

高等院校教材同步辅导
及考研复习用书



概率论与 浙大四版 数理统计辅导

主 编◎张天德

• 年销量 **5万** 册以上 •

- ★ 习题全解 同步教材
- ★ 真题精讲 剖析考点
- ★ 自测练习 夯实基础

最新版

 北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS





概率论与 浙大四版 数理统计辅导

主 编◎张天德

副主编◎叶 宏

刘 晓 红 书



 **北京理工大学出版社**
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

版权专有 侵权必究

图书在版编目 (CIP) 数据

概率论与数理统计辅导/张天德主编. —北京: 北京理工大学出版社,
2014. 8

ISBN 978-7-5640-9579-6

I. ①概… II. ①张… III. ①概率论-高等学校-教学参考资料 ②数理统计-高等学校-教学参考资料 IV. ①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2014) 第 186933 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010) 68914775 (总编室)

82562903 (教材售后服务热线)

68948351 (其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 保定市中华美凯印刷有限公司

开 本 / 880 毫米×1230 毫米 1/32

印 张 / 12

责任编辑 / 张慧峰

字 数 / 430 千字

文案编辑 / 张慧峰

版 次 / 2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷

责任校对 / 孟祥敬

定 价 / 25.80 元

责任印制 / 边心超

图书出现印装质量问题, 请拨打售后服务热线, 本社负责调换

前 言

概率论与数理统计是理工类专业一门重要的基础课,也是硕士研究生入学考试的重点科目。浙江大学主编的《概率论与数理统计》是一部深受读者欢迎并多次获奖的优秀教材。为了帮助读者学好概率论与数理统计,我们编写了《概率论与数理统计辅导》,该书与浙江大学主编的《概率论与数理统计》(第四版)配套,汇集了编者几十年的丰富经验,将一些典型例题及解题方法与技巧融入书中,将会成为读者学习《概率论与数理统计》的良师益友。

本书的章节划分和内容设置与浙江大学主编的《概率论与数理统计》第四版教材完全一致。在每一章的最后对本章知识进行简要的概括,然后用网络结构图的形式揭示出本章知识点之间的有机联系,以便于学生从总体上系统地掌握本章的知识体系和核心内容。

讲解结构六大部分

一、知识结构 用结构图解的形式对每节涉及的基本概念、基本定理和公式进行系统的梳理,并指出在理解与应用基本概念、定理、公式时需要注意的问题以及各类考试中经常考查的重要知识点。

二、考点精析 分类总结每章重点题型以及重要定理,使读者能更扎实地掌握各个知识点,最终提升读者的应试能力。

三、例题精解 这一部分是每一节讲解中的核心内容,也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和对研究生入学考试试题及全国大学生数学竞赛试题研究的经验,将该节教材内容中学生需要掌握的、考研和数学竞赛中经常考到的重点、难点、考点,归纳为一个个在考试中可能出现的基本题型,然后针对每一个基本题型,举出大量精选例题深入讲解,使读者扎实掌握每一个知识点,并能熟练地运用在具体的解题中。可谓基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动、一举突破,从而获得实际应用能力的全面提升。例题讲解中穿插出现的“思路探索”、“方法点击”,更是巧妙点拨,让读者举一反三、触类旁通。

四、本章知识总结 对本章所学的知识进行系统的回顾,帮助读者更好地

复习、总结、提高。

五、本章同步自测 精选部分有代表性、测试价值高的题目(部分题目选自历年全国研究生入学考试和大学生数学竞赛试题),以此检测、巩固读者所学知识,达到提高应试水平的目的。

六、教材习题全解 为了方便读者对课本知识进行复习巩固,对教材课后习题作了详细的解答,这与市面上习题答案不全的某些参考书有很大的不同。在解题过程中,对部分有代表性的习题,设置了“思路探索”以引导读者尽快找到解决问题的思路和方法;安排有“方法点击”来帮助读者归纳解决问题的关键、技巧与规律。针对部分习题还给出了一题多解,以培养读者的分析能力和发散思维能力。

内容编写三大特色

一、重新修订、内容完善 本书是《概率论与数理统计辅导》的最新修订版,前一版在市场上受到了广大学子的欢迎,每年销量都在5万册以上。这次修订增加了大学生数学竞赛试题,更新了研究生入学考试试题,改正了原来的印刷错误,使其内容更加完善,体例更为合理。

二、知识清晰、学习高效 知识点讲解清晰明了,分析透彻到位,既有对重点及常考知识点进行归纳,同时又对基本题型的解题思路、解题方法和答题技巧进行了深层次的总结。据此,读者不仅可以从全局上对章节要点有整体性的把握,更可以纲举目张,系统地把握数学知识的内在逻辑性。

三、联系考研、经济实用 本书不仅是一本教材同步辅导书,而且是一本不可多得的考研复习用书,书中内容与研究生入学考试联系紧密。在知识全解部分设置了“考研大纲要求”,例题精解和自测题部分选取了大量考研真题,让读者在同步学习中达到研究生入学考试的备考水平。

本书由张天德主编,叶宏、刘晓红副主编。衷心希望这本《概率论与数理统计辅导》能对读者有所裨益。由于编者水平有限,书中疏漏之处在所难免,不足之处敬请读者批评指正,以便不断完善。

张天德

目 录

教材知识全解

第一章 概率论的基本概念	(3)
第一节 随机试验	(3)
第二节 样本空间、随机事件	(3)
第三节 频率与概率	(6)
第四节 等可能概型(古典概型)	(9)
第五节 条件概率	(13)
第六节 独立性	(17)
本章整合	(23)
一、本章知识图解	(23)
二、本章知识总结	(24)
三、本章同步自测	(25)
第二章 随机变量及其分布	(31)
第一节 随机变量	(31)
第二节 离散型随机变量及其分布律	(32)
第三节 随机变量的分布函数	(39)
第四节 连续型随机变量及其概率密度	(44)
第五节 随机变量函数的分布	(54)
本章整合	(59)
一、本章知识图解	(59)
二、本章知识总结	(59)
三、本章同步自测	(60)
第三章 多维随机变量及其分布	(69)
第一节 二维随机变量	(69)
第二节 边缘分布	(76)

第三节	条件分布	(81)
第四节	相互独立的随机变量	(84)
第五节	两个随机变量的函数的分布	(91)
本章整合	(101)
一、本章知识图解	(101)
二、本章知识总结	(101)
三、本章同步自测	(102)
第四章 随机变量的数字特征	(113)
第一节	数学期望	(113)
第二节	方差	(124)
第三节	协方差及相关系数	(133)
第四节	矩、协方差矩阵	(144)
本章整合	(146)
一、本章知识图解	(146)
二、本章知识总结	(146)
三、本章同步自测	(147)
第五章 大数定律及中心极限定理	(154)
第一节	大数定律	(154)
第二节	中心极限定理	(158)
本章整合	(162)
一、本章知识图解	(162)
二、本章知识总结	(162)
三、本章同步自测	(163)
第六章 样本及抽样分布	(170)
第一节	随机样本	(170)
第二节	直方图和箱线图(略)	(171)
第三节	抽样分布	(171)
本章整合	(183)
一、本章知识图解	(183)
二、本章知识总结	(183)
三、本章同步自测	(184)
第七章 参数估计	(190)
第一节	点估计	(190)
第二节	基于截尾样本的最大似然估计	(198)
第三节	估计量的评选标准	(199)

第四节	区间估计	(206)
第五节	正态总体均值与方差的区间估计	(206)
第六节	$(0-1)$ 分布参数的区间估计	(212)
第七节	单侧置信区间	(213)
本章整合		(215)
一、	本章知识图解	(215)
二、	本章知识总结	(216)
三、	本章同步自测	(216)
第八章 假设检验		(222)
第一节	假设检验	(222)
第二节	正态总体均值的假设检验	(224)
第三节	正态总体方差的假设检验	(230)
* 第四节	置信区间与假设检验之间的关系(略)	(233)
* 第五节	样本容量的选取(略)	(233)
* 第六节	分布拟合检验	(233)
* 第七节	秩和检验	(236)
第八节	假设检验问题的 p 值检验法	(237)
本章整合		(239)
一、	本章知识图解	(239)
二、	本章知识总结	(240)
三、	本章同步自测	(242)

教材习题全解

第一章	概率论的基本概念	(249)
第二章	随机变量及其分布	(264)
第三章	多维随机变量及其分布	(284)
第四章	随机变量的数字特征	(308)
第五章	大数定律及中心极限定理	(329)
第六章	样本及抽样分布	(336)
第七章	参数估计	(342)
第八章	假设检验	(357)

教材知识全解



第一章 概率论的基本概念

本章介绍了随机试验、随机事件的概念,事件间的关系及其运算,主要介绍了古典概率、条件概率的定义,概率的性质及运算法则,全概率公式和贝叶斯公式,同时对独立性也做了重点论述.本章内容是整个概率论的基础,对后面内容有重要作用.

第一节 随机试验

知识全解

【考点精析】

1. 随机现象.

在个别试验中其结果呈现不确定性,在大量重复试验中其结果又具有统计规律性的现象,称为随机现象.

2. 统计规律性.

在大量重复试验或观察中所呈现出的固有规律性,称为统计规律性.

3. 随机试验.

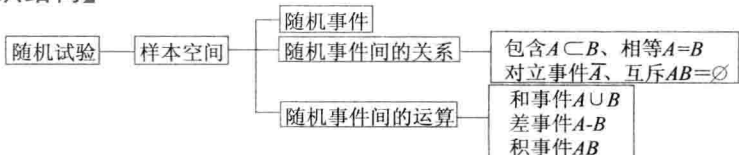
在概率论中将具备下列三个条件的试验称为随机试验,简称试验:

- (1) 在相同条件下可重复进行;
- (2) 每次试验的结果具有多种可能性;
- (3) 在每次试验之前不能准确预言该次试验将出现何种结果,但是所有结果明确可知.

第二节 样本空间、随机事件

知识全解

【知识结构】



【考点精析】

1. 样本空间.

随机试验的所有可能结果构成的集合,常用 Ω 表示.

2. 随机事件.

随机试验的每一种可能的结果称为随机事件,常用 A, B, C, D 表示.

(1)基本事件 不能分解为其他事件组合的最简单的随机事件.

(2)必然事件 每次试验中一定发生的事件,常用 Ω 表示.

(3)不可能事件 每次试验中一定不发生的事件,常用 \emptyset 表示.

3. 事件的关系及其运算.

(1)包含 A 发生必然导致 B 发生,则称 B 包含 A (或 A 包含于 B),记为 $B \supset A$ (或 $A \subset B$).

(2)相等 若 $A \supset B$ 且 $B \supset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

(3)事件的和 A 与 B 至少有一个发生,称为 A 与 B 的和事件,记为 $A \cup B$.

(4)事件的积 A 与 B 同时发生,称为 A 与 B 的积事件,记为 $A \cap B$ (或 AB).

(5)事件的差 A 发生而 B 不发生,称为 A 与 B 的差事件,记为 $A - B$.

(6)互斥事件 在试验中,若事件 A 与 B 不能同时发生,即 $A \cap B = \emptyset$,则称 A, B 为互斥事件.

(7)对立事件 在每次试验中,“事件 A 不发生”的事件称为事件 A 的对立事件. A 的对立事件常记为 \bar{A} .

4. 事件的运算律.

(1)交换律 $A \cup B = B \cup A, AB = BA$.

(2)结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

(3)分配律 $(A \cup B)C = (AC) \cup (BC), A \cup (BC) = (A \cup B)(A \cup C)$.

(4)德摩根律 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

本节内容在考研数学中很少单独命题,但是分清事件之间的关系,合理地表示事件是求概率的重要前提.

例题精解

基本题型 I : 考查事件的表示

例 1 在电炉上安装了 4 个温控器,其显示温度的误差是随机的. 在使用过程中,只要有二个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0 , 电炉就断电. 以 E 表示事件“电炉断电”, 而 $T_{(1)} \leq T_{(2)} \leq T_{(3)} \leq T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列的温度值, 则事件 E 等于(). (考研真题)

(A) $\{T_{(1)} \geq t_0\}$ (B) $\{T_{(2)} \geq t_0\}$ (C) $\{T_{(3)} \geq t_0\}$ (D) $\{T_{(4)} \geq t_0\}$

【解析】 $\{T_{(1)} \geq t_0\}$ 表示四个温控器显示温度均不低于 t_0 ;
 $\{T_{(2)} \geq t_0\}$ 表示至少三个温控器显示温度均不低于 t_0 ;
 $\{T_{(3)} \geq t_0\}$ 表示至少二个温控器显示温度均不低于 t_0 ;
 $\{T_{(4)} \geq t_0\}$ 表示至少一个温控器显示温度不低于 t_0 .

故应选(C).

基本题型 II : 考查事件的关系及运算

例 2 用 A 表示事件“甲种产品畅销,乙种产品滞销”,则其对立事件 \bar{A} 为 (). (考研真题)

(A) “甲种产品滞销,乙种产品畅销” (B) “甲、乙两种产品均畅销”
 (C) “甲种产品滞销” (D) “甲种产品滞销或乙种产品畅销”

【解析】 本题考查德摩根律.

令 B 和 C 分别表示事件“甲种产品畅销”“乙种产品滞销”,则 $A = BC$,
 $\bar{A} = \overline{BC} = \bar{B} \cup \bar{C}$, 即事件 \bar{A} 表示“甲种产品滞销或乙种产品畅销”. 故应选(D).

例 3 设 A 和 B 是任意两个随机事件,则与 $A \cup B = B$ 不等价的是 (). (考研真题)

(A) $A \subset B$ (B) $\bar{B} \subset \bar{A}$ (C) $A\bar{B} = \emptyset$ (D) $\bar{A}B = \emptyset$

【解析】 根据题意, $A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A} \Leftrightarrow A\bar{B} = \emptyset$, 所以 $\bar{A}B$ 非空集. 故应选(D).

例 4 设任意两个随机事件 A 和 B 满足条件 $AB = \bar{A}\bar{B}$, 则 ().

(A) $A \cup B = \emptyset$ (B) $A \cup B = \Omega$
 (C) $A \cup B = A$ (D) $A \cup B = B$

【解析】 方法一: 排除法.

注意到 $AB = \bar{A}\bar{B}$, 那么 A, B 的地位是“对等”的, 从而(C), (D) 均不成立.
 (A) 不正确是显然的. 故应选(B).

方法二: 直接法.

运用德摩根律, $AB = \bar{A}\bar{B} = \overline{A \cup B}$, 那么

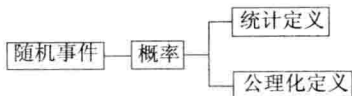
$A \cup B = (A \cup B) \cup \overline{A \cup B} = \Omega$. 故应选(B).

【方法点击】 事件的关系和运算本质上就是集合的关系与运算, 因此对于比较复杂的事件, 除了熟练运用定义及运算规律以外, 还可以借助文氏图作为辅助工具, 利用文氏图可以直观地理解、掌握这些关系及运算.

第三节 频率与概率

知识全解

【知识结构】



【考点精析】

1. 概率的统计定义.

在相同的条件下,重复进行 n 次试验,事件 A 发生的频率稳定地在某一常数 p 附近摆动.且一般说来, n 越大,摆动幅度越小,则称常数 p 为事件 A 的概率,记作 $P(A)$.

2. 概率的公理化定义.

设 Ω 是一样本空间,称满足下列三条公理的集函数 $P(\cdot)$ 为定义在 Ω 上的概率:

- (1) 非负性 对任意事件 $A, P(A) \geq 0$;
- (2) 规范性 $P(\Omega) = 1$;
- (3) 可列可加性 若两两互不相容的事件列 $\{A_n\}$ 是可列的,则

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i).$$

3. 概率的性质.

- (1) 对任何事件 $A, 0 \leq P(A) \leq 1$.
- (2) $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$.
- (3) 设 A 为任一随机事件,则 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
- (4) 设 $A \subset B$, 则 $P(B - A) = P(B) - P(A)$.
- (5) 设事件 A_1, A_2, \dots, A_n 两两互斥, 则

$$P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

(6) 设 A, B 为任意两个随机事件, 则 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. 上式还能推广到多个事件的情况. 例如, 设 A_1, A_2, A_3 为任意三个随机事件, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3).$$

一般地, 对于任意 n 个随机事件 A_1, A_2, \dots, A_n , 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P(A_i A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P(A_i A_j A_k) + \cdots + (-1)^{n-1} P(A_1 A_2 \cdots A_n).$$

概率的性质公式非常重要,是考研数学中的常考知识点.

例题精解

基本题型:考查概率的性质公式

例 1 设事件 A 与事件 B 互不相容,则(). (考研真题)

- (A) $P(\overline{A}\overline{B})=0$
 (B) $P(AB)=P(A)P(B)$
 (C) $P(A)=1-P(B)$
 (D) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$

【解析】 因为 A, B 互不相容,所以 $P(AB)=0$.
 则 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(AB)=1$. 故应选(D).

【方法点击】 本题也可以用排除法解决.

A 与 B 互斥,但 \overline{A} 与 \overline{B} 未必互斥,故(A)不正确;(B)选项为独立的条件,而 A 与 B 互斥未必独立,故(B)不正确;(C)选项为对立事件的性质,而 A 与 B 互斥未必对立,故(C)不正确.

例 2 设随机事件 A, B 及其和事件 $A \cup B$ 的概率分别是 $0.4, 0.3, 0.6$. 若 \overline{B} 表示 B 的对立事件,那么积事件 $A\overline{B}$ 的概率 $P(A\overline{B})=$ _____. (考研真题)

【解析】 因为 $A\overline{B}=A-B=A-AB$, 所以

$$\begin{aligned} P(A\overline{B}) &= P(A-AB) = P(A) - P(AB) \\ &= P(A \cup B) - P(B) = 0.6 - 0.3 = 0.3. \end{aligned}$$

【方法点击】 充分运用减法公式的各种变形,特别注意以下方法在解决此类问题中的应用.

设 A, B 是任意两个随机事件, $A-B=A-AB=A\overline{B}$. 事实上,这是一个很容易理解的变形,不妨按下列方式理解: $A-B$ 表示事件“ A 发生 B 不发生”, $A-AB$ 表示事件“在 A 发生的事件中除掉 AB 一起发生的事件”, $A\overline{B}$ 表示事件“ A 发生 B 不发生”,很明显这三个事件是一样的.

例 3 设 A, B 为随机事件, $P(A) = 0.7, P(A - B) = 0.3$, 则 $P(\overline{AB}) =$ _____. (考研真题)

【解析】 先求 \overline{AB} 的对立事件 AB 发生的概率 $P(AB)$.

由题意, $P(A - B) = P(A - AB) = P(A) - P(AB) = 0.3$,

则 $P(AB) = P(A) - 0.3 = 0.7 - 0.3 = 0.4$,

那么 $P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 1 - 0.4 = 0.6$.

例 4 已知 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = 0, P(AC) = P(BC) = \frac{1}{6}$, 则事件 A, B, C 全不发生的概率为 _____. (考研真题)

【解析】 因为 $P(AB) = 0$, 所以 $P(ABC) = 0$.

$P(\overline{ABC}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C)$

$= 1 - [P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)]$

$= 1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 0 - \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + 0 \right) = \frac{7}{12}$.

【方法点击】 本题考查了德摩根律、逆事件概率公式、广义加法公式以及概率的单调性, 综合性较强, 是考研数学中常见的命题方式.

例 5 设当事件 A 与 B 同时发生时, 事件 C 必发生, 则(). (考研真题)

(A) $P(C) \leq P(A) + P(B) - 1$

(B) $P(C) \geq P(A) + P(B) - 1$

(C) $P(C) = P(AB)$

(D) $P(C) = P(A \cup B)$

【解析】 由题意“当 A, B 发生时, C 必然发生”, 从而 $AB \subset C$, 所以 $P(AB) \leq P(C)$, 那么

$$\begin{aligned} P(C) &\geq P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &\geq P(A) + P(B) - 1. \end{aligned}$$

$$P(A \cup B) \leq 1$$

故应选(B).

【方法点击】 本题考查概率的“单调性”, 即若 $A \subset B$, A, B 是两个随机事件, 则

$$0 \leq P(A) \leq P(B) \leq 1.$$

事实上, 因为 $A \subset B$, 所以 $B - A$ 与 A 互不相容, 并且满足 $B = (B - A) \cup A$, 由概率的非负性和加法公式得

$$P(B) = P(B - A) + P(A),$$

从而 $0 \leq P(A) \leq P(B)$.

例 6 设 A, B 是任意两个随机事件, 则 $P\{(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})\} = \underline{\hspace{2cm}}$. (考研真题)

【解析】 注意到

$$(A+B)(\bar{A}+\bar{B}) = A(\bar{A}+\bar{B}) + B(\bar{A}+\bar{B}) = A\bar{B} + \bar{A}B,$$

$$(\bar{A}+B)(A+\bar{B}) = \bar{A}(A+\bar{B}) + B(A+\bar{B}) = \bar{A}\bar{B} + AB,$$

那么 $(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B}) = (A\bar{B} + \bar{A}B)(\bar{A}\bar{B} + AB) = \emptyset$, 则

$$P\{(\bar{A}+B)(A+B)(\bar{A}+\bar{B})(A+\bar{B})\} = P\{\emptyset\} = 0.$$

第四节 等可能概型(古典概型)

知识全解

【知识结构】



【考点精析】

1. 古典概型.

具有下列两个特点的试验称为古典概型.

- (1) 每次试验只有有限种可能的试验结果;
- (2) 每次试验中, 各基本事件出现的可能性完全相同.

对于古典概型, 事件 A 发生的概率为

$$P(A) = \frac{A \text{ 中基本事件数}}{\Omega \text{ 中基本事件数}} = \frac{m}{n}.$$

2. 几何概型.

如果随机试验的样本空间是一个区域(例如直线上的区间、平面或空间中的区域), 而且样本空间中每个试验结果的出现具有等可能性, 那么规定事件 A 的概率为

$$P(A) = \frac{A \text{ 的测度(长度、面积、体积)}}{\text{样本空间的测度(长度、面积、体积)}}.$$

本节内容属于考研数学中的重要知识点, 其中古典概型很少单独命题, 一般通过结合后面两章的离散型随机变量求概率分布进行考查; 几何概型经常以填空题、选择题的方式出现, 考生应将几何概型与后面的均匀分布联系在一起理解掌握.