普通高等教育“十二五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

概率论与数理统计

杨延飞　主编
方承胜　主审

华中科技大学出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育“十二五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

概率论与数理统计

主　编　杨延飞
主　审　方承胜
编　委　胡　欣　何　剑　刘彩霞
　　　　王中艳　刘清国　蔡泽彬

华中科技大学出版社
中国·武汉

内 容 提 要

本书由两大部分组成：第一部分是概率论的基础知识，包括概率的公理、概率分布、概率密度、随机变量函数的分布、大数定律与中心极限定理；第二部分是数理统计基础，包括样本概念、抽样分布、参数估计和假设检验.

本书强调概率统计方法的应用，尤其是在军事领域的运用，设置了一些有理论或实践意义的研讨专题.

本书可供普通高等学校工科和经管类专业使用，也可供相关领域的科研人员和工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/杨延飞主编. —武汉：华中科技大学出版社，2015.1
ISBN 978-7-5680-0626-2

Ⅰ.①概…　Ⅱ.①杨…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教材　②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ.①O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 022583 号

概率论与数理统计　　　　　　杨延飞　主编

责任编辑：王汉江
封面设计：潘　群
责任校对：何　欢
责任监印：周治超
出版发行：华中科技大学出版社(中国·武汉)
　　　　　武昌喻家山　　邮编：430074　　电话：(027)81321915
录　　排：武汉市洪山区佳年华文印部
印　　刷：武汉科源印刷设计有限公司
开　　本：710mm×1000mm　1/16
印　　张：11.75
字　　数：236 千字
版　　次：2015 年 3 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：29.80 元

前　言

概率论与数理统计是一门应用性很强的学科，是学习现代科学技术的重要理论基础. 目前，概率论与数理统计的理论和方法几乎涉及所有工程技术领域，并在医药、农林、经济和社会保障等领域有广泛的应用.

为了适应新修订的人才培养方案，体现为战略预警体系培养人才的建院特色，适应现代大学数学教学改革的发展潮流，编者在分析雷达工程、指挥自动化、电子对抗等专业需求的基础上，结合多年教学实践，编写了《概率论与数理统计》教材.

本书主要特点如下：

1. 淡化理论推导，突出基础应用

概率论与数理统计作为一门独立的数学学科有其完整的理论体系，若追求数学体系的完整性，则与新人才培养方案相悖. 在本教材的编写中，我们淡化了理论推导，不追求数学理论体系的完整性，而通过设置大量例题，尤其是具有军事背景的例题和专题，突出理论和方法的应用.

2. 增加研讨专题，体现军事特色

本教材在大部分章节的最后都设置了专门的研讨专题，针对一些能够用本章所学内容解决的、有趣的或有重要理论或实践意义的专题，进行讨论，使读者在理解本章理论方法的同时，了解该方法在相关领域的应用.

3. 融入数学实验，体现改革趋势

将数学建模和数学实验思想融入数学主干课教学，是大学数学课程建设的发展趋势和潮流，是数学教学信息化的内在要求. 我们通过研讨专题，将专题用数学建模的方式加以讨论，并对某些专题给出了 Matlab 程序，使学员能够真正动手用所学理论方法解决实际问题.

本书共 7 章. 第 1 章介绍基本的概率模型；第 2 章介绍一维随机变量及其分布，同时还包含数字特征；第 3 章介绍多维随机变量及其分布；第 4 章介绍极限定理；第 5 章介绍样本和抽样分布；第 6 章介绍参数估计基本内容；第 7 章介绍假设检验的基本框架和基于正态总体的假设检验基础.

本教材由杨延飞主编，方承胜主审. 编写分工如下：杨延飞负责引言、第 1 章和第 4 章，胡欣负责第 2 章，何剑负责第 3 章，王中艳、刘清国负责第 5 章，刘彩霞负责第 6

章，王中艳、蔡泽彬负责第 7 章，全书由杨延飞负责统稿. 在编写的过程中，参考了国内外众多教材和书籍，借鉴和吸收了相关成果，在此表示感谢.

由于作者水平有限，书中有错误和不妥之处，敬请读者批评指正.

编　者

2015 年 1 月

目　录

第一篇　概　率　论

第二篇 数理统计

第一篇

概率论

自然界和人类社会中观察到的现象大致可归为两类：一类是确定性现象，即在一定条件下必然发生的现象.例如，在标准大气压下，水加热到100℃会沸腾；同种电荷相互排斥；在没有外力作用下作等速直线运动的物体必然继续作等速直线运动等.另一类是不确定性现象，例如，抛掷一枚硬币，要么正面朝上，要么反面朝上，但在抛掷之前无法肯定到底会出现哪种结果；同一门炮向同一个目标发射多枚同种类型的炮弹，因为受到炮弹制造误差、天气等无法准确把握的因素影响，在射击之前无法准确预测炮弹弹着点等.

为什么会存在这种不确定性呢？其实任何现象都是由完全确定的原因引起的，但由于世界的普遍联系，任何现象严格来讲都受到无穷多个因素的影响.以抛硬币为例，根据牛顿万有引力定律，任何物体与硬币之间都存在力的作用，所以月球的运动对抛硬币是有影响的；由于硬币运动中会受到空气阻力作用，因此风向、风速都会对抛硬币有影响；当然硬币抛掷的力度、方向更会对结果产生很大的影响等.将所有影响因素都纳入考虑范围，原则上是无法做到的.所以，研究这些现象时，人们只能在可以控制的范围内，找到影响现象状态的最基本的因素，也就是我们通常所说的“条件”.剩下的大量的、时隐时现的、瞬息存在的、变化多端的、不可控制的因素，正是不确定性的源泉.从这个角度讲，不确定性是普遍存在的.

在不确定性现象中，我们称试验或观察的可能结果明确，只是具体哪个结果会发生却是不确定的现象为**随机现象**.当对随机现象只作个别观测时，可能看不出什么规律性，但是，当在同样条件下对随机现象进行大量重复观测时，就能发现某种明显的规律性.比如，投掷一枚均匀硬币，虽然投掷一次，看不出什么规律，但是当在相同的条件下投掷200次时，几乎可以肯定正面向上的次数大致在100次左右，大约占总投掷次数的二分之一，并且随着总投掷次数的增加，这种规律越来越明显.这种在相同条件下大量重复观测随机现象所得到的规律性，称为随机现象的**统计规律性**.

概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律性的一门数学学科.概率论的特点是根据实际问题先提出数学模型，然后通过推理、演绎去研究其性质、特征和规律性；数理统计则以概率论为基础，利用对随机现象观测所得数据来研究其背后的数学模型.概率论与数理统计已经渗透到自然科学和社会科学的各个分支，并在农业、工业、交通、经济、管理、军事等领域都得到广泛的应用.

本篇主要介绍概率论的基本概念、基本理论和随机事件概率计算的基本方法.

第 1 章 随机事件及其概率

学习目标:通过本章学习,学员应理解随机试验、随机事件、样本空间的概念,掌握事件之间的关系和基本运算;了解概率的公理化的定义,掌握概率的基本性质,会运用其进行概率的计算;掌握概率的乘法公式、全概率公式,会用它们进行概率计算.

随机事件和随机事件的概率是概率论中两个基本概念.本章围绕随机事件及其概率,主要研究随机事件的关系和运算、概率的性质和计算、条件概率和独立性等基本问题.

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验和样本空间

概率论通过随机试验来研究随机现象的统计规律性.这里所说的"试验",是指在一定条件下对自然与社会现象进行的观察、测量或实验.随机试验满足以下三个条件:

(1) 试验可以在相同的条件下多次重复;

(2) 试验的所有可能结果都是明确的,且不唯一;

(3) 试验前无法预测哪种结果会发生.

例 1.1.1 随机试验的例子.

(1) 抛掷一枚硬币,观察面值面、国徽面出现的情况;

(2) 掷一颗骰子,观察出现的点数;

(3) 记录新浪网首页一小时内访问的次数;

(4) 测试某种型号电子元件的使用寿命;

(5) 测量某物理量(如长度、密度、质量等)的误差.

随机试验的所有可能的结果组成的集合称为该随机试验的**样本空间**,记为 Ω;样

本空间的元素,即随机试验的每个可能的结果,称为**样本点**,记为 e. 研究随机现象首先必须明确随机试验的样本空间.

例 1.1.2 下面是例 1.1.1 中随机试验的样本空间.

(1) $\Omega_1=\{H,T\}$,其中 H 表示面值面朝上,T 表示国徽面朝上;

(2) $\Omega_2=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$,其中 $\omega_i(i=1,2,\cdots,6)$表示出现 i 点,也可更直接明了地记此样本空间为 $\Omega_2=\{1,2,\cdots,6\}$;

(3) $\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$;

(4) $\Omega_4=\{t\mid t\geqslant 0\}$;

(5) $\Omega_5=\{x\mid -\infty<x<+\infty\}$.

在上面的样本空间中,Ω_1 和 Ω_2 中的样本点是有限个,称其为有限样本空间;Ω_3、Ω_4 和 Ω_5 中的样本点是无限个,称其为无限样本空间. 与 Ω_4、Ω_5 相比,Ω_3 又有所不同,它含有可列个样本点. 我们将样本点的个数为有限个或可列个的情况归为一类,称为**离散样本空间**. 而将样本点的个数为不可列无限个的情况归为另一类,称为**连续样本空间**.

1.1.2 随机事件及其运算

由随机试验的样本点组成的集合称为**随机事件**,简称**事件**,常用大写字母 $A,B,C\cdots$表示. 如在投掷一颗骰子的随机试验中,"出现偶数点"就是一个随机事件 $A=\{2,4,6\}$,它显然是样本空间 $\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$的一个子集.

特别地,由一个样本点组成的单点集,称为**基本事件**;样本空间 Ω 本身所定义的事件,称**必然事件**,因为在每次试验中它总发生;空集$\varnothing$所定义的事件,称为**不可能事件**,因为它不包含任何样本点,在每次试验中是必然不会发生的.

随机事件在一次试验中发生当且仅当该事件中所包含的的样本点在试验中出现.

下面举几个事件的例子.

例 1.1.3 在投掷一颗骰子的随机试验中,"出现 1 点"是该试验的一个基本事件,"不超过 6 点"是必然事件,而"超过 6 点"是一个不可能事件.

因为事件是集合,所以可以用集合的关系和运算来定义事件的关系和运算.

设随机试验的样本空间为 $\Omega,A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$是 Ω 的子集.

1. 包含关系

若属于 A 的样本点必定属于 B,则称事件 A **包含于** B,记为 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 用事件发生观点来描述就是:事件 A 发生必然导致事件 B 发生.

比如掷一颗骰子,事件 $A=\{$出现 2 点$\}$的发生必然导致事件 $B=\{$出现偶数点$\}$发生,因此 $A\subset B$.

2. 相等关系

若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则 $A=B$，称事件 A 与事件 B **相等**，也就是事件 A 发生当且仅当事件 B 发生.

3. 互斥关系

若事件 A 与事件 B 没有相同的样本点，即 $A\cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 为**互不相容**的或**互斥**的，这意味着这两个事件在一次试验中不能同时发生.

4. 和事件

事件 $A\cup B=\{e\mid e\in A$ 或 $e\in B\}$ 称为事件 A 和事件 B 的**和事件**，它是由事件 A 和事件 B 中所有的样本点(相同的只计入一次)组成的新事件. 用事件发生观点来描述就是：事件 $A\cup B$ 发生当且仅当事件 A 和事件 B 中至少有一个发生.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和事件，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 的和事件.

5. 积事件

事件 $A\cap B=\{e\mid e\in A$ 且 $e\in B\}$ 称为事件 A 和事件 B 的**积事件**，记 $A\cdot B$ 或 AB，它是由事件 A 和事件 B 的公共样本点组成的新事件. 用事件发生观点来描述就是：事件 $A\cap B$ 发生当且仅当事件 A 和事件 B 同时发生.

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$ 为 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积事件，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 的积事件.

6. 差事件

事件 $A-B=\{e\mid e\in A,e\notin B\}$ 称为事件 A 和事件 B 的**差事件**，它是由在事件 A 中但不在事件 B 中的样本点组成的新事件. 用事件发生观点来描述就是：事件 $A-B$ 发生当且仅当事件 A 发生而事件 B 不发生.

7. 逆事件(对立事件)

事件 $\overline{A}=\{e\mid e\in\Omega,e\notin A\}$ 称为事件 A 的**逆事件(对立事件)**，它是由在 Ω 中但不在 A 中的样本点组成的新事件. 用事件发生观点来描述就是：事件 $\overline{A}$ 发生当且仅当事件 A 不发生.

由逆事件的定义容易得出：$A\cup\overline{A}=\Omega$，$A\cap\overline{A}=\varnothing$，并且逆事件是相互的，即 A 的逆事件为 $\overline{A}$，而 $\overline{A}$ 的逆事件又是 A，即 $\overline{\overline{A}}=A$.

关于事件间的关系及运算与集合间的关系及运算的类比，见表1.1.

事件的运算遵从下面的基本定律. 设 A,B,C 均为事件，则：

交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

分配律　$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$,

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

德 · 摩根律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

表 1.1　事件与集合关系对照表

符　号	概　率　论	集　合　论
Ω	样本空间或必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
e	基本事件(样本点)	元素
A	事件 A	集合 A
$\overline{A}$	A 的对立事件	A 的余集
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与 B 至少有一个发生	A 与 B 的并集
$A\cap B$	事件 A 与 B 同时发生	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生,而 B 不发生	A 与 B 的差集
$AB=\varnothing$	事件 A 和事件 B 互不相容	A 与 B 不相交

例 1.1.4　将下列事件用 A,B,C 表示出来:

(1) 只有 B 发生;

(2) 三个事件 A,B,C 中至少有一个发生;

(3) 三个事件 A,B,C 中至少有两个发生;

(4) 三个事件 A,B,C 中至多有一个事件发生;

(5) 三个事件 A,B,C 中至多有两个事件发生;

(6) 三个事件 A,B,C 中恰有一个发生;

(7) 三个事件 A,B,C 中恰有两个发生.

解　(1) $\overline{A}B\overline{C}$;

(2) $A\cup B\cup C=A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC=\Omega-\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(3) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC\cup ABC$;

(4) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$;

(5) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}\cup A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C\cup AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC=\Omega-ABC$;

(6) $A\overline{B}\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\overline{B}C$;

(7) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup\overline{A}BC$.

例 1.1.5　从一批零件中任取两个,A 表示事件“第一个零件为合格品”,B 表示事件“第二个零件为合格品”,问 AB、$\overline{A}$、$\overline{AB}$、$\overline{A}\,\overline{B}$、$\overline{A\cup B}$分别表示什么事件.

解　(1) AB 表示事件“第一个、第二个零件都为合格品”;

(2) $\overline{A}$ 表示事件“第一个零件不是合格品”;

(3) $\overline{AB}$表示事件“在第一个、第二个零件中至少有一个不是合格品”;

(4) $\overline{A}\,\overline{B}$ 表示事件“第一个、第二个都不是合格品”;

(5) 因 $A\cup B$ 表示事件“第一个、第二个零件中至少有一个合格品”,所以$\overline{A\cup B}$表示事件“两个零件都不是合格品”.

1.2　概率的定义和性质

什么是概率? 简单而直观的说法是:描述随机事件发生可能性大小的数学概念. 为了理解这个概念,我们从下面两个层次展开说明.

首先,随机事件发生的可能性是有大小之分的. 比如,从袋中随机地摸出一个球,如果袋中共有 9 个白球、1 个红球,那么直觉告诉我们:摸出白球的可能性大于摸出红球的可能性.

其次,好比长度、面积、体积一样,可能性也是可以被度量的. 比如,抛掷一枚均匀硬币,出现正面和出现反面的可能性是相等的,都是二分之一;投掷一颗均匀的骰子,每个点数出现的可能性也是相等的,都是六分之一. 就像长度、面积、体积是物体的固有属性一样,概率也是随机事件的固有属性.

关于概率的严格定义,在概率论的发展历史上,曾出现过不同的形式:概率的频率定义、概率的古典定义、概率的几何定义和概率的主观定义. 这些定义不但给出了对概率概念的界定,而且同时给出了确定概率的方法. 但是,这些定义都只是适合某一类随机现象,并不适用于一切随机现象. 1933 年,前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov,1903—1987)提出了概率的公理化定义,这个定义既概括了历史上几种概率定义的共同特性,又避免了各自的局限性和含混之处,适用于一切随机现象. 概率的公理化定义一经提出就迅速获得举世公认,成为概率论发展的里程碑.

下面给出概率的公理化定义.

定义 1.2.1　设随机试验的样本空间为 Ω. 对该试验的每一事件 A 赋予一个实数,记为 $P(A)$. 如果集函数 $P(\cdot)$满足下列条件:

(1) **非负性**　对任一个事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

(2) **规范性**　对必然事件 Ω,有 $P(\Omega)=1$;

(3) **可列可加性**　设 $A_1,A_2,\cdots$互斥,有

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k), \tag{1.1}$$

则称 $P(A)$为事件 A 的**概率**.

由概率的公理化定义,可以推得概率的一些重要的性质.

性质 1 $P(\varnothing)=0$.

证 令 $A_n=\varnothing(n=1,2,\cdots)$,则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing,\quad 且\quad A_iA_j=\varnothing\quad(i\neq j;i,j=1,2,\cdots).$$

由概率的可列可加性可知

$$P(\varnothing)=P(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{\infty}P(\varnothing),$$

而 $P(\varnothing)\geqslant 0$,从而 $P(\varnothing)=0$.

性质 2(有限可加性) 若有两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

证 令 $A_{n+1}=A_{n+2}=\cdots=\varnothing$,则 $A_iA_j=\varnothing\quad(i\neq j;i,j=1,2,\cdots)$.
由式(1.1)(概率的可列可加性)知

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=P(\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+0\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).\end{aligned}$$

性质 3(单调性) 设有两个事件 A,B,若 $A\subset B$,则 $P(A)\leqslant P(B)$.

证 由概率的性质 2 可得 $P(B)=P(A)+P(B-A)$. 又由概率的非负性知

$$P(B-A)\geqslant 0,\quad 则\quad P(B)\geqslant P(A).$$

由性质 3 容易推导出概率的下面两个性质. 证明留给读者.

性质 4 设有两个事件 A,B,若 $A\subset B$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$.

性质 5 对任一事件 A,有 $P(A)\leqslant 1$.

性质 6(逆事件的概率) 对任一事件 A,有 $P(\bar{A})=1-P(A)$.

证 因 $A\cup\bar{A}=\Omega,A\cap\bar{A}=\varnothing$,由概率的有限可加性得

$$P(\Omega)=1=P(A)+P(\bar{A}),$$

故

$$P(\bar{A})=1-P(A).$$

性质 7(加法公式) 对任意事件 A,B,有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

证 因 $A\cup B=A\cup(B-AB),\quad A\cap(B-AB)=\varnothing,\quad AB\subset B$,
由概率的有限可加性及性质 4 有

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B-AB)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

类似地,对任意三个事件 A,B,C,有

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$