普通高等教育“十二五”规划教材

概率论与数理统计

主　编　蔡高玉
副主编　朱晓颖　陈小平

科学出版社

普通高等教育"十二五"规划教材

概率论与数理统计

主　编　蔡高玉
副主编　朱晓颖　陈小平

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书主要是为独立学院、民办高校的本科非数学专业学生编写的. 全书共8章,包括随机事件与概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验等内容.

本书可作为民办高等学校、独立学院本科非数学专业的数学教材,也可供其他高等学校的学生使用.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/蔡高玉主编. —北京:科学出版社,2013
普通高等教育"十二五"规划教材
ISBN 978-7-03-038382-2

Ⅰ.①概… Ⅱ.①蔡… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材 ②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2013)第189879号

责任编辑:相 凌 李香叶 / 责任校对:刘亚琦
责任印制:肖 兴 / 封面设计:华路天然工作室

科学出版社出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新科印刷厂印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2013年8月第 一 版 开本:787×1092 1/16
2013年8月第一次印刷 印张:11
字数:288 000

定价: 28.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　　言

随着科学和技术的高速发展、数学自身的发展与应用领域的不断扩大，当今数学的科学地位发生了巨大的变化，这迫使数学教育必须针对形势的发展与变化，进行教学内容及课程体系的改革.

当前，民办高校、独立学院大多定位于培养创新应用型本科人才，但是教学时照搬公立大学成熟的概率论与数理统计教材，会导致概率论与数理统计教育偏离应用型人才的培养目标. 因此，通过课程改革加强对学生实践能力与创新能力的培养，逐步提高办学质量，逐步形成民办高校、独立学院的办学特色已成为此类院校的当务之急. 正是在这一形势下，我们在总结多年本科教学经验、探索此类院校本科教学发展动向、分析同类教材发展趋势的基础上，编写了这本适合民办高校、独立学院本科生工科类专业使用的概率论与数理统计教材.

本书依据教育部《工科类本科数学基础课程教学基本要求》编写而成，遵循“重视基本概念、培养基本能力、力求贴近实际应用”的原则，充分考虑这一课程是处理随机现象的课程. 我们致力于讲清最基本的概念和方法，并用大量的例题来说明其应用的广泛性.

本书突出概率论与数理统计的基本思想和基本方法：帮助学生掌握基本概念，增强实用性，加大课堂信息量；对很多抽象的概念，尽量采用通俗的语言加以描述. 加强基本能力的培养：本书例题、习题较多，有助于学生检测学习效果和巩固相关知识. 内容和难度适中：考虑到学生的数学基础，对于一些难度较大且超出教学基本要求的知识不予编入.

本书第 1、2、8 章由蔡高玉编写，第 3、4、7 章由朱晓颖编写，第 5、6 章由陈小平编写. 全书由蔡高玉统稿.

虽然我们努力使本书成为一本既有新意又便于教学的教材，但由于缺乏经验而且水平有限，书中不尽如人意的地方，恳请各位专家和广大读者批评指正，提出宝贵意见，我们将作进一步改进.

编　者

2013 年 4 月

目　　录

第 1 章　随机事件与概率

概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学分支学科. 本章介绍概率论中的基本概念——随机事件与随机事件的概率,并进一步讨论随机事件的关系与运算以及概率的性质及计算方法. 这些内容是进一步学习概率论的基础.

1.1　排列与组合

在古典概型计算事件的概率时,我们会经常用到排列组合及其总数计算公式. 为了方便读者学习,这里给出排列组合的定义及相关公式.

1.1.1　两个基本原理

1. *乘法原理*

如果完成一个事件有 k 个步骤,第一步有 n_1 种方法,第二步 n_2 种方法,…,第 k 步有 n_k 种方法,而且完成这件事情必须经过每一步,那么完成这件事共有

$$n=n_1\times n_2\times\cdots\times n_k$$

种方法.

例如,从一楼到二楼有 3 个楼梯可以走,从二楼到三楼有 2 个楼梯可以走,那么某人从 1 楼到 3 楼共有 3×2=6 种走法.

2. *加法原理*

如果完成一个事件有 k 类方法,第一类有 n_1 种完成方法,第二类 n_2 种完成方法,…,第 k 类有 n_k 种完成方法,任何两种方法都不相同,那么完成这件事共有

$$n=n_1+n_2+\cdots+n_k$$

种方法.

例如,由甲城到乙城去旅游有 3 类交通工具:汽车、火车、飞机. 而汽车有 5 个班次,火车有 3 个班次,飞机有 2 个班次,那么从甲城到乙城去旅游共有 5+3+2=10 个班次可供旅游者选择.

1.1.2　排列

1. *选排列和全排列*

从 n 个不同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中,任取 $k(k\leqslant n)$ 个元素 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_n}$ 按照一定顺序排成一列 $(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k})$,称为从 n 个元素中选 k 个元素的**选排列**,特别地,当 $k=n$ 时,称 $(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k})$ 为全排列.

下面看选排列和全排列的总数计算方法.

由于排在第 1 个位置上的元素 a_{i_1} 可以是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个元素中的某一个,有 n 种选

法，因为是不放回选取，排在第 2 个位置上的元素 a_{i_2} 只能是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中除去 a_{i_1} 的 $n-1$ 个元素中的某一个，从而 a_{i_2} 有 $n-1$ 种选法，…，排在第 k 个位置上的元素 a_{i_k} 只能是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中除去 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{k-1}}$ 的 $n-k+1$ 个元素中的某一个，从而 a_{i_k} 有 $n-k+1$ 种选法. 按照乘法原理，从 n 个不同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中，任取 $k(k\leqslant n)$ 个元素可以构成

$$\mathrm{A}_n^k=n(n-1)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

种不同的选排列. 特别地，n 个不同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 可以构成

$$\mathrm{A}_n^k=n(n-1)\cdots1=\frac{n!}{0!}=n!$$

种不同的全排列(规定).

例 1　用 1,2,3,4,5 这 5 个数字可以组成多少个没有重复数字的三位数？

解　组成三位数时首位数有 5 种取法，由于不允许有重复数字，则十位数有 4 种取法，同理，个位数有 3 种取法，故可以组成没有重复数字的三位数个数为

$$\mathrm{A}_5^3=5\times4\times3=60.$$

例 2　有 10 本不同的书，5 个人去借，每人借 1 本，问有多少种不同的借法？

解　这个问题相当于从 10 本不同的书(10 个不同的元素)选 5 本书(5 个元素)构成的不同选排列的种数，故有

$$\mathrm{A}_{10}^5=\frac{10!}{5!}=30240$$

种借法.

2. 有重复的排列

从 n 个不同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中，每次取一个，放回后再取下一个，如此连续取 k 次所得的排列 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}$ 按照一定顺序排成一列$(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k})$，称为从 n 个元素中选 $k(k\geqslant1)$ 个元素的**有重复排列**. 这里的 k 允许大于 n.

下面看有重复排列的总数计算方法.

由于排在第 1 个位置上的元素 a_{i_1} 可以是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个元素中的某一个，有 n 种选法，排在第 2 个位置上的元素 a_{i_2} 也可以是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个元素中的某一个，故也有 n 种选法，同样，排在第 k 个位置上的元素 a_{i_k} 也可以是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个元素中的某一个，故也有 n 种选法. 按照乘法原理，从 n 个不同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中有放回抽取 $k(k\geqslant1)$ 个元素可以构成

$$n\times n\times\cdots\times n=n^k$$

种不同的有重复排列.

例 3　用 1,2,3,4,5 这 5 个数字可以组成多少个三位数？

解　此例和例 1 的区别在于组成三位数的数字可以重复，是可重复排列问题，可组成的三位数个数为 $5^3=125$.

例 4　手机号码为 11 位数，问以 139 开头可以组成多少个手机号码？

解　从第 4 位到第 11 位每一位都可以是 0,1,2,…,9 这 10 个数字中的任意一个，是可重复排列问题，故手机号码个数为10^8.

1.1.3 组合

1. 组合的定义

从 n 个不同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中，任取 $k(k\leqslant n)$ 个元素 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_k}$ 而不考虑其顺序组成一组 $(a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_k})$，称为从 n 个元素中选 k 个元素的组合，此种组合的总数为 C_n^k 或 $\binom{n}{k}$.

可以把选排列分解成下面两个步骤来完成：

第一步，从 n 个不同的元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中任意抽取 $k(k\leqslant n)$ 个元素组成一组(这是一个组合)；

第二步，将这一组 k 个元素进行排列(这是一个全排列)，从而有

$$A_n^k=C_n^k k!.$$

由此得到组合计算公式，对 $1\leqslant k\leqslant n$ 有

$$C_n^k=\binom{n}{k}=\frac{A_n^k}{k!}=\frac{n!}{k!\ (n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!\ (n-k)!},$$

且规定 $C_n^0=1$. 若 $k>n$，规定 $C_n^k=0$.

排列与组合都是计算“从 n 个元素中任取 k 个元素”的取法总数公式，其主要区别在于：如果不考虑取出元素间的次序，则用组合公式，否则用排列公式，而是否考虑元素间的次序，可以从实际问题中得以辨别.

例 5　有 10 个球队进行单循环比赛，问需安排多少场比赛？

解　这是从 10 个球队中任选 2 个进行组合的问题，故选法总数

$$C_{10}^2=\frac{10\times 9}{2!}=45,$$

即需要安排 45 场比赛.

例 6　一个盒子中有 20 只球，其中红球 15 只，白球 5 只，从中任取 3 只球，其中恰有 1 只白球，问有多少种不同的取法？

解　取出的 3 只球中恰有 1 只白球，这只白球必须从 5 只白球中抽取，有 C_5^1 种取法；而取出的 3 只球中另外 2 只是红球，必须从 15 只红球中抽取，有 C_{15}^2 种取法，因此取法总数为

$$C_5^1C_{15}^2=5\times\frac{15\times 14}{2!}=525.$$

2. 关于组合的一些常用等式

(1) $C_n^k=C_n^{n-k}$. 事实上，

$$C_n^k=\frac{n!}{k!\ (n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!\ (n-(n-k))!}=C_n^{n-k}.$$

特别地，

$$C_n^0=C_n^n=1.$$

(2) $(a+b)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k a^k b^{n-k}$. 此式称为二项展开式，$C_n^k(k=0,1,2,\cdots,n)$ 称为二项系数.

显然，$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n=2^n$.

1.2　随机事件

在自然界和社会活动中常常会出现各种各样的现象. 有一类现象, 在一定条件下必然发生. 例如, 一枚硬币向上抛起后必然会落地, 同性电荷必然相互排斥, 等等. 这类现象的共同特点是, 在确定的试验条件下它们会必然发生, 称这类现象为**确定性现象**. 另一类现象则不然. 例如, 在相同的条件下, 向上抛一枚质地均匀的硬币, 其结果可能是正面朝上, 也可能是反面朝上, 在每次抛掷之前无法肯定抛掷出现的结果是什么, 这个试验有多于一种可能结果, 但是在试验之前不能肯定试验会出现哪一个结果. 同样地, 同一门大炮对同一目标进行多次射击(同一型号的炮弹), 各次弹着点可能不尽相同, 并且每次射击之前无法肯定弹着点的确切位置, 以上所举的现象都具有随机性, 即在一定条件下进行试验或观察会出现不同的结果(也就是说, 多于一种可能的试验结果), 而且在每次试验之前都无法预言会出现哪一个结果(不能肯定试验会出现哪一个结果), 这种现象称为**随机现象**. 这种现象在大量重复试验中其结果又具有统计规律性, 概率论与数理统计是研究和揭示随机现象统计规律性的一门数学学科.

1.2.1　随机试验与样本空间

1. 随机试验

在实际中我们会遇到各种各样的试验, 包括各种各样的科学实验, 以及对某事物的观察等. 在随机现象的研究中, 我们需要做大量的观测或试验. 下面举一些试验的例子.

E_1: 抛一枚硬币, 观察正面 H, 反面 T 出现的情况.

E_2: 抛一颗骰子, 观察出现的点数.

E_3: 抛一枚硬币三次, 观察正面 H, 反面 T 出现的情况.

E_4: 抛一枚硬币三次, 观察出现正面的次数.

E_5: 记录公交站某时刻的等车人数.

E_6: 从某厂生产的相同型号的灯泡中抽取一只, 测试它的寿命.

E_7: 记录某地区 10 月份的最高气温和最低气温.

在实际生活中还存在许多随机试验的例子. 例如, 彩票的开奖, 质检部门对产品的质量检查等. 这些实验具有共同特点: 对每个试验可以预先知道可能出现的所有可能结果, 但是做实验之前不能知道试验将会出现什么结果, 此外, 试验可以在相同条件下重复进行.

定义 1.1　如果一个试验满足下列条件:

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行;

(2) 试验的所有可能结果是明确的, 可知道的(在试验之前就可以知道的)并且不止一个;

(3) 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个, 但在一次试验之前却不能肯定这次试验出现哪一个结果.

我们称这样的试验是一个**随机试验**, 常用 E 表示. 为方便起见, 也简称为试验, 今后讨论的试验都是指随机试验.

我们是通过随机试验来研究随机现象.

2. 样本空间

对于随机试验来说, 我们感兴趣的往往是随机试验的所有可能结果. 例如, 掷一枚硬币, 我

们关心的是出现正面还是出现反面这两个可能结果. 若我们观察的是掷两枚硬币的试验,则可能出现的结果有(正、正)、(正、反)、(反、正)、(反、反)四种,如果掷三枚硬币,其结果还要复杂,但还是可以将它们描述出来的,总之为了研究随机试验,必须知道随机试验的所有可能结果.

定义 1.2 试验 E 所有可能结果的组成的集合称为**样本空间**,记为 S. 样本空间中的元素,即 E 的每个可能结果称为一个**样本点**,常用 e 表示.

下面写出前面试验 $E_k(k=1,2,\cdots,7)$ 的样本空间 $S_k(k=1,2,\cdots,7)$:

$S_1=\{H,T\}$;

$S_2=\{1,2,3,4,5,6\}$;

$S_3=\{HHH,HHT,HTH,THH,HTT,THT,TTH,TTT\}$;

$S_4=\{0,1,2,3\}$;

$S_5=\{0,1,2,3,\cdots\}$;

$S_6=\{t|t\geqslant 0\}$;

$S_7=\{(x,y)|T_0\leqslant x\leqslant y\leqslant T_1\}$,这里 x 表示最低温度(℃),y 表示最高温度(℃). 并设这一地区 10 月份的温度不会小于 T_0,也不会大于 T_1.

从这些例子可以看出,随着问题的不同,样本空间可以相当简单,也可以相当复杂,在今后的讨论中,都认为样本空间是预先给定的,当然对于一个实际问题或一个随机现象,考虑问题的角度不同,样本空间也可能选择不同.

在实际问题中,选择恰当的样本空间来研究随机现象是概率中值得研究的问题.

1.2.2 随机事件

在实际中,进行随机试验时,人们常常关心满足某种条件的那些样本点所组成的集合.

定义 1.3 试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件**,简称**事件**. 一般用字母 $A,B,C,\cdots$ 或 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 表示. 特别地,由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**.

定义 1.4 在每次实验中,当且仅当这个子集中的一个样本点出现时,称为这一**事件发生**.

定义 1.5 样本空间 S 包含所有的样本点,它是 S 自身的子集,在每次实验中它总是发生,S 称为**必然事件**. 空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点,它也作为样本空间的子集,在每次实验中它总是不发生,$\varnothing$ 称为**不可能事件**.

实质上必然事件就是在每次试验中都发生的事件,不可能事件就是在每次试验中都不发生的事件.

下面举几个事件的例子.

例 1 试验 E_1 有两个基本事件 $\{H\},\{T\}$;试验 E_2 有六个基本事件 $\{1\},\{2\},\cdots,\{6\}$.

例 2 在试验 E_3 中事件 A:"三次出现同一面",即

$$A=\{HHH,TTT\}.$$

例 3 在试验 E_6 中事件 B:"寿命小于 500 小时",即

$$B=\{t|0\leqslant t<500\}.$$

例 4 一批产品共 10 件,其中 2 件次品,其余为正品,任取 3 件,则

$$A=\{\text{恰有一件正品}\},$$
$$B=\{\text{恰有两件正品}\},$$
$$C=\{\text{至少有两件正品}\}.$$

这些都是随机事件，而 $D=\{3$ 件中有正品$\}$ 为必然事件，$E=\{3$ 件都是次品$\}$为不可能事件.

随机事件可有不同的表达方式：一种是直接用语言描述，同一事件可有不同的描述；也可用样本空间子集的形式表示. 此时，需要理解它所表达的实际含义，有利于对事件的理解.

1.2.3 随机事件的关系与运算

对于随机试验而言，它的样本空间 S 可以包含很多随机事件，分析事件之间的关系，可以帮助我们更深刻地认识随机事件，为此需要给出事件之间的关系与运算规律，有助于我们讨论复杂事件.

由于随机事件是样本空间的子集，因而事件的关系与运算和集合的关系与运算完全相类似. 下面给出这些关系和运算在概率论中的提法，并根据“事件发生”的含义给出它们的概率意义.

1. 事件的包含关系与相等

设事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称**事件 B 包含事件 A**，或称**事件 A 包含于事件 B**，记作 $A\subset B$，$B\supset A$.

显然有，$\varnothing\subset A\subset S$.

例如，在试验 E_2 中，令 A 表示“出现 1 点”，B 表示“出现奇数点”，则 $A\subset B$，事件 A 就导致了事件 B 的发生，因为出现 1 点意味着奇数点出现了，所以 $A\subset B$ 可以给上述含义一个几何解释，设样本空间是一个正方体，A，B 是两个事件，也就是说，它们是 S 的子集，“A 发生必然导致 B 发生”意味着属于 A 的样本点在 B 中，由此可见，事件 $A\subset B$ 的含义与集合论是一致的.

若 $A\subset B$ 同时有 $B\subset A$，称 **A 与 B 相等**，记为 $A=B$. 易知相等的两个事件 A 与 B 总是同时发生或同时不发生，在同一样本空间中两个事件相等意味着它们含有相同的样本点.

2. 并(和)事件

称事件“A 与 B 中至少有一个发生”为 A 与 B 的**和事件**，也称为 A 与 B 的**并事件**. 记作 $A\cup B$. $A\cup B$ 发生意味着：或事件 A 发生，或事件 B 发生，或事件 A 和 B 都发生.

显然有，$A\cup\varnothing=A$，$A\cup S=S$，$A\cup A=A$，$A\subset A\cup B$，$B\subset A\cup B$.

若 $A\subset B$，则 $A\cup B=B$.

例 5 设某种圆柱形产品，若底面直径和高都合格，则该产品合格.

令 $A=\{$直径不合格$\}$，$B=\{$高度不合格$\}$，则 $A\cup B=\{$产品不合格$\}$.

例 6 甲乙两人向同一目标射击，令 A 表示“甲命中目标”，B 表示“乙命中目标”，C 表示“目标被命中”，则 $C=A\cup B$.

类似地，设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，称“$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生”这一事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的并，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

称“$A_1,A_2,\cdots$ 中至少有一个发生”这一事件为 $A_1,A_2,\cdots$ 的并，记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

3. 积(交)事件

称事件“A 与 B 同时发生”为 A 与 B 的**积事件**，也称或 A 与 B 的**交事件**. 记作 $A\cap B$ 或

AB. AB 发生意味着：事件 A 发生且事件 B 也发生，也就是说，事件 A 和 B 都发生.

显然有，$A\cap\varnothing=\varnothing$，$A\cap S=A$，$A\cap A=A$，$A\cap B\subset A$，$A\cap B\subset B$.

若 $A\subset B$，则 $AB=B$.

例 5 中若 $C=\{$直径合格$\}$，$D=\{$高度合格$\}$，则 $CD=\{$产品合格$\}$.

设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，称"$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"这一事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的交，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

称"$A_1,A_2,\cdots$同时发生"这一事件为 $A_1,A_2,\cdots$的交，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots$或 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$.

4. 差事件

称"事件 A 发生而 B 不发生"为事件为 A 与 B 的差事件，记作 $A-B$.

显然有，$A-B\subset A$，$A-\varnothing=A$，$A-B=A-AB$.

若 $A\subset B$，则 $A-B=\varnothing$.

例如，在试验 E_2 中，令 A 表示"出现偶数点"，B 表示"出现的点数小于 5"，则 $A-B$ 表示"出现 6 点".

注意在定义事件差的运算时，并未要求一定有 $B\subset A$，也就是说，没有包含关系 $B\subset A$ 照样可作差运算 $A-B$.

5. 互不相容事件(互斥事件)

若两个事件 A 与 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，称 A 与 B 为**互不相容事件**(或互斥事件)，简称 A 与 B 为互不相容.

注意：任意两个基本事件之间都是互不相容的.

例如，在试验 E_2 中，令 A 表示"出现偶数点"，B 表示"出现 5 点"，显然 A 与 B 不能同时发生，即 A 与 B 是互不相容的.

设 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n)$，称 A_1，$A_2,\cdots,A_n$ 互不相容.

6. 对立事件

称"事件 A 不发生"为 A 的对立事件或称为 A 的逆事件，记作 $\overline{A}$，即 $\overline{A}=S-A$. 也就是意味着在一次试验中 A 与 $\overline{A}$ 有且仅有一个发生，不是 A 发生就是 $\overline{A}$ 发生. 即 $A\cup\overline{A}=S$，$A\overline{A}=\varnothing$.

显然有，$\overline{\overline{A}}=A$，$\overline{S}=\varnothing$，$\overline{\varnothing}=S$，$A-B=A\overline{B}=A-AB$.

例 7 设有 100 件产品，其中 5 件产品为次品，从中任取 50 件产品. 记 $A=\{$50 件产品中至少有一件次品$\}$，则 $\overline{A}=\{$50 件产品中没有次品$\}=\{$50 件产品全是正品$\}$.

由此说明，若事件 A 比较复杂，往往它的对立事件比较简单，因此我们在求复杂事件的概率时，往往可能转化为求它的对立事件的概率.

注意：若 A 与 B 为互不相容事件，则 A 与 B 不一定为对立事件. 但若 A 与 B 为对立事件，则 A 与 B 互不相容.

图 1.1～图 1.6 可以直观地表示以上事件之间的关系与运算. 例如，图 1.1 中矩形区域表示

样本空间 S,圆域 A 与圆域 B 分别表示事件 A 与事件 B. 又如图 1.3 中阴影部分表示积事件 AB.

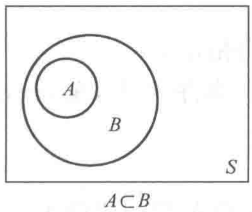

图 1.1

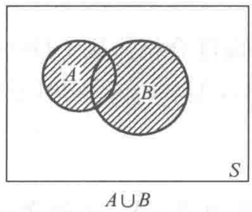

图 1.2

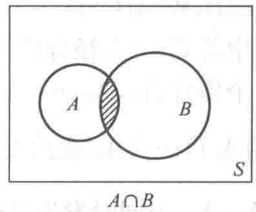

图 1.3

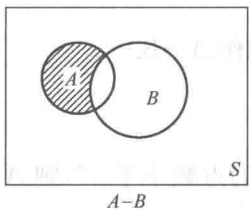

图 1.4

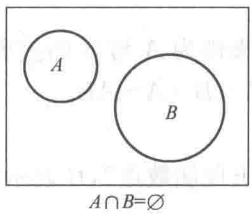

图 1.5

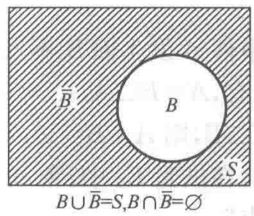

图 1.6

在进行事件运算时,经常要用到下述运算规律,设 A,B,C 为三事件,则有

交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$.

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

分配律 $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C), A\cap(B\cup C)=(A\cup C)\cap(B\cup C)$,

德 · 摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

德 · 摩根律也叫对偶律,对于 n 个事件或无穷可列个事件,德 · 摩根律也成立,即

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{n}A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i};$$

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\overline{A_i},\quad \overline{\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i}=\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{A_i}.$$

例 8 设 A,B,C 为 S 中的随机事件,试用 A,B,C 表示下列事件.

(1) 仅 A 发生;

(2) A,B,C 都不发生;

(3) A,B,C 至少有一发生;

(4) A,B,C 不全发生;

(5) A,B,C 恰有一个发生.

解 (1) $A\overline{B}\overline{C}$;

(2) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(3) $A\cup B\cup C$;

(4) $\overline{ABC}$;

(5) $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$.

例 9 某射手向同一目标射击 3 次,A_i 表示"第 i 次射击命中目标",$i=1,2,3$,B_j 表示"3 次射击中恰命中目标 j 次",$j=0,1,2,3$,试用 $A_i(i=1,2,3)$表示 $B_j(j=0,1,2,3)$.

解 (1) $B_0=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$;

(2) $B_1=A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}\cup\overline{A_1}A_2\overline{A_3}\cup\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$；

(3) $B_2=A_1A_2\overline{A_3}\cup A_1\overline{A_2}A_3\cup\overline{A_1}A_2A_3$；

(4) $B_3=A_1A_2A_3$.

例 10　某城市的供水系统由甲、乙两个水源与三部分管道 1,2,3 组成(图 1.7). 每个水源都足以供应城市的用水.

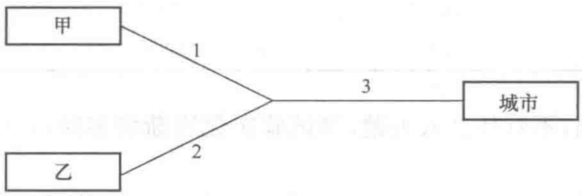

图 1.7

设事件 A_i 表示"第 i 个管道正常工作" ($i=1,2,3$). 于是,"城市能正常供水"可表示为 $(A_1\cup A_2)\cap A_3$. 由德・摩根律可知,"城市断水"可表示为

$$\overline{(A_1\cup A_2)\cap A_3}=\overline{(A_1\cup A_2)}\cup\overline{A_3}=(\overline{A_1}\cap\overline{A_2})\cup\overline{A_3}.$$

1.3　频率与概率

对于一个事件来说,它在一次试验中可能发生,也可能不发生. 我们常常希望知道随机事件在一次试验中发生的可能性究竟有多大,并希望寻求一个合适的数来表示这种可能性的大小. 例如,光知道"明天会下雨"并没有多少意义,关键是要知道"明天下雨的可能性有多大". 若有 90%的把握肯定"明天会下雨",那么明天出门时要带上防雨的装备. 一般地,对于任何一个随机事件都可以找到一个数值与之对应,该数值作为事件发生的可能性大小的度量. 为此,首先引入频率,它描述了事件发生的频繁程度,进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

1.3.1　频率

定义 1.6　在相同的条件下,进行 n 次试验,在这 n 次试验中,事件 A 发生的次数 n_A 称为事件 A 发生的**频数**. 比值 n_A/n 称为事件 A 发生的**频率**,记作 $f_n(A)$.

由定义,易见频率具有下述基本性质:

(1) $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 若 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是两两互不相容的事件,即 $A_iA_j=\varnothing(i\neq j,i,j=1,2,\cdots,k)$则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+\cdots+f_n(A_k).\tag{1.3.1}$$

由于事件 A 发生的频率表示 A 发生的频繁程度,频率大,事件 A 发生就频繁,这意味着事件 A 在一次试验中发生的可能性就大. 反之亦然. 因而,直观的想法是用频率来表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小. 但是否可行,先看下面的例子.

例 1　在投掷硬币的试验中,历史上曾有许多著名科学家,对投掷结果为正面的随机事件 A 发生的频率作了试验观测,其结果见表 1.1.

表 1.1　随机事件 A 发生频率试验观测

实验者	投掷次数 n	出现正面次数 n_A	频率 $f_n(A)$
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲丰	4040	2048	0.5069
费勒	10000	4979	0.4979
K. 皮尔逊	12000	6019	0.5016
K. 皮尔逊	24000	12012	0.5005

从表 1.1 可以看出，不管什么人去抛，当试验次数逐渐增多时，$f_n(A)$总是在 0.5 附近摆动而逐渐稳定于 0.5.

例 2　研究英语文章中字母及空格(含各种标点符号)出现的频率. 通过大量重复试验，可以发现 26 个字母及空格被使用的频率相当稳定，表 1.2 经过大量试验后得出的结果.

表 1.2　英文字母被试用频率试验观测

字母	空格	E	T	O	A	N	I	R	S
频率	0.2	0.105	0.072	0.0654	0.063	0.059	0.055	0.054	0.052
字母	H	D	L	C	F	U	M	P	Y
频率	0.047	0.035	0.029	0.023	0.0225	0.0225	0.021	0.0175	0.012
字母	W	G	B	V	K	X	J	Q	Z
频率	0.012	0.011	0.0105	0.008	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001

上述结果在打字机键盘的设计、印刷铅字的铸造、信息的编码及密码的破译等方面都有着十分广泛的应用.

从上面的例子可以看出，一个随机试验的随机事件 A，在 n 次试验中出现的频率 $f_n(A)$，当试验的次数 n 逐渐增多时，它在一个常数附近摆动，而逐渐稳定于这个常数. 这个常数是客观存在的，"频率稳定性"的性质，不断地为人类的实践活动所证实，它揭示了隐藏在随机现象中的规律性. 在具体问题中，按统计定义来求出概率是不现实的. 因此，在实际应用时，往往就简单地把频率当成概率来使用. 同时，为了研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出如下表征事件发生可能性大小的概率的定义.

1.3.2　概率

定义 1.7(概率的公理化定义)　设 E 是一个随机试验，S 是它的样本空间，对于任意一个事件 A，赋予一个实数，记作 $P(A)$，称为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$满足下列条件：

(1) **非负性**　$\forall A, P(A)\geqslant 0$；

(2) **规范性**　$P(S)=1$；

(3) **可列可加性**　若 $A_1, A_2, \cdots$ 是两两互不相容的事件，即 $A_iA_j=\varnothing, i\neq j, i,j=1,2,\cdots$ 有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots. \tag{1.3.2}$$

在第 5 章中将证明，当 $n\to\infty$ 时频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近于概率 $P(A)$. 基于这一事实，我们就有理由将概率 $P(A)$用来表征事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小.

由概率的定义可以推得概率的一些重要性质.