运筹与管理科学丛书 23

最优化方法

杨庆之 编著

科学出版社

运筹与管理科学丛书 23

最优化方法

杨庆之 编著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书系统介绍线性规划、整数线性规划、无约束最优化和约束最优化的基本理论和方法，还介绍经济、金融、信息处理、统计、几何等领域中的具体优化模型，以及 MATLAB 软件包中部分优化工具箱的操作方法.

本书适合作为理工类本科生，特别是信息与计算科学、应用数学专业高年级本科生的教科书或教学参考书，也可供具有高等数学基础的高校师生和科研人员等阅读.

图书在版编目(CIP)数据

最优化方法/杨庆之编著. —北京：科学出版社，2015
(运筹与管理科学丛书；23)

ISBN 978-7-03-043462-3

Ⅰ. ①最… Ⅱ. ①杨… Ⅲ. ①最优化算法 Ⅳ. ①O242.23

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 038251 号

责任编辑：李静科／责任校对：彭　涛
责任印制：赵　博／封面设计：陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

骏杰印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2015 年 3 月第 一 版　开本：720 × 1000 1/16
2015 年 3 月第一次印刷　印张：14 3/4
字数：277 000

定价：68.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换）

《运筹与管理科学丛书》序

运筹学是运用数学方法来刻画、分析以及求解决策问题的科学. 运筹学的例子在我国古已有之, 春秋战国时期著名军事家孙膑为田忌赛马所设计的排序就是一个很好的代表. 运筹学的重要性同样在很早就被人们所认识, 汉高祖刘邦在称赞张良时就说道:"运筹帷幄之中, 决胜千里之外."

运筹学作为一门学科兴起于第二次世界大战期间, 源于对军事行动的研究. 运筹学的英文名字 Operational Research 诞生于 1937 年. 运筹学发展迅速, 目前已有众多的分支, 如线性规划、非线性规划、整数规划、网络规划、图论、组合优化、非光滑优化、锥优化、多目标规划、动态规划、随机规划、决策分析、排队论、对策论、物流、风险管理等.

我国的运筹学研究始于20世纪50年代, 经过半个世纪的发展, 运筹学研究队伍已具相当大的规模. 运筹学的理论和方法在国防、经济、金融、工程、管理等许多重要领域有着广泛应用, 运筹学成果的应用也常常能带来巨大的经济和社会效益. 由于在我国经济快速增长的过程中涌现出了大量迫切需要解决的运筹学问题, 因而进一步提高我国运筹学的研究水平、促进运筹学成果的应用和转化、加快运筹学领域优秀青年人才的培养是我们当今面临的十分重要、光荣, 同时也是十分艰巨的任务. 我相信,《运筹与管理科学丛书》能在这些方面有所作为.

《运筹与管理科学丛书》可作为运筹学、管理科学、应用数学、系统科学、计算机科学等有关专业的高校师生、科研人员、工程技术人员的参考书, 同时也可作为相关专业的高年级本科生和研究生的教材或教学参考书. 希望该丛书能越办越好, 为我国运筹学和管理科学的发展做出贡献.

袁亚湘

2007 年 9 月

前　言

最优化方法是运筹学的一个重要分支, 是一门实用性很强的学科. 它以数学和计算机作为其理论分析和实际应用的主要工具.

本书是在作者多次给南开大学数学科学学院高年级本科生开设的《最优化方法》课程基础上形成的. 作者开始是按我院一位教师编写的教材讲授这门课的, 在教学过程中, 通过借鉴其他教材的内容并加上自己的教学体会逐渐形成本书. 作者开始并没有打算出版, 后来通过和科学出版社有关人员的接触, 萌生了出版本书的想法.

该课程在我院是专业选修课, 课时不超过 60 学时. 由于课时不算多, 还经常有本校其他学院的学生选修这门课, 所以我觉得课程内容最好能涵盖面广一些, 而不过多涉及复杂的数学推导. 但由于本学科理论及算法分析方面的特点, 不可避免地需要对一些重要理论和算法分析的较复杂的数学推导和有关结论给予介绍. 基于这个考虑和原因, 在陈述命题时, 对不太复杂的命题证明给予介绍, 而对有些证明过于复杂的命题, 只列出有关结论而略去推导过程, 有进一步需要和兴趣的读者可查阅相关文献.

考虑到这门学科交叉和应用的特点, 作者希望学生通过对这门课的学习, 能在最优化模型、最优化理论及算法分析和上机编程操作这几个有机联系的方面都能学到一定的知识或操作技能. 因此本书除了以最优化理论和方法的理论内容为主, 还简单介绍 MATLAB 中某些优化函数的使用, 安排一些最优化模型的内容和需要上机计算的练习. 因为最优化方法的建模内容不同于优化理论和算法分析的偏数学分析的特点, 我们将这部分内容集中放在第 6 章并大致根据所属学科进行分类介绍, 虽然在之前各章穿插有比较简单的例子. 再就是为了启发学生对有些问题作进一步的思考, 书中还不时加入 "问题" 条目, 以对学生养成随时提问的习惯能有所帮助.

从理论内容上来说, 虽然我们希望能介绍本学科的基本内容和一些比较新颖的发展, 但由于篇幅所限, 一些重要内容, 比如带约束优化问题的信赖域方法、线性规划的内点法都没有介绍.

本书在编写过程中, 最后阶段较大的修改 (主要是补充了第 6 章内容) 是在 2014 年暑假作者在香港理工大学访问期间完成的, 作者感谢祁力群教授的访问邀请和对本书提出的宝贵修改意见, 还感谢杭州电子科技大学凌晨教授对本书内容提出的修改建议. 作者在使用这本书的过程中, 得到听课学生不少有益的反馈意见, 这对作者改进本书内容的叙述方法或严谨性是有益的. 作者还要感谢多位研究生

在本书排版录入、习题补充和验证等方面给予的重要帮助. 书中借鉴了一些参考文献中的内容, 作者在此对其作者表示感谢.

最后还要感谢科学出版社有关人员对作者的督促和耐心周到的帮助和支持.

由于水平所限, 本书肯定还有些不足之处, 欢迎读者批评指正, 以便以后有机会再版时修改.

杨庆之

2014 年 11 月

目　　录

第 1 章　引论及预备知识

1.1　最优化问题简介

最优化是人们在工程技术、科学研究和经济管理等诸多领域中经常遇到的问题. 例如, 结构设计要在满足强度要求等条件下使所用材料的总重量最轻; 资源分配要使各用户利用有限资源产生的效益最大; 安排运输方案要在满足物质需求和装载条件下使运输费用最低; 编制生产计划要按照产品工艺流程和顾客需求尽量降低人力、设备、原材料等成本使总利润最高, 等等. 简单地说, 人们总是在各项具体的工作和生活中, 在一定的人力、物力、财力的条件下, 追求最好或更好的结果; 或者, 为了达到某个预想的目标, 使得有限的人力、物力、财力花费尽可能小. 通常, 可供选择的方案或方法有多个, 甚至是无限多种, 最优化方法就是研究如何从中选出最好的方案或进行最佳决策的一门学科.

随着社会生产和科学技术的不断发展, 最优化理论和技术在人们的工作和生活诸方面起着越来越重要的作用.

用最优化方法解决实际问题一般包括两个基本步骤: 一是把需要求解的问题表述成数学上最优化问题的形式, 这一步简称为优化建模; 二是在已有的模型基础上, 选择已有的优化方法或自己设计某种方法对模型进行求解. 优化建模具有一般数学建模的共性, 同时也有一定的特殊性和专业性.

下面我们看几个优化建模的例子.

例 1.1.1　线段围面积问题.

设有一长度为 l 的木条, 想用该木条围成一个矩形, 问长和宽各多少时矩形面积最大?

建立该问题的数学模型.

设已用木条围成一个矩形, 一边长度为 x, 则另一边的长度为 $\frac{l}{2}-x$. 矩形面积为$x\left(\frac{l}{2}-x\right)$. 该问题的数学模型可以写为

$$\begin{aligned} \max \quad & x\left(\frac{l}{2}-x\right) \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{2} \end{aligned} \tag{1.1}$$

这里 “max” 和 “s.t.” 分别是 “maximize” 和 “subject to” 的缩写.

例 1.1.2　食谱问题.

设市场上有 n 种不同的食物, 第 j 种食物每单位的价格为 $c_j(j=1,2,\cdots,n)$. 研究表明, 人体在正常生命活动中需要 m 种基本的营养成分. 为了保证人体的健康, 一个人每天至少需要摄入第 i 种营养成分 $b_i(i=1,2,\cdots,m)$ 个单位. 此外人们还知道第 j 种食物的每个单位包含营养成分 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 个单位.

设一个人摄入的营养成分会被人体完全吸收, 每天不同食物的配给量构成一种配食方案. 食谱问题就是要求在满足人体基本营养需求的前提下寻求最经济的食谱.

建立该问题的数学模型.

设食谱中第 j 种食物的数量为 x_j, 于是食谱的花费为 $c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$; 人体的营养需求要求满足:

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n \geqslant b_i, \quad i=1,\cdots,m$$

显然应该有 $x_j \geqslant 0,\ j=1,\cdots,n$.

于是食谱问题的数学模型可以写为

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \quad i=1,\cdots,m \\ & x_j \geqslant 0, \quad j=1,\cdots,n \end{aligned} \tag{1.2}$$

这里 “min” 是 “minimize” 的缩写.

例 1.1.3　资金使用问题.

设某单位有 400 万元资金, 打算 4 年内使用完. 若在一年内使用资金 x 万元, 则可以得到收益 $\sqrt{x}$ 万元 (收益不能再使用), 当年不用的资金可存入银行, 年利率为 0.1. 问如何使用这一笔资金, 可以使 4 年后收益总和最大?

建立该问题的数学模型.

设第 i 年使用资金 x_i 万元, 则 4 年后的收益为

$$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}+\sqrt{x_3}+\sqrt{x_4}$$

由问题条件知, x_i 满足

$$0 \leqslant x_1 \leqslant 400$$
$$0 \leqslant x_2 \leqslant (400-x_1)\times 1.1$$

$$0 \leqslant x_3 \leqslant ((400 - x_1) \times 1.1 - x_2) \times 1.1$$

$$0 \leqslant x_4 \leqslant (((400 - x_1) \times 1.1 - x_2) \times 1.1 - x_3) \times 1.1$$

于是这个资金使用问题的数学模型为

$$\begin{array}{llllll}
\max & \sqrt{x_1} & +\sqrt{x_2} & +\sqrt{x_3} & +\sqrt{x_4} & \\
\text{s.t.} & x_1 & & & & \leqslant 400 \\
& 1.1x_1 & +x_2 & & & \leqslant 440 \\
& 1.21x_1 & +1.1x_2 & +x_3 & & \leqslant 484 \\
& 1.331x_1 & +1.21x_2 & +1.1x_3 & +x_4 & \leqslant 532.4 \\
& & & & x_j \geqslant 0, & j = 1, \cdots, 4
\end{array} \tag{1.3}$$

在实际应用中, 一个问题是不是可以表述为一个最优化模型和怎样表示为一个最优化模型, 这是优化方法是否可以应用的前提, 因而是十分重要的. 但优化问题的建模和其他数学问题的建模一样, 不属于精确科学或数学的范畴, 而是一项技术或技艺, 没有统一的标准和方法. 当然, 建立的模型是否正确和模型的优劣是可以通过实际效果来检验的. 已有一些优秀的优化问题的建模教材, 如书末参考文献中的《运筹学案例》《优化建模与 Lindo/Lingo 软件》.

最优化方法涵盖的范围很广, 对问题进行分类研究形成了不同的学科分支. 可以大致地把最优化问题分为两类: 连续型优化问题和离散型优化问题. 本书主要介绍连续型优化问题的理论和解法.

连续型优化问题的一般形式如下:

$$\begin{array}{ll}
\min & f(x) \\
\text{s.t.} & c_i(x) = 0, \quad i = 1, \cdots, m \\
& c_i(x) \geqslant 0, \quad i = m+1, \cdots, p
\end{array} \tag{1.4}$$

这里 $x \in \mathbf{R}^n$, $f(x), c_i(x)(i = 1, \cdots, p)$ 为连续函数, x 称为决策变量, $f(x)$ 称为目标函数, $c_i(x)$ 称为约束函数. $c_i(x) = 0(i = 1, \cdots, m)$ 称为等式约束, $c_i(x) \geqslant 0(i = m+1, \cdots, p)$ 称为不等式约束.

在问题 (1.4) 中, 如没有约束, 则称问题为无约束优化问题, 否则称为约束优化问题; 若 $f(x), c_i(x)(i = 1, \cdots, p)$ 都是线性函数, 则问题称为线性规划问题, 否则称为非线性规划 (优化) 问题.

可以看出, 例 1.1.1～ 例 1.1.3 都属于连续型优化问题, 第一个问题使用初等数学的知识就可以求解. 但当变量或约束条件很多时, 一般用初等数学的知识无法求解. 而实际的问题往往有几千个或更多的变量或约束条件, 因此对连续型优化问题进行一般的理论研究并设计切实可行的计算方法是十分重要的.

记

$$F = \{x \in \mathbf{R}^n | c_i(x) = 0, i = 1, \cdots, m; c_i(x) \geqslant 0, i = m+1, \cdots, p\}$$

称 F 为问题 (1.4) 的**可行域**, F 中任一点称为**可行点**.

一个点 $x^* \in F$ 称为问题 (1.4) 的**整体最优解**, 若

$$f(x^*) \leqslant f(x), \quad \forall x \in F \text{ 且 } x \neq x^*$$

若不等式严格成立, 则称 x^* 为**严格整体最优解**.

若对 x^* 的一个邻域 $N(x^*) = \{x | \|x - x^*\| \leqslant \delta\}$ 有

$$f(x^*) \leqslant f(x), \quad \forall x \in F \cap N(x^*) \text{ 且 } x \neq x^*$$

则称 x^* 为问题 (1.4) 的**局部最优解**.

问题　局部最优解与整体最优解何时一致?

从一些简单的例子 (如图 1.1) 可以猜测: 如果可行区域是凸集合, 目标函数是凸函数, 这时局部最优解和整体最优解一致.

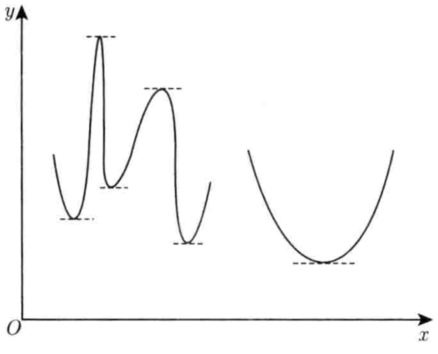

图 1.1

1.2　凸集和凸函数

求一个定义在闭凸集合上的凸函数的极小值的问题称为凸优化问题. 凸优化问题是最优化问题中非常重要的一类, 它有很好的理论性质, 也有十分有效的系统的求解方法. 凸集和凸函数是凸优化中主要的两个概念, 本节给出凸集与凸函数的定义, 并讨论它们的一些相关性质.

1.2.1　凸集及相关性质

定义 1.2.1　集合 $D \subseteq \mathbf{R}^n$ 称为凸的, 如果对任意 $x, y \in D$, 有

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in D, \quad \forall \lambda \in (0,1)$$

定义 1.2.2 设 $x^1,\cdots,x^m$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中 m 个点, 称 $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i x^i$ 为 $x^1,\cdots,x^m$ 的凸组合, 这里 $\lambda_i \geqslant 0(i=1,\cdots,m)$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{m}\lambda_i=1$.

定义 1.2.3 设 $D\subseteq\mathbf{R}^n$, 称下列集合

$$H(D)=\{y|y\text{为}D\text{中任意有限个点的凸组合}\}$$

为集合 D 的凸包.

问题 对非凸集合 D, 它的凸包 $H(D)$ 是凸集吗?

定理 1.2.4 设 $D\subset\mathbf{R}^n$ 是凸集, 则 D 中任意 m 个点的凸组合仍属于 D.

证明 用归纳法证明. 当 $m=2$ 时, 由定义知命题成立. 设当 $m=k$ 时命题成立, 即 D 中任意 k 个点的凸组合仍属于 D. 当 $m=k+1$ 时, 设有 D 中任意 $k+1$ 个点 $x^1,\cdots,x^{k+1}$, 任取一组非负实数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_{k+1}$ 满足 $\sum\limits_{i=1}^{k+1}\alpha_i=1$, 不妨设 $\alpha_{k+1}\neq 1$, 则有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i x^i &= \sum_{i=1}^{k}\alpha_i x^i+\alpha_{k+1}x^{k+1}\\ &=(1-\alpha_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}}x^i+\alpha_{k+1}x^{k+1}\end{aligned}\tag{1.5}$$

因为 $1-\alpha_{k+1}=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i$, 所以 $\sum\limits_{i=1}^{k}\dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}}=1$. 由归纳假设有

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}}x^i\in D$$

于是由凸集的定义得

$$\sum_{i=1}^{k+1}\alpha_i x^i=(1-\alpha_{k+1})\sum_{i=1}^{k}\frac{\alpha_i}{1-\alpha_{k+1}}x^i+\alpha_{k+1}x^{k+1}\in D$$ □

定理 1.2.5 设 $D\subset\mathbf{R}^n$, 则对 $H(D)$ 中任一点 x, 它一定可以表示为 D 中 $n+1$ 个点的凸组合.

证明 设 x 是 $H(D)$ 中任一点, 由定义 1.2.2, 设有 k 个 D 中的点 $x^1,\cdots,x^k$ 使得

$$x=\sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^i$$

这里 $\lambda_i \geqslant 0(i=1,\cdots,k)$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{k}\lambda_i = 1$.

如果 $k \leqslant n+1$, 命题得证. 当 $k > n+1$ 时, 因为向量是 n 维的, 则 $x^2 - x^1, \cdots, x^k - x^1$ 线性相关, 即有不全为 0 的实数 $\mu_2, \cdots, \mu_k$, 使得

$$\sum_{i=2}^{k}\mu_i(x^i - x^1) = 0 \Leftrightarrow -\left(\sum_{i=2}^{k}\mu_i\right)x^1 + \sum_{i=2}^{k}\mu_i x^i = 0$$

记 $\mu_1 = -\sum\limits_{i=2}^{k}\mu_i$, 则有 $\sum\limits_{i=1}^{k}\mu_i x^i = 0$. 显然, $\mu_1, \cdots, \mu_k$ 中至少有一个大于 0.

对任意正数 α, 有

$$x = \sum_{i=1}^{k}\lambda_i x^i - \alpha\sum_{i=1}^{k}\mu_i x^i = \sum_{i=1}^{k}(\lambda_i - \alpha\mu_i)x^i$$

取

$$\alpha = \min\left\{\frac{\lambda_i}{\mu_i}\middle|\mu_i > 0\right\} \triangleq \frac{\lambda_j}{\mu_j}$$

则 $\lambda_j - \alpha\mu_j = 0$ 且 $\lambda_i - \alpha\mu_i \geqslant 0, \forall i : 0 \leqslant i \leqslant k$ 及 $\sum\limits_{i=1}^{k}(\lambda_i - \alpha\mu_i) = 1$.

所以, 至多 $k-1$ 个 D 中的点即可凸表示 x. 若 $k-1 \leqslant n+1$, 定理得证, 否则重复上述步骤有限次后即知命题成立. □

1.2.2 保凸运算

判断一个集合是不是凸集, 除了从定义出发去验证, 还有些运算可以保持集合的凸性, 通过这些运算也可以从已知的凸集构造新的凸集, 或者判断一个集合是否为凸集. 下面列出的几种运算是保凸运算.

1. 交集运算

容易验证, 两个凸集合的交仍然是凸的. 不难验证, 无限个凸集合的交仍然是凸的.

例 1.2.1　n 阶半正定矩阵的全体 S_+^n 可记为

$$S_+^n = \bigcap_{z \neq 0}\left\{X \in S^n | z^{\mathrm{T}}Xz \geqslant 0\right\}$$

显然, 对每一个 $z \neq 0$, $\left\{X \in S^n | z^{\mathrm{T}}Xz \geqslant 0\right\}$ 是凸集. 于是 S_+^n 是凸集.

2. 仿射函数运算

设 $f(x) = Ax + b$ 是 $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 的仿射函数, 这里 $A \in \mathbf{R}^{m\times n}, b \in \mathbf{R}^m$. 设 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ 是一凸集合, 则 S 在 f 作用下的像 $f(S) = \{f(x)|x \in S\}$ 是凸集. 类似地, S 在仿射函数作用下的逆图像也是凸集合. 设 $g(y)$ 是 $\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^n$ 的仿射函数, 则 $g^{-1}(S) = \{y|g(y) \in S\}$ 是凸集.

仿射运算及逆运算包含了好几种特殊的常见的运算, 如数量乘积和平移 $\alpha S = \{\alpha x|x \in S\}, S + \alpha = \{x + \alpha|x \in S\}$.

一个凸集到几个象限的投影是凸集, 如

$$T = \left\{x_1 \in \mathbf{R}^m | (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n \text{对某个} x_2 \in \mathbf{R}^n\right\}$$

是凸集.

两个凸集合的和 $S_1 + S_2 = \{x + y|x \in S_1,\ \ y \in S_2\}$ 及部分和是凸集.

下面再举几个具体的例子.

例 1.2.2 多面体. 集合 $H = \{x \in \mathbf{R}^n|Ax \leqslant b, Cx = d\}$ 称为多面体. 容易由定义验证 H 是凸集. 也可以由运算规则证明 H 是凸集.

记 $f(x) = (b-Ax, d-Cx)$, 可见 $f(x)$ 是仿射函数, 且 $H = \left\{x|f(x) \in \mathbf{R}_+^m \times \{0\}\right\}$. 可见多面体 H 可以看成仿射函数作用下的逆图像, 因而是凸集.

例 1.2.3 线性矩阵不等式的解集. 设 A_i, B 是 m 阶实对称矩阵, $i = 1, \cdots, n$. 条件

$$A(x) = x_1 A_1 + \cdots + x_n A_n \preceq B$$

称为线性矩阵不等式 (linear matrix inequality), 这里的不等式表示 $A(x) - B$ 是负半定的, 即 $B - A(x)$ 是正半定的. 记 $f(x) = B - A(x)$, 则 $f(x)$ 是 $\mathbf{R}^n \to S^m$ 的仿射函数, 于是 $\{x|A(x) \preceq B\} = \{x|f(x) \succeq 0\}$. 容易知道, 正半定矩阵的全体是凸集, 于是由仿射函数作用下的逆图像仍然是凸集合的结论知 $\{x|A(x) \preceq B\}$ 是凸集.

3. 线性分式函数和透视函数

线性分式函数是比仿射函数更一般但仍然保凸的函数.

透视函数: 透视函数定义为 P: $\mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^n$, $P(z, t) = z/t$.

定义域为 $\mathrm{dom}(P) = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_{++}$, 这里 $\mathbf{R}_{++}$ 表示正实数集.

定理 1.2.6 如果 $C \subseteq \mathrm{dom}(P)$ 是凸集, 则其透视函数图像 $P(C) = \{P(x)|x \in C\}$ 也是凸集.

证明 首先证明透视函数将定义域内的一条线段仍然变换为一条线段. 设 $x = (\widetilde{x}, x_{n+1}), y = (\widetilde{y}, y_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1}$, $x_{n+1} > 0$, $y_{n+1} > 0$. 对 $\theta \in (0, 1)$,

$$P(\theta x + (1-\theta)y) = \frac{\theta\widetilde{x} + (1-\theta)\widetilde{y}}{\theta x_{n+1} + (1-\theta)y_{n+1}} = \mu P(x) + (1-\mu)P(y)$$