国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

信息与计算科学丛书—67

偏微分方程数值解法

陈艳萍 鲁祖亮 刘利斌 编著

科学出版社

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

“十二五”国家重点图书出版规划项目

信息与计算科学丛书　67

偏微分方程数值解法

陈艳萍　鲁祖亮　刘利斌　编著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书试图用较少的篇幅描述偏微分方程的几种数值方法. 主要内容包括: Sobolev 空间初步, 椭圆边值问题的变分问题, 椭圆问题的有限差分方法, 抛物型方程的有限差分方法, 双曲型方程的有限差分方法, 椭圆型方程的有限元方法, 抛物及双曲方程的有限元方法, 椭圆型方程的混合有限元方法, 谱方法等. 本书内容丰富, 深入浅出, 尽可能地用简单的方法来描述一些理论结果, 并根据作者对有限差分、有限元、混合有限元、谱方法的理解和研究生教学要求, 全面、客观地评价各种数值计算方法, 并列举一些数值计算的例子, 阐述许多新的学术观点.

本书可作为高等学校数学系高年级本科生和研究生的教材或参考书, 也可作为计算数学工作者和从事科学与工程计算的科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

偏微分方程数值解法/陈艳萍, 鲁祖亮, 刘利斌编著. —北京: 科学出版社, 2015.1

(信息与计算科学丛书 67)

"十二五"国家重点图书出版规划项目

ISBN 978-7-03-042427-3

Ⅰ. ①偏… Ⅱ. ①陈… ②鲁… ③刘… Ⅲ. ①偏微分方程-数值计算-高等学校-教材 Ⅳ. ① O241.82

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014) 第 260502 号

责任编辑: 王丽平 / 责任校对: 彭 涛
责任印制: 肖 兴 / 封面设计: 陈 敬

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京通州皇家印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015 年 1 月第 一 版 开本: 720 × 1000 1/16
2015 年 1 月第一次印刷 印张: 14
字数: 280 000

定价: 88.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末, 由已故著名数学家冯康先生任主编、科学出版社出版了一套《计算方法丛书》, 至今已逾 30 册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨, 学术水平高、社会影响大, 对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整, 将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并, 定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要, 科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》, 组建了新的编委会, 并于 2004 年 9 月在北京召开了第一次会议, 讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者, 针对当前的学科前沿、介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性, 体现新的研究方向. 内容力求深入浅出, 简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作, 在学术界赢得了很好的声誉, 在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版, 以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

前　言

科学与工程领域中的许多问题都可用偏微分方程来描述, 这些具有实际应用背景的偏微分方程中只有很少一部分可以求出解析解, 而绝大多数方程只能通过近似方法, 并利用计算机进行求解. 近年来, 随着计算机的不断更新和数值方法的飞速发展, 科学计算及其理论研究已成为现代科学研究的主要手段.

当今科学计算已经广泛渗透到很多专业领域中, 形成了许多新的学科分支, 如计算流体力学、计算化学、计算生物学、计算材料科学等, 而计算数学是联系它们的纽带和基础. 因此, 计算数学工作者和其他理工科专业的科技工作者都需要学习和掌握偏微分方程数值解法的知识, 以便结合自身专业开展与科学计算相关的研究工作.

本书试图用较少的篇幅描述偏微分方程的几种数值方法. 其主要内容包括: Sobolev 空间初步, 椭圆边值问题的变分问题, 椭圆问题的有限差分方法, 抛物型方程的有限差分方法, 双曲型方程的有限差分方法, 椭圆型方程的有限元方法, 抛物及双曲方程的有限元方法, 椭圆型方程的混合有限元方法, 谱方法等. 本书内容丰富, 深入浅出, 尽可能地用简单的方法来描述一些理论结果, 并根据作者对有限差分、有限元、混合有限元、谱方法的理解和研究生教学要求, 全面、客观地评价各种数值计算方法, 并列举一些数值计算的例子, 阐述许多新的学术观点. 各章内容充实, 例题选题灵活, 题型丰富, 覆盖面广, 并配有习题.

本书同以前的教材最明显的区别, 就是不以简单化和概念化的写法去介绍各种偏微分方程数值解法, 而是尽可能站在学术研究的前沿, 全面、客观地去评价各种方法, 阐述了许多新的学术观点. 本书尽量以朴实、鲜活的语言, 把原本十分复杂、枯燥的数学内容, 以生动而简明的形式来描述, 达到学术性、严肃性、通俗性的完美结合. 书中对于任何超越大学课程的内容, 都尽量给出较为详实的说明. 对一般的定理一般不给出证明, 但是对于一些重要的定理, 本书则给出较为简单的证明. 本书也给出了主要的参考文献, 有兴趣的读者可以在其中找到更为全面的证明.

本书可作为高等学校数学及理工科专业高年级本科生和研究生的教材或参考书, 也可作为高校教师、计算数学工作者和从事科学与工程计算的科研人员的参考书, 对报考计算数学专业研究生的读者也具有一定的参考价值.

限于编者水平, 同时编写时间也比较仓促, 不妥之处在所难免, 希望广大读者提出宝贵的批评和修改意见.

目　　录

第 1 章 引　　言

在对偏微分方程及其数值解的研究中，通常用建立在函数空间 X 和 Y 上的算子 L 来刻画一些方程及其边值问题的结构，然后借助泛函分析的方法来研究方程的性质. 这里主要的困难就是如何选择合适的函数空间使得算子 L 具有可解性. 本章即将介绍的 Sobolev 空间正是在偏微分方程中所必需的函数空间, 具体内容可参见文献 [1], [2]. 为了让读者更好地理解本教材中的内容, 这里向读者介绍一些的 Sobolev 空间的基本知识.

1.1 预 备 知 识

1.1.1 符号说明

本小节简单地介绍本书中常用的一些数学符号.

$\mathbb{N}$ 表示整数集合.

$\mathbb{R}$ 表示实数集合.

$\mathbb{R}^n$ 表示 n 维欧氏空间.

Ω 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的区域, 即连通开集, 当 $n=1$ 时, 即为开区间, $\partial\Omega$ 为 Ω 的边界.

Δ 表示 Laplace 算子: $\Delta u = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$.

∇ 表示梯度算子: $\nabla u = \operatorname{grad} u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$.

$C_0^m(\Omega)$ 表示 $C^m(\Omega)$ 中所有在 Ω 内有紧支集的函数的集合.

$C_0^\infty(\Omega)$ 表示在 Ω 中具有紧支集的无穷次可微函数的集合.

$C^m(\Omega)$ 表示在 Ω 内 m 次连续可微的函数的集合.

$C^m(\overline{\Omega})$ 表示在闭区域 $\overline{\Omega}$ 上 m 次连续可微的函数的集合.

div 表示散度算子: $\operatorname{div} = \nabla \cdot v = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial v_i}{\partial x_i}$, 其中 $v = (v_1, \cdots, v_n)$.

H^* 表示空间 H 上的线性连续泛函全体.

$L_{\mathrm{loc}}^1(\Omega)$ 表示 Ω 上的局部可积函数集合.

$L^p(\Omega)$ 表示 Ω 上的 p 次 Lebesgue 可积函数的全体.

$\operatorname{meas}(\Omega)$ 表示 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 的 Lebesgue 测度.

$\boldsymbol{n}$ 表示 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量.

$P_k(\boldsymbol{x})$ 表示次数不超过 k 的多项式全体.
$S^0(\mathcal{T}_h) \subset L^2(\Omega)$ 表示在 $\mathcal{T}_h$ 上的分片线性空间.
$S^1(\mathcal{T}_h) \subset H^1(\Omega)$ 或者 $S_0^1(\mathcal{T}_h) \subset H_0^1(\Omega)$ 表示连续的分片线性函数.
$\boldsymbol{t}$ 表示沿着曲线或边界 E 的单位切向量.
边界算子的定义域为 $D_B(\mathcal{L}) = \{v \in D(\mathcal{L}) | \text{在}\partial\Omega_b\text{上有}\mathcal{B}v = 0\}$.
二阶求导算子 $\mathcal{L}$ 的定义域为 $D(\mathcal{L}) = \left\{ v \in C^1(-1,1) \middle| \dfrac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} \in L_\omega^2(-1,1) \right\}$.
范数 $\| u \|_{m-1/2,\partial\Omega} = \inf\limits_{u\in H^m(\Omega),\gamma_0 v = u} \| v \|_{m,\Omega}$.
范数 $\| u \|_{L^p(0,T;X)} := \left(\displaystyle\int_0^T \|u(t)\|^p \mathrm{d}t \right)^{1/p} < \infty$.
范数 $\| u \|_{L^\infty(0,T;X)} := \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \| u(t) \| < \infty$.
范数 $\| u \|_{C([0,T];X)} := \max\limits_{0\leqslant t\leqslant T} \| u(t) \| < \infty$.
集合 E_h 表示在 $\mathcal{T}_h$ 中的所有单元边的集合.
空间 $H_0^1(\Omega) = \{\phi \in H^1(\Omega) |\, \phi|_{\partial\Omega} = 0\}$.
空间 $\tilde{H}^1(\Omega) = \left\{ \phi \in H^1(\Omega) \middle| \displaystyle\int_\Omega \phi \mathrm{d}x = 0 \right\}$.
空间 $H_0^2(\Omega) = \{v | v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = 0, \gamma_1 v = 0\}$.
空间 $U_0 = \{u \in U | b(u,v) = 0, \forall v \in V\}$.
空间 $U^0 = \{g \in U' | g(u) = 0, \forall u \in U_0\}$.

空间 $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$($m$ 为整数, $\alpha \in (0,1]$) 表示 $C^m(\Omega)$ 中 m 阶导数为 α 次 Hölder 连续函数的全体. 空间 $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$ 上定义的范数为

$$\| u \|_{C^{m,\alpha}} = \| v \|_{W^{m,p}(\Omega)} + \max_{0\leqslant|\beta|\leqslant m} \sup_{x,y\in\overline{\Omega},x\neq y} \frac{|\partial^\beta u(x) - \partial^\beta u(y)|}{\| x-y \|^\alpha}.$$

算子 $[v] : H^1(\mathcal{T}_h) \to L^2(E_h)$ 表示函数 v 的一个沿着边 E 的跳跃算子.
除了上述数学符号外, 本书中经常用下面几个重要的数学公式.

设 $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, \cdots, n_n)$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量. 对任意 $u, v \in C^1(\Omega)$, 有下述Green 公式:

$$\int_\Omega u \cdot \partial_i v \mathrm{d}x = -\int_\Omega \partial_i u \cdot v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} uv \cdot n_i \mathrm{d}S, \quad i = 1,2,\cdots,n.$$

由 Green 公式, 可以导出下列积分公式:

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \mathrm{d}x = -\int_\Omega \Delta u \cdot v \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}} \cdot v \mathrm{d}S, \\ \forall u \in H^2(\Omega),\ \forall v \in H^1(\Omega),$$

$$\int_{\Omega}(u\Delta v-\Delta u\cdot v)\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right)\mathrm{d}S,\quad \forall u,v\in H^2(\Omega),$$

以及对任意 $u\in H^4(\Omega),v\in H^2(\Omega)$ 有

$$\int_{\Omega}\Delta u\cdot\Delta v\mathrm{d}x=\int_{\Omega}\Delta^2u\cdot v\mathrm{d}x-\int_{\partial\Omega}v\frac{\partial(\Delta u)}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S+\int_{\partial\Omega}\Delta u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{n}}\mathrm{d}S.$$

1.1.2 泛函基础知识

本小节先简单介绍 $L^p(\Omega)$ 空间的定义和相关性质, 然后再引入与本书有关的一些泛函基础知识.

假定 Ω 是 n 维空间 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集, 设 $\int_{\Omega}f(x)\mathrm{d}x$ 为函数 $f(x)$ 的 Lebesgue 积分, 对 $1\leqslant p<+\infty$, 记范数

$$\| f(x)\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_{\Omega}|f(x)|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p},$$

则 $L^p(\Omega)$ 空间可定义为

$$L^p(\Omega)=\{f(x)|\ \| f(x)\|_{L^p(\Omega)}<+\infty\}.$$

对于 $p=+\infty$, 定义范数

$$\| f(x)\|_{\infty,\Omega}=\operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega}|f(x)|,$$

则 $L^\infty(\Omega)$ 空间可定义为

$$L^\infty(\Omega)=\{f(x)|\|f(x)\|_{L^\infty(\Omega)}<+\infty\}.$$

关于 $L^p(\Omega)$ 空间, 有下面几个重要不等式.

Minkowski 不等式 若 $1\leqslant p\leqslant+\infty$, 则对任意 $f,g\in L^p(\Omega)$，有

$$\| f+g\|_{L^p(\Omega)}\leqslant\| f\|_{L^p(\Omega)}+\| g\|_{L^p(\Omega)}.\tag{1.1.1}$$

Hölder 不等式 若 $1\leqslant p,q\leqslant+\infty,1/p+1/q=1$, 则对任意 $f\in L^p(\Omega),g\in L^q(\Omega)$, 有 $fg\in L^1(\Omega)$, 并且

$$\| fg\|_{L^1(\Omega)}\leqslant\| f\|_{L^p(\Omega)}\| g\|_{L^q(\Omega)}.\tag{1.1.2}$$

Schwarz 不等式(Hölder 不等式的特殊情形) 对 $p=q=2$, 若 $f,g\in L^2(\Omega)$, 则 $fg\in L^1(\Omega)$ 并且

$$\| fg\|_{L^1(\Omega)}\leqslant\| f\|_{L^2(\Omega)}\| g\|_{L^2(\Omega)}.\tag{1.1.3}$$

由 Minkowski 不等式可知，前面定义的 $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ 是一种范数, 因此可以验证 $(L^p(\Omega), \|\cdot\|_{L^p(\Omega)})$ 是一个赋范线性空间.

下面给出有界线性算子及其范数的定义.

定义 1.1.1　假设 W, V 均为 Hilbert 空间, 线性算子 $T: V \to W$. 如果存在常数 $C > 0$, 使得

$$\| Tv \|_W \leqslant C \| v \|_V, \quad \forall v \in V,$$

则称 T 为有界线性算子, 其范数可定义为

$$\| T \| = \sup_{v \in V \setminus 0} \frac{\| Tv \|_W}{\| v \|_V}.$$

特别地, 设 V^* 为 V 的共轭空间, 则可定义 V^* 中的线性泛函 L 的范数为

$$\| L \|_{V^*} = \sup_{v \in V \setminus 0} \frac{|Lv|}{\| v \|_V}.$$

定理 1.1.1(Riesz 表示定理)　设 V 是 Hilbert 空间, 其内积定义为 $(\cdot,\cdot)$, 则对 V 中的任意的有界线性泛函L, 存在唯一的 u, 使得 $\| u \|_V = \| L \|_{V^*}$, 且

$$L(v) = (v, u), \quad \forall v \in V. \tag{1.1.4}$$

证明　首先证明唯一性: 假设 u_1 和 u_2 满足方程 (1.1.4), 则

$$(v, u_1) = (v, u_2), \quad \forall v \in V.$$

在上式中令 $v = u_1 - u_2$, 可得

$$(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0,$$

即 $u_1 = u_2$.

然后证明存在性: 若 $\forall v \in V$, 有 $L(v) = 0$, 则 $u = 0$. 若存在 $\widetilde{v} \in V$, 使 $L(\widetilde{v}) \neq 0$, 则为了获得 u, 可先构造如下子空间:

$$V_0 = \{v \in V | L(v) = 0\}.$$

易知, V_0 是 V 的闭子空间. 又由 $V = V_0 + V_0^{\perp}$, 存在 $v_0 \in V_0$ 和 $w \in V_0^{\perp}$, 使得

$$\widetilde{v} = v_0 + w.$$

于是有

$$0 \neq L(\widetilde{v}) = L(v_0) + L(w) = L(w).$$

又 $\forall v \in V$, 有

$$L\left(v-\frac{L(v)}{L(w)}w\right)=L(v)-\frac{L(v)}{L(w)}L(w)=0,$$

即 $v-\frac{L(v)}{L(w)}w \in V_0$, 进一步由 $w \in V_0^{\perp}$, 得

$$0=\left(v-\frac{L(v)}{L(w)}w, w\right)=(v,w)-\frac{L(v)}{L(w)}\parallel w \parallel^2,$$

即

$$L(v)=\left(v, \frac{L(w)}{\parallel w \parallel^2}w\right).$$

因此, 取 $u=\frac{L(w)}{\parallel w \parallel^2}w$, 有

$$L(v)=(v,u), \quad \forall v \in V.$$

u 的存在性证明完毕.

1.2 Sobolev 空间初步

下面给出本书必备的有关 Sobolev 空间的基本理论, 有关系统的知识可参看参考书目.

1.2.1 广义导数

给定函数 $u \in C^1(\Omega)$, 由分部积分可知, 对任意的 $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, 就有

$$\int_\Omega u\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\mathrm{d}x=-\int_\Omega \phi\frac{\partial u}{\partial x_i}\mathrm{d}x, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{1.2.1}$$

一般地, 对于一个正整数 k, 给定函数 $u \in C^k(\Omega)$ 和一个多重指标 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$, $\alpha_i \geqslant 0$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=k$. 作 k 次分部积分有

$$\int_\Omega u\partial^\alpha\phi\mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \phi\partial^\alpha u\mathrm{d}x, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega),\ 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{1.2.2}$$

其中

$$\partial^\alpha=\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}}\cdots\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

上面两式的结论都是 u 在 Ω 上 k 次连续可微的情况下成立的. 如果 u 在 Ω 上只是局部可积, 是否有类似上述的 (1.2.2) 等式呢? 以下给出广义导数的定义.

定义 1.2.1 假设函数 u 在区域 Ω 上局部可积. 若存在区域 Ω 上局部可积函数 v, 使得

$$\int_\Omega v\phi\mathrm{d}x=-\int_\Omega u\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\mathrm{d}x, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega), 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{1.2.3}$$

则称 v 是 u 关于自变量 x_i 的一阶广义导数(弱导数), 记作 $v=\partial u/\partial x_i$.

特别地, 若 $u\in C^1(\Omega)$, 则广义导数 $\partial u/\partial x_i$ 和古典意义下的偏导数 $\partial u/\partial x_i$ 一致. 因此, 广义导数的概念其实是古典导数概念的一个推广.

类似地, 可以给出 α 阶广义导数的定义.

定义 1.2.2 假设函数 u 在区域 Ω 上局部可积. 若存在一个在区域 Ω 上局部可积函数 v, 使得

$$\int_\Omega v\phi \mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega u\partial^\alpha\phi \mathrm{d}x,\quad \forall\phi\in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.2.4}$$

则称 v 是 u 的一个α 阶广义导数, 记为 $v=\partial^\alpha u$.

也就是说, 对于给定的 u, 若存在一个函数 v, 使得对任意的 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$, 有式 (1.2.4) 成立, 则 $\partial^\alpha u=v$ 称为 u 的 α 阶广义导数. 若满足式 (1.2.4) 的 v 不存在, 则 u 的 α 阶广义导数不存在. 如果 u 的 α 阶广义导数存在, 那么是不是唯一的呢? 关于此问题, 有以下结论.

定理 1.2.1 若 u 的 α 阶广义导数存在, 则在除去一个零测度集的意义下唯一.

证明 设有局部可积的函数 $v,\widetilde{v}$, 若对任意的 $\phi\in C_0^\infty(\Omega)$ 满足

$$\int_\Omega u\partial^\alpha\phi \mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\phi \mathrm{d}x=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega \widetilde{v}\phi \mathrm{d}x,$$

则有

$$\int_\Omega (v-\widetilde{v})\phi \mathrm{d}x,\quad \forall\phi\in C_0^\infty(\Omega),$$

即 $v-\widetilde{v}=0$ 在 Ω 上几乎处处成立. 也就是说, 在去掉一个零测度集的意义下, u 的 α 阶广义导数唯一.

例 1.2.1 局部可积函数

$$g(x)=\begin{cases}-1, & -1\leqslant x\leqslant 0,\\ 1, & 0<x\leqslant 1\end{cases}$$

是函数 $f(x)=|x|$ 在 $\Omega=(-1,1)$ 上的广义导数, 即 $f'(x)=g(x)$, 但是在古典意义下, $f(x)$ 在 $\Omega=[-1,1]$ 上不可导.

1.2.2 Sobolev 空间的定义

给定 $\mathbb{R}^n$ 中的有界开集 Ω 和 Ω 中的任意紧集 K, 定义局部可积函数的集合

$$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)=\{u|u\in L^1(K),\ \forall K\in\Omega\}$$