清华大学出版社“十二五”规划教材

# 概率论与数理统计

张立石 主编

清华大学出版社

# 概率论与数理统计

张立石 主编 / 赵学达 高辉 屈磊磊 王显昌 副主编

清华大学出版社
北 京

## 内 容 简 介

本书根据编者教学实践所积累的经验，同时结合普通高等院校财经类和管理类的教学基本要求编写而成.在概念的引入和内容的安排上，尽量做到概念引入的自然性，内容叙述的逻辑严谨性和直观性.本书包括概率论和数理统计两个部分，每章后附有习题，附录中给出 MATLAB 的基本命令和结合实际例子的实验.

本书可作为高等学校财经、管理等专业的教材，也可作为数学实验课程的教材，或作为各专业研究生入学考试的参考书.



**图书在版编目(CIP)数据**

概率论与数理统计/张立石主编.--北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-38163-1

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①概率论－高等学校－教材 ②数理统计－高等学校－教材　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 227840 号

**责任编辑**：陈　明　洪　英
**封面设计**：傅瑞学
**责任校对**：刘玉霞
**责任印制**：沈　露

**出版发行**：清华大学出版社
　　**网　　址**：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座　　**邮　　编**：100084
　　**社 总 机**：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　**质 量 反 馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**印 装 者**：三河市金元印装有限公司
**经　　销**：全国新华书店
**开　　本**：185mm×230mm　　**印　张**：15.25　　**字　　数**：329 千字
**版　　次**：2015 年 1 月第 1 版　　**印　　次**：2015 年 1 月第1 次印刷
**印　　数**：1～3000
**定　　价**：28.00 元

产品编号：051557-01

# 前 言

FOREWORD

随着信息化时代的到来，人们对于现实生活中大量涌现出的数据已经不再是以简单的统计报表形式来呈现.揭示海量数据的内在规律、预测推断事物的发展方向成为处理数据的目的.由于计算机技术的迅猛发展，借助计算机处理数据成为必然.然而，在依托的数学理论基础上，用到最多是概率论与数理统计.概率论与数理统计由于其具有揭示随机现象内在规律的特点而被人们广泛使用，已经成为高等学校各专业开设的重要的基础课.本课程不但可以培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力，还可以提高学生的科学计算能力和理论联系实际的能力.

在本教材的编写过程中，我们本着以自然的方式引入数学概念、用大量的练习来帮助理解概念、以计算机模拟来学习计算技能这一原则，在学习总结同类教材成功经验的基础上同时结合自己的教学经验，使本教材具有以下特点.

(1) 结合具体问题，引入数学概念

在每一章的开头，我们以一个实际问题作为本章的先导，使读者对随后引入的每一个数学概念都有清晰的数学背景，如事件的独立性、方差分析、回归分析等.

(2) 概念产生自然，体现数学思想

数学概念的产生除了具体的实际背景外，数学上的典型的思维方法也可以为概念的产生和处理问题方法的数学化处理提供依据，如教材中随机事件集合化以及事件关系的集合运算表现方法、从频率到概率的过渡等.

(3) 理论与实际相结合，培养实际应用能力

在习题的配置上，安排一定量的与实际相结合的题目，这些题目来自现实生活中的具体问题，并且可以利用 MATLAB 计算.

本书的编写安排如下：第 1、2 章由高辉编写，第 3、6 章由赵学达编写，第 4、5、8 章由屈磊磊编写，第 7 章和附录部分由王显昌编写，第 9、10 章由张立石编写，全书由张立石负责统稿、定稿.

大连海洋大学理学院领导一直鼓励和支持编写这本教材，高胜哲老师在本书的编写过程中提出了许多建设性的意见和建议，在此一并表示衷心的感谢.

由于编者水平有限，书中的不足之处敬请读者和同行批评指正.

编　者

2014 年 9 月于大连

# 目　录

CONTENTS


第 1 章　随机事件与概率 …… 1

1.1　随机事件 …… 1

1.1.1　随机现象 …… 1

1.1.2　随机事件 …… 2

1.1.3　随机事件的关系和运算 …… 3

1.2　概率的定义及其性质 …… 6

1.2.1　频率 …… 6

1.2.2　概率的统计定义 …… 7

1.2.3　概率的公理化定义及性质 …… 8

1.3　古典概型 …… 10

1.4　条件概率及条件概率三大公式 …… 13

1.4.1　条件概率 …… 13

1.4.2　乘法公式 …… 15

1.4.3　全概率公式 …… 15

1.5　事件的独立性 …… 18

1.5.1　两个事件的独立性 …… 18

1.5.2　多个事件的独立性 …… 19

习题 1 …… 19

习题 1 答案 …… 22

第 2 章　随机变量及其分布 …… 24

2.1　随机变量 …… 25

2.2　离散型随机变量 …… 26

2.2.1　离散型随机变量及其分布律 …… 26

2.2.2　常用的离散型随机变量的分布 …… 27

2.3　随机变量的分布函数 …… 29

2.3.1　分布函数的定义 …… 29

2.3.2　分布函数的性质 …… 29

2.3.3 离散型随机变量的分布函数 …… 30
2.3.4 利用分布函数求事件的概率 …… 31
2.4 连续型随机变量 …… 32
2.4.1 连续型随机变量的概率密度函数 …… 32
2.4.2 常用三种连续型随机变量的分布 …… 34
2.5 随机变量的函数的分布 …… 37
2.5.1 离散型随机变量的函数的分布 …… 37
2.5.2 连续型随机变量的函数的分布 …… 38
习题 2 …… 40
习题 2 答案 …… 42

**第 3 章 多维随机变量及其分布** …… 45

3.1 二维随机变量的分布函数及其性质 …… 45
3.2 二维离散型随机变量 …… 47
3.2.1 二维离散型随机变量的分布律与边缘分布律 …… 47
3.2.2 二维离散型随机变量的独立性 …… 51
3.2.3 二维离散型随机变量的条件分布列 …… 52
3.3 二维连续型随机变量 …… 55
3.3.1 二维连续型随机变量的概率密度与边缘概率密度 …… 55
3.3.2 两个重要的二维连续型分布 …… 58
3.3.3 二维连续型随机变量的独立性 …… 60
3.3.4 二维连续型随机变量的条件概率密度 …… 62
3.4 二维随机变量函数的分布 …… 65
3.4.1 二维离散型随机变量函数的分布 …… 65
3.4.2 二维连续型随机变量函数的分布 …… 67
习题 3 …… 71
习题 3 答案 …… 76

**第 4 章 随机变量的数字特征** …… 81

4.1 数学期望 …… 82
4.1.1 数学期望的定义 …… 82
4.1.2 随机变量函数的数学期望 …… 85
4.1.3 二维随机变量的数学期望 …… 87
4.1.4 数学期望的性质 …… 88
4.2 方差 …… 89

4.2.1 方差的定义 …… 90
4.2.2 方差的性质 …… 93
4.3 协方差与相关系数 …… 94
4.3.1 协方差 …… 94
4.3.2 相关系数 …… 96
4.3.3 矩 …… 98
习题 4 …… 98
习题 4 答案 …… 102

**第 5 章 大数定律与中心极限定理** …… 104

5.1 切比雪夫不等式 …… 104
5.2 大数定律 …… 106
5.3 中心极限定理 …… 107
习题 5 …… 109
习题 5 答案 …… 110

**第 6 章 数理统计的基本概念** …… 111

6.1 随机样本 …… 111
6.2 常用统计量的分布 …… 115
6.3 正态总体的抽样分布 …… 121
习题 6 …… 122
习题 6 答案 …… 123

**第 7 章 正态总体参数的区间估计与假设检验** …… 125

7.1 区间估计 …… 126
7.1.1 区间估计 …… 126
7.1.2 区间估计的一般步骤 …… 127
7.2 正态总体均值和方差的区间估计 …… 128
7.2.1 单个正态总体参数的置信区间 …… 128
7.2.2 双正态总体均值差与方差比的置信区间 …… 130
7.3 单侧置信区间 …… 132
7.4 假设检验 …… 133
7.4.1 假设检验的基本思想 …… 133
7.4.2 假设检验的基本步骤 …… 134
7.5 单个正态总体的假设检验 …… 135

7.5.1 $\sigma^2$ 已知,关于 $\mu$ 的检验($Z$ 检验) …… 135
7.5.2 $\sigma^2$ 未知,关于 $\mu$ 的检验($t$ 检验) …… 136
7.5.3 $\mu$ 未知,关于 $\sigma^2$ 的检验($\chi^2$ 检验) …… 137
7.6 双正态总体的假设检验 …… 138
7.6.1 双正态总体均值差的检验($t$ 检验) …… 138
7.6.2 双正态总体方差的假设检验 …… 139
习题 7 …… 142
习题 7 答案 …… 145

**第 8 章 参数的点估计及其优良性** …… 147

8.1 矩估计法 …… 147
8.2 极大似然估计 …… 151
8.3 估计量优良性的评定标准 …… 154
习题 8 …… 156
习题 8 答案 …… 158

**第 9 章 方差分析** …… 159

9.1 方差分析的基本原理 …… 159
9.2 单因素方差分析 …… 161
9.2.1 问题模型 …… 161
9.2.2 平方和的分解 …… 162
9.3 双因素方差分析 …… 165
9.3.1 双因素方差分析的相关约定 …… 165
9.3.2 相关假设 …… 165
9.3.3 无交互作用情况 …… 166
9.3.4 有交互作用情况 …… 169
习题 9 …… 173
习题 9 答案 …… 175

**第 10 章 回归分析** …… 178

10.1 一元线性回归 …… 179
10.1.1 系数 $a,b$ 的估计 …… 180
10.1.2 $\sigma^2$ 的估计 …… 182
10.1.3 回归方程的显著性检验 …… 184
10.1.4 $Y$ 回归值的点估计与区间估计预测问题 …… 186

10.1.5　可化为一元线性回归模型的情形 ………………………… 188
10.2　多元线性回归分析 ………………………………………………… 192
10.2.1　回归方程的显著性检验 ………………………………… 195
10.2.2　回归方程的系数显著性检验 …………………………… 198
习题 10 ……………………………………………………………………… 200
习题 10 答案……………………………………………………………… 202

**附录 A　数学实验**……………………………………………………… 204

**附录 B　统计分布表** …………………………………………………… 218

**参考文献**………………………………………………………………… 232

# 第1章

# 随机事件与概率

概率论是从数量化的角度来研究随机现象的统计规律的学科，是统计学的理论基础. 本章重点介绍概率论的两个最基本概念：随机事件及其概率. 首先从客观普遍存在的随机现象出发，考察随机试验及其随机事件，建立了概率的公理化体系，研究了概率的基本性质；其次分析了随机事件的条件概率问题，从而形成了随机事件的独立性基础理论. 本章内容是概率论与数理统计学科产生的实际来源和发展的理论基础.

本章要用到的准备知识：集合及其运算，计数原理，排列和组合计算公式.

本章拟解决以下问题：

概率论起源于博弈问题，不仅可以用于对博弈问题的研究，其应用遍及自然科学的各个方面. 通过本章的学习可以解决如下问题：

**问题 1** 任意 60 个人，至少有两人生日在同一天的概率是多少？

**问题 2** 体育比赛中抽签决定先后次序的机会是均等的吗？

**问题 3** 解释医生看病诊断出错的概率.

**问题 4** 常言道："三个臭皮匠，顶个诸葛亮."这句话如何从概率的计算来解释？

## 1.1 随机事件

### 1.1.1 随机现象

自然界与人类社会所能观察到的现象多种多样，若从结果能否预测的角度来分，大致可分为两类，一类是在一定条件下必然发生(或不发生)的现象，称为确定性现象. 例如，上抛物体必然下落，太阳东升西落，度量三角形的内角和总是 $180°$等.

另一类现象是在观测之前无法预知确切结果的现象，称为随机现象. 例如，抛一枚硬币，结果可能正面(或反面)朝上；向同一目标射击，各次弹着点都不相同；掷一颗骰子，可能出

现的点数；随便走到一个有交通灯的十字路口，可能会遇到红灯，也可能会遇到绿灯或黄灯；明天的气温等，其结果都带有偶然性.

由于随机现象的结果事先不能预知，初看起来，随机现象毫无规律可言.但是人们通过长期实践并深入研究之后，发现这类现象在大量重复试验或观察下，它的结果却呈现出某种规律性.

### 1.1.2 随机事件

为揭示随机现象的统计规律性，进一步明确随机现象的含义，我们从随机试验谈起.什么是“随机试验”呢？我们先看几个例子.

$E_1$：掷一颗骰子，观察出现的点数；

$E_2$：将一枚硬币抛掷两次，观察正($H$)、反($T$)面情况；

$E_3$：将一枚硬币抛掷两次，观察正面出现的次数；

$E_4$：从一批产品中抽取 $n$ 件，观察次品出现的数量；

$E_5$：律师每天可能接到的案件数量.

上述这些试验(或现象)都具有两个明显的特征：例如，掷一颗骰子，可能出现的点数是1,2,3,4,5,6，但掷之前并不知道会出现的点数，并且这个试验可以在相同的条件下重复进行；又如，从一批产品中抽取 $n$ 件，次品的个数可能为 $0,1,2,\cdots,n$，但不能预知到底有多少次品，这个试验也可以在相同的条件下重复进行.

**定义 1.1.1** 一个试验(或观察)如果满足以下条件：

(1) 可重复性：试验在相同条件下可重复进行；

(2) 可观察性：所有可能结果是已知且不止一个；

(3) 随机性：试验之前究竟出现哪个结果不能预知.

称其为一个随机试验，简称试验，常用字母 $E$ 表示.

对于随机试验，人们感兴趣的是随机试验的结果，为了便于叙述，我们给出了以下定义.

**定义 1.1.2** 随机试验 $E$ 的每一个可能的结果称为随机试验 $E$ 的一个样本点，记为 $e$. 随机试验 $E$ 的所有样本点组成的集合称为随机试验 $E$ 的样本空间，记为 $S$ 或 $\Omega$.

上述随机试验 $E_1,E_2,E_3,E_4,E_5$ 对应的样本空间分别为

$$S_1=\{1,2,3,4,5,6\};\qquad S_2=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\};$$

$$S_3=\{0,1,2\};\qquad S_4=\{0,1,2,\cdots,n\};\qquad S_5=\{0,1,2,\cdots\}.$$

在实际问题中，人们常常需要研究满足某些条件的样本点组成的集合，即关心那些满足某些条件的样本点在试验后是否出现.例如，在 $E_2$ 中，设 $A=\{$出现正面$\}=\{(H,T),(T,H),(H,H)\}$；$B=\{$两次反面$\}=\{(T,T)\}$等，这些都是样本空间的子集.

**定义 1.1.3** 随机试验 $E$ 的样本空间 $S$ 的子集称为随机事件，简称事件.一般用 $A,B,C,\cdots$表示.若试验后的结果(样本点)属于随机事件 $A$，则称随机事件 $A$ 发生；否则称 $A$ 不发生.

特别地，由一个样本点组成的单点集称为随机试验 $E$ 的基本事件. 样本空间 $S$ 作为它自己的子集，由于它是由全体样本点组成的事件，因此在每次试验中是必然发生的，我们把样本空间 $S$ 称为必然事件. 另外，空集 $\varnothing$ 作为样本空间 $S$ 的子集，也是一个事件，因为它不包含任何样本点，在每次试验中是绝不会发生的，我们把空集 $\varnothing$ 称为不可能事件.

例如，在 $E_1$ 中，$A=\{$出现点数小于 7$\}$，则 $A$ 是必然事件；$B=\{$出现 9 点$\}$，则 $B$ 是不可能事件；$C=\{$出现 3 点$\}$，则 $C$ 是基本事件；$D=\{$出现偶数点$\}$，则 $D=\{2,4,6\}$. 若实际掷出"2 点"，我们便说事件 $D$ 发生了.

**注**　由上述定义可以看出，集合论和概率论之间的对应关系如下表所示.

| 符　　号 | 集合含义 | 概率含义 |
|---|---|---|
| $S$ | 全集 | 样本空间 |
| $\varnothing$ | 空集 | 不可能事件 |
| $e$ | 元素 | 样本点 |
| $A$ | 子集 | 事件 |
| $e\in A$ | 元素属于 $A$ | 事件 $A$ 发生 |

由此可见，将样本点属于集合表示该事件发生，这样集合论和概率论之间就联系起来了.

### 1.1.3　随机事件的关系和运算

在一个随机试验中，一般有很多随机事件. 为了通过对简单事件的研究来掌握比较复杂事件的规律，需要研究事件的关系和运算. 由于事件是样本空间的子集，因此事件的关系和运算与集合的关系和运算是一致的.

**1. 事件间的运算**

(1) 事件的并(或和)：称事件 $A$ 与事件 $B$ 至少有一个发生的事件为事件 $A$ 与 $B$ 的并事件，记为 $A\cup B$. 即 $A\cup B=\{A$ 发生或 $B$ 发生$\}=\{e\mid e\in A$ 或 $e\in B\}$.

显然，事件 $A\cup B$ 是由 $A$ 和 $B$ 的所有的样本点构成的事件，这样事件 $A\cup B$ 就是子集 $A$ 与 $B$ 的并集，如图 1-1 所示.

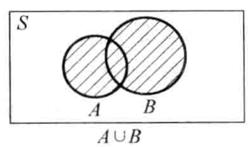


图 1-1　事件 $A$ 与事件 $B$ 的并

例如，在 $E_2$ 中，令 $A=\{$出现正面$\}$，$B=\{$出现反面$\}$，则 $A\cup B=\{(H,H),(H,T),(T,H),(T,T)\}$.

(2) 事件的交(或积)：称事件 $A$ 与事件 $B$ 同时发生的事件为事件 $A$ 与 $B$ 的积事件，记为 $A\cap B$ 或 $AB$. 即 $A\cap B=\{A$ 发生且 $B$ 发生$\}=\{e\mid e\in A$ 且 $e\in B\}$.

显然，事件 $A\cap B$ 是由 $A$ 和 $B$ 的共同的样本点构成的事件，这样事件 $A\cap B$ 就是子集 $A$ 与 $B$ 的交集，如图 1-2 所示.

例如，在 $E_1$ 中，令 $A=\{$掷出奇数点$\}$，$B=\{$点数小于 3$\}$，则 $A\cap B=\{$掷出 1 点$\}$.

(3) 事件的差：称事件 $A$ 发生但事件 $B$ 不发生的事件为事件 $A$ 与 $B$ 的差事件，记为 $A-B$，即 $A-B=\{A$ 发生但 $B$ 不发生$\}=\{e|e\in A$ 且 $e\notin B\}$，如图 1-3 所示.

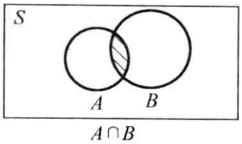

图 1-2 事件 $A$ 与事件 $B$ 的交

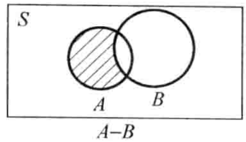

图 1-3 事件 $A$ 与事件 $B$ 的差

显然，$A-B=A-AB$.

例如，在 $E_1$ 中，令 $A=\{$掷出偶数点$\}$，$B=\{$点数小于 5$\}$，则 $A-B=\{$掷出 6 点$\}$.

(4) 推广：两个事件的并与交可推广到有限个或可数无穷多个事件的并与交.

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\{\text{事件 } A_1,A_2,\cdots,A_n \text{ 中至少有一个发生}\};$$

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{\text{事件 } A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots \text{ 中至少有一个发生}\};$$

$$\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\{\text{事件 } A_1,A_2,\cdots,A_n \text{ 同时发生}\};$$

$$\bigcap_{i=1}^{\infty}A_i=\{\text{事件 } A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots \text{ 同时发生}\}.$$

**2. 事件间的关系**

(1) 事件的包含：若事件 $A$ 发生必然导致事件 $B$ 发生，则称事件 $A$ 包含于事件 $B$，记为 $A\subset B$，即 $A$ 的样本点都在 $B$ 中. 显然，事件 $A\subset B$ 的含义与集合论中的包含的含义是一致的.

(2) 事件的相等：若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 $A$ 与 $B$ 相等，记为 $A=B$. 显然，事件 $A$ 与事件 $B$ 相等是指 $A$ 和 $B$ 所含的样本点完全相同，这等同于集合论中集合的相等.

(3) 互不相容：若事件 $A$ 与事件 $B$ 不能同时发生，则称 $A$ 与 $B$ 是互不相容的(或互斥的). 也就是说，$AB$ 是一个不可能事件，即 $AB=\varnothing$.

显然，$A$ 与 $B$ 是互不相容的等价于它们没有公共的样本点，如图 1-4 所示.

例如，在 $E_1$ 中，令 $A=\{$出现 1 点$\}$，$B=\{$出现 2 点$\}$，则 $A$ 与 $B$ 是互不相容的. 又如，任意事件 $A$ 与 $B$，事件 $A$ 与 $B-A$ 是互不相容的，如图 1-5 所示.

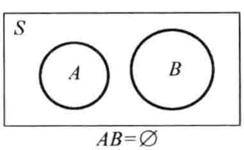

图 1-4 事件 $A$ 与事件 $B$ 的交为空集

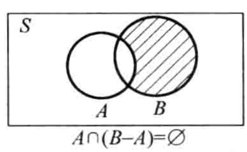

图 1-5 事件 $A$ 与事件 $B$-$A$ 的交为空集

如果 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中,任意两个事件都互不相容,则称 $n$ 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的,即 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n$.

显然,任意一个随机试验中,基本事件是互不相容的.

(4) 对立事件(逆事件):如果在每一次试验中事件 $A$ 与事件 $B$ 有且只有一个发生,则称事件 $A$ 与事件 $B$ 是互逆(对立)的,并称其中的一个事件为另一个事件的逆事件(对立事件),记作 $A=\overline{B}$ 或 $B=\overline{A}$.

根据定义,在一次试验中,如果 $A$ 发生,则 $\overline{A}$ 不发生;反之亦然.显然,$A\cup\overline{A}=S$,$A\cap\overline{A}=\varnothing$.

也就是说,$\overline{A}$ 是由样本空间 $S$ 中的所有不属于 $A$ 的样本点构成的.若用集合表示事件,则 $A$ 的对立事件 $\overline{A}$ 就是 $A$ 的补集,如图 1-6 所示.

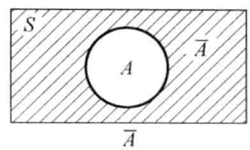

图 1-6 事件 $A$ 的对立事件 $\overline{A}$

例如,从有 3 个次品、7 个正品的 10 个产品中任取 3 个,若令 $A=\{$取得的 3 个产品中至少有一个次品$\}$,则 $\overline{A}=\{$取得的 3 个产品均为正品$\}$.

**注** (1) $A-B=A\overline{B}$;

(2) 对立事件必为互不相容事件,其逆不真,即互不相容事件不一定是对立事件.

**3. 事件的运算规律**

由事件的关系和运算的定义可以看出,它们与集合的关系和运算是一致的,因此,集合的运算规律对事件的运算也适用,读者可通过集合论的知识自行给出.在这里要注意对偶律:$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$,$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.并且它可推广到有限个和可数个事件的情形.对偶律通常也称为德·摩根律,在涉及事件的和、积和对立事件三种关系时经常会用到.

**例 1.1.1** 设 $A,B,C$ 为三个事件,用 $A,B,C$ 的运算关系表示下列各事件:

(1) $A$ 发生,$B$ 与 $C$ 不发生;

(2) $A,B,C$ 中至少有一个发生;

(3) $A,B,C$ 都发生;

(4) $A,B,C$ 都不发生;

(5) $A,B,C$ 中最多两个发生;

(6) $A,B,C$ 中恰有一个发生.

**分析** 本题给出了随机事件的运算关系的文字描述,要求用数学符号来表示这些随机事件,用随机事件的运算和关系的定义来解决.

**解** (1)“$B$ 不发生”等价于 $\overline{B}$ 发生,所以可以表示为 $A\overline{B}\overline{C}$ 或 $A-B-C$.

(2)“至少有一个发生”是指三个事件中肯定有一个发生,可能是其中的任何一个,所以可以表示为 $A\cup B\cup C$.

换一个角度,“至少有一个发生”的意思是发生事件的个数可能是一个、两个或三个,所以又可以表示为 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup ABC$.

(3)“都发生”的意思是 $A$ 发生、$B$ 发生且 $C$ 发生,所以可以表示为 $ABC$.

(4)“都不发生”的意思是 $\overline{A}$ 发生、$\overline{B}$ 发生且 $\overline{C}$ 发生,所以可以表示为 $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

(5)“最多两个发生”的意思是发生事件的个数可能是一个、两个或者没有事件发生,所以可以表示为 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup\overline{A}BC\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}\overline{B}\overline{C}$.

换一个角度,“最多两个发生”是三个事件都发生的对立事件,所以又可以表示为$\overline{ABC}$.

(6)“恰有一个发生”的意思是有两个事件不发生,剩余的一个事件发生,可能是三个事件中的任何一个,所以可以表示为 $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$.

用其他事件的运算来表示一个事件,方法往往不唯一.在解决具体问题时,往往要根据需要选择其中的一种方法.当正面分析问题较复杂时,常常考虑这个问题的反面——对立事件,这种方法在后面的学习中也会经常用到.

**例 1.1.2** 一名射手连续向某一目标射击三次,令 $A_i=\{$第 $i$ 次射击击中目标$\}$,$i=1,2,3$.试用文字叙述下列事件:(1)$A_1\cup A_2$;(2)$\overline{A}_2$;(3)$A_3-A_2$;(4)$\overline{A_1\cup A_2}$;(5)$\overline{A}_1\cup\overline{A}_2$.

**解** (1) $A_1\cup A_2=$前两次射击中至少有一次击中目标;

(2) $\overline{A}_2=$第二次射击未击中目标;

(3) $A_3-A_2=$第三次击中目标但第二次未击中目标;

(4) $\overline{A_1\cup A_2}=$射手第一次和第二次都没有击中目标;

(5) $\overline{A}_1\cup\overline{A}_2=$射手第一次或第二次没有击中目标.

# 1.2 概率的定义及其性质

除必然事件和不可能事件外,任一个随机事件在一次试验中可能发生,也可能不发生.人们常常需要知道一个事件在试验中发生的可能性到底有多大,但在大量重复一随机试验时,会发现有些事件发生的次数多一些,有些事件发生的次数少一些.也就是说,有些事件发生的可能性大一些,有些事件发生的可能性小一些.例如,一个盒子中有 8 个黑球,2 个白球,从中任意取一个,则取到黑球的可能性比取到白球的可能性大.那如何度量事件发生的可能性呢?自然地,人们希望用一个数来表示事件在一次试验中发生的可能性的大小.为此,需要引入频率的概念.它描述了事件所发生的频繁程度,进而引出表征事件在一次试验中发生的可能性大小的数——概率.

## 1.2.1 频率

**定义 1.2.1** 若事件 $A$ 在 $n$ 次重复试验中出现 $n_A$ 次,则比值$\frac{n_A}{n}$称为事件 $A$ 发生的频率,记为 $f_n(A)$,即 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$.

由频率的定义易得出下列基本性质:

(1) $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$；

(2) $f_n(S)=1$；

(3) 若 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是互不相容的事件，则

$$f_n(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = f_n(A_1) + f_n(A_2) + \cdots + f_n(A_n).$$

事件 $A$ 的频率反映了 $A$ 发生的频繁程度. 频率越大，事件 $A$ 发生越频繁，这意味着 $A$ 在一次试验中发生的可能性越大. 然而频率 $f_n(A)$ 依赖于试验次数以及每次试验的结果，而试验结果具有随机性，所以频率也具有随机性. 但这种波动不是杂乱无章的，当 $n$ 增大时，频率的波动幅度随之减小，随着 $n$ 逐渐增大，频率 $f_n(A)$ 也就逐渐稳定于某个常数.

历史上著名的统计学家蒲丰和皮尔逊曾进行过大量掷硬币的试验，所得结果如下表(其中 $n_H$ 表示正面发生的频数，$f_n(H)$ 表示正面发生的频率)所示：

| 实验者 | $n$ | $n_H$ | $f_n(H)$ |
|---|---|---|---|
| 德・摩根 | 2048 | 1061 | 0.5181 |
| 蒲丰 | 4040 | 2048 | 0.5069 |
| K．皮尔逊 | 12000 | 6019 | 0.5016 |
| K．皮尔逊 | 24000 | 12012 | 0.5005 |

可见，出现正面的频率总在 0.5 附近波动. 而且随着试验次数的增加，它逐渐稳定于 0.5. 通过实践，人们发现，任何事件都有这样一个客观存在的常数与之对应. 这种“频率稳定性”即通常所说的统计规律性，这种用频率的稳定值定义事件的概率的方法称为概率的统计定义.

## 1.2.2　概率的统计定义

**定义 1.2.2**　设事件 $A$ 在 $n$ 次重复试验中出现 $n_A$ 次，若当试验次数 $n$ 很大时，频率 $\frac{n_A}{n}$ 稳定地在某一数值 $p$ 的附近摆动，则称数 $p$ 为事件 $A$ 的概率，记为 $P(A)=p$.

由定义，显然有 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$，$P(S)=1$.

设事件 $A$，$B$ 互不相容，则 $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$.

概率的统计定义虽然解决了不少问题，但它在理论上存在一定的缺陷. 例如，在实际问题中往往无法满足概率统计定义中要求的试验的次数充分大，也不清楚试验次数大到什么程度；再如定义中“$\frac{n_A}{n}$稳定地在某一数值 $p$ 的附近摆动”含义不清，因此概率的统计定义不能作为数学意义的定义. 但我们注意到，“频率”和“概率”都具有共同的属性，这些共同的属性，可以作为概率的数学定义的基础. 1933 年，苏联数学家科尔莫戈罗夫综合已有的大量成果，提出了概率的公理化结构，明确定义了基本概念，使得概率论成为严谨的数学分支，推动了概率论的发展.

### 1.2.3 概率的公理化定义及性质

**定义 1.2.3** 设 $S$ 是随机试验 $E$ 的样本空间，如果对于 $E$ 的每一个事件 $A$，有唯一的实数 $P(A)$ 和它对应，并且这一事件的函数 $P(A)$ 满足以下公理：

(1) 非负性：$P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性：$P(S)=1$；

(3) 可列可加性：对于可列无穷多个互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称 $P(A)$ 为事件 $A$ 的概率.

特别要注意：

(1) 定义中的可列可加性要求对无限多个互斥事件也成立，这不同于通常的频率可加性；

(2) 概率是实数，它是事件的函数；

(3) 概率的公理化定义并没有给出如何求一个事件的概率，由定义只能解决由已知概率去求未知概率的问题，但它却从本质上明确了概率所必须满足的一些一般特征.

由概率的公理化定义可以推得概率的一些性质.

**性质 1** $P(\varnothing)=0$.

**证明** 令 $A_i=\varnothing(i=1,2,\cdots)$，则 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是互不相容的事件，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i=\varnothing$. 根据概率的可列可加性有

$$P(\varnothing)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(\varnothing).$$

由于实数 $P(\varnothing)\geqslant 0$，因此 $P(\varnothing)=0$.

**性质 2**(有限可加性) 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 $n$ 个互不相容的事件，则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

**证明** 令 $A_i=\varnothing(i=n+1,n+2,\cdots)$，根据概率的可列可加性有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

**性质 3** $P(\overline{A})=1-P(A)$.

**证明** 因为 $A\cup\overline{A}=S,A\overline{A}=\varnothing$，由规范性和有限可加性得

$$1=P(S)=P(A\cup\overline{A})=P(A)+P(\overline{A}).$$

移项得 $P(\overline{A})=1-P(A)$.

**注** 求某个事件的概率时，常遇到求“至少……”或“至多……”等事件概率的问题. 常常考虑先求其对立事件的概率，然后由性质 3 再求原来事件的概率.