的和吗？这些问题不是一眼看去就知道与差分方程有关的.

甚至有的数学游戏也与差分方程有不解之缘.如果你的朋友中有人喜欢玩猜测型的游戏，你不妨拿下面一个问题给他猜猜看：

有一位先生，有着良好的储蓄习惯.他每月都要将自己收入的一部分存入银行，待需要花费时再取出来.在去年最后一个月中，他存入和取出的钱相同.今年他的计划是：每个月存入的钱比前一个月取出的钱多 1 元，而取出的钱比前一个月存入的钱少 1 元.那么从今年开始，他每个月中是存入的多，还是取出的多？

假如你的朋友很粗心，可能会轻而易举地上当；如果是位乐于细算的朋友，你不妨把问题问得更难些，如：这位先生是不是有哪个月存的少，取的多？为什么？还可以改变去年最后一个月的存取情况，那样答案立即就可能改变.这更有利于把问题编得出人意料.

读到这里，可能有的读者已经感到留下的问题太多了.不要紧，在以后的各节中，它们会与我们重新见面，并一一得到解答.总的来讲，我们的目的是要搞清楚：

(1) 差分方程是怎么回事；

(2) 怎样解差分方程；

(3) 差分方程有哪些应用.

习题 1

1. (福建省 2009 年高考题)五位同学围成一圈依序循环报数，规定：

(1) 第 1 位同学首次报出的数为 1，第 2 位同学首次报出的数也为 1，之后每位同学所报出的数都是前两位同学所报出的数之和；

(2) 若报出的数为 3 的倍数，则报该数的同学需拍手一次.

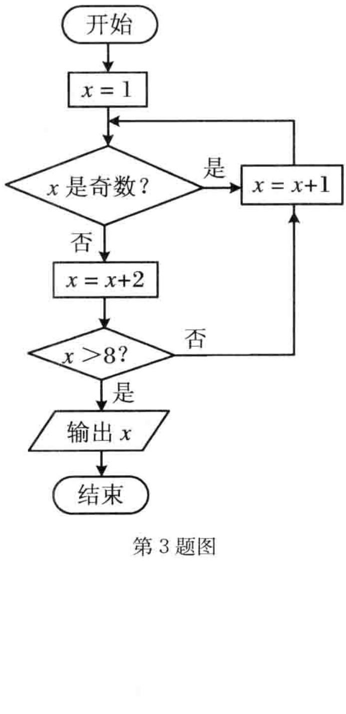
当第 30 个数被报出时，五位同学拍手的总次数是多少？

2. 某人上楼时，可以每步迈一阶，也可以迈两阶.他从地面到达第 20 级台阶，共有多少种不同的上法？

3. 右图是一个程序框图(算法流程图).

(1) 该算法的输出值 x 是多少？

(2) 如果将图中的判断框中的条件“$x>8$?”改为“$x>200$?”，则程序运行结束时，共对变量 x 赋值了多少次？



第 3 题图

4. 三人传球，由甲发球，经过 6 次传球后，球回到甲手中的传法有多少种？

2 定义与定理

在第 1 节中,我们已经对差分方程有了初步的印象和了解.本节中,我们来系统地对一些概念给予定义,并引入两个定理,为以后几节中有关解差分方程的内容做准备.

前面我们曾提到,差分方程是一个数列相邻几项之间均满足的一个关系式.一般地,设$\{a_n\}$是一个数列(或者说,$\{a_n\}$是一个整数变量函数),我们把关系式

$$a_n = F(a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k}, n) \tag{2.1}$$

叫做一个**差分方程**,其中 F 是一个 $k+1$ 元函数(k 是一个固定的正整数).从数列的意义看,差分方程也就是数列的递推关系式.例如上一节的式(1.1),(1.8)和(1.9).还可以举几个例子,如

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}, \tag{2.2}$$

$$f(n) = 2f(n-1) + nf(n-3), \tag{2.3}$$

等等,都是差分方程.

在式(2.1)中,除了 n 之外,a_n 还是$a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_{n-k}$的函数.我们把这样的差分方程叫做 k **阶**的.就是说,k 阶差分方程是一个数列中任意$k+1$ 个相邻项之间均满足的关系式.前一节的方程(1.1)是二阶的,而方程(1.8)和(1.9)是一阶的;本节中方程(2.2)是一阶的,但方程(2.3)是三阶的.

我们把差分方程

$$a_n = c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \cdots + c_k a_{n-k} + c \qquad (2.4)$$

叫做**线性差分方程**，其中 $c_1, c_2, \cdots, c_k, c$ 都是 n 的已知函数，当 $c=0$ 时，又叫做**线性齐次差分方程**. 如果 $c_1, c_2, \cdots, c_k$ 都是常数，则把式(2.4)叫做**常系数线性差分方程**.

上节的式(1.1)和(1.9)是常系数线性齐次差分方程；而方程(1.8)在 $d \neq 0$ 时是常系数线性非齐次的；方程(2.3)虽不是常系数的，但却是线性齐次差分方程，而方程(2.2)则是非线性的.

我们知道，对一个给定的代数方程，通常是不需要附加什么条件便可以求解的. 但差分方程呢？我们再次看一看方程

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}.$$

由 $F_1 = 1, F_2 = 1$，我们便可以根据方程计算出 $F_3, F_4, F_5, \cdots$，这就是说，数列 $\{F_n\}$ 的各项均被唯一确定了，它们都满足公式(1.3). 但如果我们将前两项稍做改变，变为 $F_1 = 1, F_2 = 2$，以后各项便成为3,5,8,13,…，恰好与斐波那契数列的各项序号相差1，因此方程的解也相应地变成

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

若前两项变为

$$F_1 = F_2 = 2,$$

则以后各项都是原来的 2 倍，解便成了

$$F_n = \frac{2}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right].$$

可见 F_1 和 F_2 的值对方程的解有重要的影响，应该说，它们与差分方程(1.1)共同决定了解的表达式. 我们把上一节的式