数学的再发现

高中数学中的类比与归纳

严运华 著

- 追求数学问题更简捷解法
- 寻觅解决问题更一般方法
- 探究数学问题更强化结论
- 构建数学再发现教学模式

NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS
WWW.NENUP.COM
东北师范大学出版社

Shuxue De Zai Faxian

数学的再发现

高中数学中的类比与归纳

严运华 著

NORTHEAST NORMAL UNIVERSITY PRESS
WWW.NENUP.COM
东北师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

数学的再发现：高中数学中的类比与归纳 / 严运华著. — 长春：东北师范大学出版社，2014.7
ISBN 978-7-5602-9332-5

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①严… Ⅲ. ①中学数学课—教学研究—高中 Ⅳ. ①G633.602

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 161925 号

□**责任编辑** 张志文　□**封面设计** 陈庭贤
□**责任校对** 任桂菊　□**责任印制** 刘海远

东北师范大学出版社出版发行
长春净月经济开发区金宝街 118 号（邮政编码：130017）
电话：0431—84568127
传真：0431—85691969
网址：http://www.nenup.com
电子函件：sdcbs@mail.jl.cn
北京凤凰树文化艺术发展有限公司制版
三河市宏顺兴印刷有限公司印装
2014 年 9 月第 1 版 2014 年 9 月第 1 次印刷
幅面尺寸：170mm × 240mm 印张：12 字数：183 千

定价：40.00 元

序

美国认知主义心理学家布鲁纳在《教育过程》一书中提出了著名的发现法教学，发现法教学要求学生在教师的指导下，能像科学家发现真理那样，通过自己的探索和学习，“发现”事物变化的因果关系及其内在联系，形成概念，获得原理。发现法教学对培养“拔尖创新人才”具有重要意义。严运华老师的这部新著系统地总结了数学的再发现的理论、方法和途径，并用之于数学教学，是发现法教学在数学教育实践中的应用。目前，正直举国上下热议“钱学森之问”，积极探索培养“拔尖创新人才”之际，严运华老师的新著《数学的再发现》出版可谓恰逢其时。

由于数学的学科特点，数学学习与数学教学都要经历探索与发现过程，也就是要经历数学的再发现过程。

学生的数学学习活动不应只限于对概念、结论和技能的记忆、模仿和接受，良好的数学学习应是探索和发现的过程，独立思考、自主探索、动手实践、合作交流等都是数学学习的重要方式，经历数学知识形成与发生的过程，感受数学公式、定理的发现过程是把握数学本质的不可或缺的关键一环；探索和发现学习的实质是人对客体的认识，是在主客体的相互作用中，同化作用与顺应作用之间平衡的结果。真正有意义的学习不是被动接受现成的书本知识和观念，而是在经验的过程中主动探索、发现经验中事物之间联系的过程。学习开始于一个对学生来讲存在疑问和问题的经验情境，学生在这种情境中运用自己已有的知识和经验对问题进行探索，提出解决问题的假设，然后在经验中验证假设。

布鲁纳将探索、发现和书本知识的学习融合在一起。他认为，学生要使呈现在他面前的知识成为他自己的知识，他必须亲自从事发现的行动，亲自从事问题解决模式的构成，即主动地选择信息和改造信息，提出假设，并根据前后矛盾的或不一致的证据修正他的假设。学生学习书本知识的过程，不是对书本知识的直接接受、占有和重复，而是学生对要学习的知识进行能动地选择、批判、加工和改造的过程，这就是学生探索发现学习过程的实质。

从数学教学的角度看，数学教学的目的是帮助学生有效地进行数学学习，因此，数学教学要引导学生经历数学知识形成的探索与发现过程，也就是要经历数学的再发现过程。新一轮课程改革特别重视培养学生的创新意识与实践能力，《高中数学课程标准》明确指出：“倡导积极主动、勇于探索的学习方式，注重提高学生的思维能力，体现知识的发生发展过程，促进学生的自主探索。”由于数学教学

中存在三种思维活动：数学家的思维活动，数学教师本身的思维活动以及学生的思维活动。数学教学的核心是这三种思维活动的有机结合。为此，教师要充分暴露数学的思维过程。既暴露数学家的思维过程，又暴露学生的思维过程，还要暴露自己的思维过程。在教学活动中如备课、上课、答疑、批改作业、考试、辅导等等都应该在分析上述三种思维过程的基础上进行。这些环节都是实现学生思维与数学家思维结构同步化的重要方面，应予以重视。因此，在教学中教师要根据数学知识本身发生、发展的过程及规律，引导和帮助学生进行知识的学习过程，而不是把现成的知识灌输给学生。要引导学生通过自身的探究与内化，把握数学本质，领悟数学思想。著名数学教育家弗赖登塔认为数学教学方法的核心是学生的“再创造”。因此，数学课应是学生的“再创造”的过程，是充满探索与交流、猜测与验证的活动过程，使学生获得“感知——发现——再创造”的体验，亲历知识发现的过程，是了解和掌握认知活动的规律、特点的过程。美国心理学家布鲁纳的发现法教学就是要求学生在教师的指导下，围绕问题展开，也是突出探索与发现过程。它的基本程序是：提出问题——创设问题情境——猜想假设——寻求正确解答——对讨论的问题作出总结、得出结论。在发现法教学的实施过程中，学生的主体作用应得到充分的体现。当然，学生的活动如果没有教师的正确引导，其发现的效果会不尽如人意，甚至会发生“离题”，所以作为“导演”的教师必须掌握恰当的引导方法。

总之，数学的再创造与再发现应贯穿于整个数学教学中，渗透到每一个环节。教学中应千方百计激发学生数学思维的积极性。即当学生数学思维的火花刚点燃时，要鼓励不要抹杀；当学生数学思维发生障碍时，要启发而不妥协；当学生数学思维偏离正确轨道时，要引导而不要责难；当学生数学思维过于活跃时，要疏导而不要压制。

我与严运华老师相识二十多年，那时我主持湖北大学《中学数学》数学竞赛栏目，1992 年第 8 期上登载了严运华老师的论文《一道 IMO 试题的拓广》，从那以后，因数学竞赛我们有了更多的联系与交流。严运华老师具有深厚的数学功底，他本人曾参加湖北省大学生数学竞赛获得第一名的好成绩（当时我是命题组成员），撰写了不少有关数学竞赛试题研究（解法、变式及推广等方面）的论文，并发表在有关数学教育杂志上（本书第四章收录了他有关数学竞赛试题研究的论文）。二十多年来，严运华老师一直致力于中学数学及其教学研究，撰写并发表了很多中学数学研究和数学教育研究的论文。中学数学研究论文主要涉及对数学问题简捷解的探索、解决数学问题的一般方法研究及数学问题的推广和新的数学结论等方面。在本书第四章中所列举的论文论述了发现这些新解法、新结论，新方法的感悟，这些珍贵的经验无论对大、中学学生还是数学研究人员都具有很好的

参考价值。数学教育论文则主要涉及教材研究、教学策略与教学模式研究、高考试题研究等方面。严运华老师特别重视学生经历数学的“再创造”过程，在长期的教学实践活动中构建了数学再发现的教学模式，旨在引导学生经历再创造和再发现过程，领悟数学本质，提高思维能力。本书第五章围绕数学的“再发现”，从情景创设、问题设计、思想渗透、模式构建、学生参与等方面进行论述，对中学数学教师和即将从事数学教育的大学生、研究生都具有很好的指导性，值得一读。

我相信，本书将会使数学教师对数学学习与教学有更进一步的理解，对促使教师走上数学教育研究之路有很大帮助，对教师走出数学教学科研困境、步入研究型教师会有较多的启示。衷心期望严运华老师的研究成果得到更加广泛的推广与应用，让更多的学生和教师体验数学发现的快乐、感受数学的魅力、领悟数学的本质。

朱华伟

2014年6月

（朱华伟，研究员，博士生导师，广州市教育局教学研究室主任、书记，广州大学教育软件所所长，第50届国际数学奥林匹克中国国家队领队、主教练，兼任中国教育数学学会常务副理事长兼秘书长，国家集训队教练。）

目　录

第一章　数学发现概述 …… 1
1.1　数学猜想及其特征 …… 1
1.2　数学猜想的科学价值 …… 2
1.3　数学猜想的提出方法 …… 2
1.4　数学猜想的判定方法 …… 5
第二章　几个著名的数学猜想 …… 6
2.1　被否定的数学猜想 …… 6
2.2　被证明了的数学猜想 …… 7
2.3　未被证明或否定的数学猜想 …… 12
第三章　数学再发现的方法 …… 14
3.1　类比 …… 14
3.1.1　横向类比 …… 15
3.1.2　纵向类比 …… 19
3.1.3　高中数学主干内容中的类比 …… 22
3.2　归纳 …… 54
第四章　中学数学再发现的类型与策略 …… 59
4.1　追求问题更简捷的解法 …… 59
4.1.1　乔治·波利亚的“怎样解题”表 …… 59
4.1.2　罗增儒教授的数学解题策略 …… 60
4.1.3　我的解题观 …… 62
4.1.4　简捷解的发现 …… 64
4.2　寻觅更一般的方法 …… 72
4.3　探究更一般的结论 …… 92
第五章　数学再发现的教学理念与实践 …… 118
5.1　数学再发现与数学学习 …… 118

5.2 高中生数学再发现之“归纳推理”能力的调查……119
5.3 数学再发现教学模式的构建与应用……125
附录 1 10 个初等数学问题……172
附录 2 12 道不等式猜想……173
附录 3 数学奖项知多少？……175

参考文献……177

后记……179

第一章　数学发现概述

数学发现包括发现新解法、新结论、新思想、新领域等方面．数学猜想则是数学发现中的一种重要方法．众所周知，数学是通过演绎而展开的．也就是说，数学结论的正确性建立在演绎证明的基础上，结论是严密的，同时也是美丽的．但是，这些结论又是怎样发现的呢？由于任何数学断言在得到证实之前都不能称之为结论，而只能称之为猜测（猜想或推测）．因此，更为准确地说，数学猜想是怎样获得与发现的呢？

1.1　数学猜想及其特征

数学猜想是指依据某些已知的事实和数学知识，对未知的量及其关系所作出的一种似真的推断．它既有一定的科学性，又有某种假定性，其真伪性的确定一般来说难以一时解决．数学猜想是数学研究常用的一种科学方法，又是数学发现的一种重要形式，它常常是数学理论的萌芽和胚胎，有时代表着数学研究的方向．数学猜想丰富了数学理论，也是解决数学理论自身矛盾和疑难问题的一个重要途径，因而，研究数学猜想的来源、类型、解决的主要方法以及它对数学发展的影响有着重要的意义．

数学猜想具有科学性、假定性和创新性等三个基本特征．

1. 科学性　数学猜想并不是通常意义下的猜测，更不是盲目推测和主观臆断，而是以数学经验、数学事实为基础，以数学知识为依据，对数学对象的未知性质、数量和相互关系作出的推测和判断．形成数学猜想是综合运用各种形象思维与逻辑思维方法的结果，表现出深刻的想象力和洞察力．因此，数学猜想也称为科学的联想和想象，具有较强的科学性．

2. 假定性（或然性）　数学猜想虽然具有科学性，但毕竟是一种似真判断，具有推测的性质．它是否把握了真理，是否符合数学科学的实际，必须接受实践的检验，尚有待于证明和验证，这就是数学猜想的假定性．猜想可能正确，也可能是错误的，结果的正确与否具有或然性．如著名的哥德巴赫猜想，经过几代人的努力，虽有了很大的进展与突破，也派生出许多数学分支，但哥德巴赫猜想的正确性尚未得到论证．又如著名的 Fermat（费尔马）大约在 1637 年前后提出了许多关于数论的猜想，后来，大多数结论被证明是正确的，个别的则

被否定. 如 Fermat 猜想：当 $n\geqslant 3$ 时，不定方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有 $xyz\neq 0$ 的整数解. 这个大猜想在相当长的一段时间里既没有被证明，也没有被否定. 英国数学家 A.Wiles 历时十年，利用高深的现代数学理论于 1994 年 9 月证明了 Fermat 大定理. 又如 Fermat 提出的形如 $2^{2^n}+1$ 数都是素数的猜想，在经历了近百年后由数学家 Euler（欧拉）在 1732 年予以否定，他构造出 $2^{2^5}+1$ 是合数，能被 641 整除，即 $2^{2^5}+1=641\times 6700417$，从而猜想被否定.

3. 创新性 创新是数学猜想的灵魂，没有创新可以说就没有数学猜想. 数学猜想的创新性主要表现在提出新的见解、预见新的事实和揭示新的规律等方面.

1.2 数学猜想的科学价值

数学猜想的科学价值表现在以下几个方面：

1. 创立数学理论 数学猜想是数学理论的“胚胎”，一旦经过论证被证实，就将转化为定理，汇入数学理论中. 从数学发展史上来看，很多定理都是由最初的猜想转化而来的. 如陈氏定理就是由我国数学家陈景润所论证的哥德巴赫猜想转化而来的.

2. 获取数学方法 古今中外，在进行和论证数学猜想的过程中，创造出很多数学方法. 如论证费尔马大定理时，费尔马创造了无穷递降法，库默尔德创造了想数理论. 在探讨哥德巴赫猜想的过程中，史尼尔创造了密率法，陈景润改造了古老的筛法. 又如论证四色猜想时，又创造了机器证法. 目前，这些方法已渗透到数学的各个分支.

3. 组织数学结构 在真实世界里没有直接对应物的一些数学领域中，经过数学家的巧妙构思，能够组织出很多全新的数学结构，像高维几何、非欧几何的诞生，高维空间、几何复元素、稀奇古怪函数以及超越数的引进等.

4. 促进数学发展 数学猜想提出后，其本身在相当长的一段时间内，都是促进数学发展的中心课题，有时甚至代表着数学研究的方向. 如希尔伯特提出 23 个世界著名难题包括猜想，在将近一个世纪的时间内，很多人为解答这些问题投入了大量的精力，一个个新猜想、新方法、新定理相继出现，不仅丰富了数学理论，而且推动了数学的发展.

1.3 数学猜想的提出方法

数学猜想中既包含了直觉的成分，又包含了逻辑的成分. 数学发现既是一种

无意识、非逻辑的思维活动，又是一种自觉的、逻辑的思维活动．我们则主要是根据数学发现中包含逻辑的成分，从数学发现的实例中探讨某些规律，并给出数学发现的某些模式．如哥德巴赫猜想、多面体中的欧拉定理等都是根据归纳法发现的．德国数学家高斯曾说过他的许多定理都是靠归纳法发现的．德国数学家舒尔也曾指出："在数学研究中，非数学的归纳法起着重要作用．"法国数学家、天文学家拉普拉斯指出："即使在数学中，发现真理的主要工具也是归纳法与类比法．"他还指出："我珍视类比胜于任何别的东西，它是我最可依赖的老师，它能揭示自然界的秘密，在几何学中应该是最不容忽视的．"可见，数学发现中最重要的方法就是类比和归纳．

1. 类比法　是指以两个对象具有相同或相似的属性、其中一个对象还有另外的某些属性作为前提，推出另一个对象也有这些相同或类似属性的思维形式．著名数学家和数学教育家波利亚曾说过："类比是某种类型的相似性，是一种更确定和更概念性的相似．"类比推理的形式是：A 对象具有属性 a、b、c、d，B 对象具有属性 a、b、c，所以 B 对象也具有属性 d．例如立体几何中面与面的关系同平面几何中线与线的关系相类比等．类比推理是根据个人的经验和直觉等推测某些结果的推理过程，是一种非逻辑推理．类比推理在中学数学里处处可见，其分类也不唯一，常见的分类如下：

$$
\text{类比}\left\{\begin{array}{l}
\text{横向类比}\left\{\begin{array}{l}\text{降维}\\ \text{降次}\\ \text{减元}\\ \text{结构}\end{array}\right.\\[2ex]
\text{纵向类比}\left\{\begin{array}{l}\text{形式}\\ \text{方法}\\ \text{对偶}\\ \text{对称}\\ \text{因果}\end{array}\right.
\end{array}\right.
$$

利用类比的方法，可以得到一些有意义的结果，也可以通过类比得到解题思路．在数学研究中，常用的类比有数与形的类比、平面与空间的类比、有限与无限的类比等．可以通过对数的研究来探讨有关图形的性质，也可以通过对图形的研究来推出数的某些性质．熟悉了平面图形、掌握了它的性质之后，在遇到空间问题时，往往可以通过与平面图形的比较发现类似之处——或结论的形式类似，或解决问题的方法类似，进而找到解决问题的方法和途径．

2. 归纳法 归纳就是从个别事实中概括出一般原理的逻辑方法，分完全归纳法和不完全归纳法. 其中不完全归纳法是提出数学猜想的一种常见方法. 欧拉定理就是典型的一例，从下表中很容易归纳出多面体的面、顶点、棱间的关系，即欧拉定理 $V+F-E=2$.

多面体	面（F）	顶点（V）	棱（E）
正方体	6	8	12
三棱柱	5	6	9
三棱锥	4	4	6
四棱柱	5	5	8
五棱柱	7	10	15

利用归纳与类比的方法进行猜想和发现的基本思路为：

$$\boxed{\text{数学问题}} \xrightarrow{\text{归纳、类比、想象等}} \boxed{\text{数学猜想}} \xrightarrow{\text{分析、综合、演绎等}} \boxed{\text{数学创造}}$$

此外，数学猜想的方法还有：

3. 观察法 如莫比乌斯观察蚂蚁爬行时，提出了单侧曲面存在的猜想，后来他发明了莫比乌斯带. 有人根据莫比乌斯观察地图时提出的问题，提出了地图四色猜想.

4. 试验法 即通过反复试验或计算发现规律的一种方法. 如费尔马用试验法在寻求不定方程 $x^3+y^3=z^3$ 的正整数解时提出了费尔马大定理：当 $n\geqslant 3$ 时，不定方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解. 欧拉用试验法在逐个计算过各个凸多面体的欧拉示性数之后，提出了“并不是所有多面体都具有相同的欧拉示性数”的猜想.

5. 变换条件法 所谓变换条件法，就是通过改变某一数学定理的前提来提出数学猜想. 古希腊数学家欧几里得提出并证明了“素数有无穷多”这一著名的数学定理，后来，人们通过变换这一定理条件的方法提出了“孪生素数猜想”，即若 P 是素数，$P+2$ 亦是素数，则称（P，$P+2$）是孪生素数. 如（3，5），（5，7），（11，13），（17，19），（101，103）等都是孪生素数. 孪生素数显然是素数的一部分，人们根据“素数有无穷多”这一定理的条件，提出猜想“孪生素数有无穷多”. 至今为止，人们发现的最大孪生素数是（$10^{12}+9649$，$10^{12}+9651$），但猜想的正确性尚未得以确证.

总之，猜想的实现途径可能是探索试验、类比、归纳、构造、联想、审美以及它们之间的组合等. 数学猜想是有一定规律的，如类比的规律、归纳的规律等，并且要以数学知识和经验为支柱. 实施猜想前，请记住：在证明一个数学问题之前，你先得猜想这个问题的内容；在你完全作出详细证明之前，你先得猜想证明的思路.

1.4　数学猜想的判定方法

如前所述，数学猜想既然是科学性与假定性的统一，那么提出一个数学猜想后如何判断其真伪呢？常用的方法有：

1. 反例否定法　这种方法是否定错误数学命题的常用而有效的方法. 对于某数学猜想，如果能够举出一个反例，那么该猜想就被否定了. 如费尔马（Fermat）提出的形如 $2^{2^n}+1$ 的数都是素数的猜想，在经历了近百年后由数学家 Euler 在 1732 年予以否定，他构造出 $2^{2^5}+1$ 是合数，能被 641 整除，即 $2^{2^5}+1=641\times6700417$，这样就立即否定了费尔马的猜想，而且很有说服力.

2. 机器证明法　对于一些数学猜想，可利用电子计算机给予证明. 如著名的"四色猜想"，说的是在平面或球面上画地图，只要有四种颜色就能保证相邻区域不用同一色. 问题提出后，许多数学家不知花费了多少力气试图去解决，但结果均遭失败. 直到 1976 年，由美国数学家阿佩尔和哈肯利用高速电子计算机运行了 1200 小时才证明出来，这一成果为数学猜想及整个数学理论的证明开辟了"机械化证明"的光辉前景.

3. 渐次逼近法　数学猜想有不少是世界著名难题，对这些难题人们常常是设法先证明它的一种减弱的命题，然后一步步向它逼近. 如著名的哥德巴赫猜想：任何一个大于 4 的偶数都可表示成两个奇素数之和，简称（1+1）. 1742 年以来，数学家们为证明该猜想提出并证明了许多减弱的命题，从（9+9）→（7+7）→（6+6）→（5+5）→（4+4）→（3+3）→（2+3）→（1+4）→（1+3）→（1+2）. 我国数学家陈景润在 1976 年证得（1+2）成立，离哥德巴赫猜想仅有一步之遥了！

4. 演绎证明法　对于一些难度不大的数学猜想，通常直接通过演绎推理的方法给予证明.

数学发现不仅仅是发现一些新的数学结论，同时，也发现一些数学问题的解题思路. 数学发现不仅需要具有较高的合情推理的能力，同时，要判断猜想的正确与否，还需要坚实的逻辑思维能力作为基础. 因此，数学发现能力是一个人的数学综合能力的体现.

第二章　几个著名的数学猜想

数学史上，长时期未能解决的猜想特别多，并且很多都是世界级的难题，其中属于数论方面的问题又占多数，这些猜想表面上看似简单，但证明起来却非常艰难．下面介绍几个著名的数学猜想．

2.1　被否定的数学猜想

1. 费尔马猜想

我们知道：

$$2^{2^0}+1=3,$$
$$2^{2^1}+1=5,$$
$$2^{2^2}+1=17,$$

它们都是素数．

一天，法国数学家费尔马似有所悟，他继续试验

$$2^{2^3}+1=257,$$
$$2^{2^4}+1=65537,$$

经检验，它们也都是素数．

于是，费尔马在 1640 年提出如下猜想：

形如 $2^{2^n}+1$（n 为自然数）的数都是素数．

该猜想是否成立？当时，人们很难判定．直到 100 年后，俄国数学家欧拉发现：

$$2^{2^5}+1=641\times6700417$$

一个反例就否定了一个猜想，于是，宣告了费尔马猜想是错误的．以后，人们又陆续找到了不少反例，如 $2^{2^6}+1=274177\times67280421310721$，也是合数．如今，人们依然将形如 $2^{2^n}+1$ 的数叫做费尔马数．对它的研究越来越多，人们发现，共研究出 46 个费尔马数，竟然一个素数都没有，于是，有人猜想：只有有限个费尔马数是素数．这个猜想是否正确还有待证明．

2. 关于 $6n\pm1$ 型数对的猜想

数学家迪布凡耳（De Bouvelles）在 1590 年曾注意到，在形如 $6n+1$ 与 $6n-1$ 的数对中，5 和 7，11 和 13，17 和 19，当 n 的取值为 1，2，3…时，它们中都至

少有一个数是素数．由此，他提出猜想：

对任何正整数 n，$6n-1$ 与 $6n+1$ 这两个数中至少有一个是素数．

时隔不久，有人举出反例：最小的一个使结论不成立的反例是 $n=20$．

而且，一般地，$n=20+77k$ 都能使 $6n-1$ 与 $6n+1$ 分别含有因数 7 和 11，这是因为：

$$6n-1=119+6\times 77k=7(17+66k)\text{；}$$
$$6n+1=121+6\times 77k=11(11+42k)\text{．}$$

3. 代数式 x^n-1 因式分解的猜想

数学家契巴塔廖夫曾由下面的因式分解结果：

$$x-1=x-1\text{；}$$
$$x^2-1=(x-1)(x+1)\text{；}$$
$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)\text{；}$$
$$x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)\text{；}$$
$$\cdots$$

提出猜想：将代数式 x^n-1 在实数范围内分解为不可再分解的具有整系数的因式以后，各系数的绝对值不超过 1．

要否定这个猜想是不容易的事，它需要极大的耐心与坚韧不拔的毅力．最小的一个与猜想不符合的 n 为 105．这是被数学家依万诺夫找到的，在 $x^{105}-1$ 分解出的一个因式中，x^{41} 和 x^7 的系数都是–2，显然，它的绝对值超过了 1．

2.2　被证明了的数学猜想

被证明了的猜想有很多，这里仅举几例．

1. 费尔马大定理

1621 年，费尔马买到了丢番图著的《算术》一书，对于书中的数论问题产生了浓厚的兴趣．当读到第二卷第八个命题“将一个平方数分成两个平方数的和”时，他想到了更一般的问题．研讨之后，费尔马在页边空白处写下了如下一段文字：

将一个立方数分成两个立方数的和，将一个四次方数分成两个四次方数的和，或者，一般地，将一个 n 次方数分成两个同次方数的和，这是不可能的．关于此，我确信已经找到了一个绝妙的证明，可惜这儿的空白太小，写不下来．

这段文字用现代数学语言表述就是：当整数 $n>2$ 时，方程 $x^n+y^n=z^n$ 没有正整数解．这就是费尔马大定理．

费尔马去世后，他的儿子整理了他的全部遗稿和书信，始终没有找到那个“绝妙的证明”．于是，这个猜想的正确与否就成了一桩数学疑案．

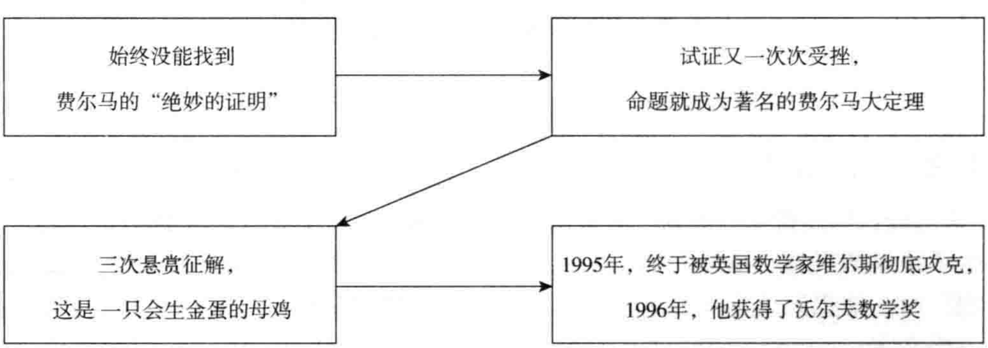
300 多年来，不少数学家和对数学有兴趣的人们对它进行了研究，却始终未能解决．法国科学院曾经两次悬赏，布鲁塞尔科学院也曾以重金悬赏．1908 年，德国数学家沃尔夫斯克尔留下遗言，悬赏 10 万马克巨款，奖给第一个证明费尔马大定理的人，这项奖金的限期为 100 年．

1995 年 5 月，当代最权威的数学杂志普林斯顿《数学年刊》一整期发表了震惊世界数学界的两篇论文，宣告困扰数学界长达 350 多年的费尔马大定理被英国数学家安德鲁 · 维尔斯（Andrew Wiles）所证明．舆论认为，这确实是近代数学发展史中的一个巨大里程碑．1996 年，安德鲁 · 维尔斯（Andrew Wiles）因此获得了沃尔夫数学奖．

在解决探索证明费尔马大定理的几百年中，给数学的发展创造了许多新的分支和新途径．费尔马大定理被人们誉为一只会生金蛋的母鸡．

数学家和其他科学家认为，并不是每一个猜想都有价值，猜想的价值问题，最终的判断取决于科学从该问题获得的收益及对人类进步所做的贡献．在人类解决费尔马大定理的漫长历程中，先后做出重大贡献的数学家法尔廷斯、谷山、费雷、维尔斯等人的伟大实践就证明了这一点，他们都运用了当代许多名家的思想、结果和技巧．特别是维尔斯的工作，无疑是一项意义深远的贡献，它将会给纯数学中的许多重要问题的解决带来曙光．

这段历史发展也可画成如下所示的简明框图：



2. 素数个数的猜想

一眼就可以看出，开头一些素数 2，3，5，7，11，13，17，19…组成的序列，不符合任何一种简单规律．

序列的构造是非常复杂的．还在欧几里得出生以前，人们已开始思考素数序

列最后是否有终结的问题，有数学家提出了“素数个数是无限的”这一猜想.

好的猜想犹如一个合适的引路人，人们在解决素数个数的猜想及其推广的过程中，发现与创造了一些巧妙的新方法，为当时数学的发展带来了大推动.

欧几里得在《几何原本》中为解决这个猜想设计了一个绝妙的证明. 它不是去求任一已知素数后面紧跟的那个素数（那将是万分困难的），而是用某一个大得多的素数去代替 p 后面的下一个素数：令 p 为任一素数，作出由 2 到 p 的全部素数的乘积再加 1，写成：

$$2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot\cdots\cdot p+1=N$$

显然，素数 2，3，5…p 中没有一个可以整除 N. 这样，N 或者本身是素数（大于 p 的），或者 N 的全部素因子都和 2，3，5…p 不同，并且大于 p. 不论是何种情形，一个大于 p 的素数已经找到. 因此，不管 p 有多么大，总有更大的素数存在.

接着，人们想到：除了素数 2，剩下的素数不是形如 $4n-1$ 的数，就是形如 $4n+1$ 的数；除了素数 3，剩下的素数不是形如 $3n-1$ 的数，就是形如 $3n+1$ 的数；……

于是，又纷纷有人提出猜想：

①形如 $4n-1$ 的素数个数是无限的；

②形如 $4n+1$ 的素数个数是无限的；

③形如 $3m+2$ 的素数个数是无限的；

④形如 $3m+1$ 的素数个数是无限的；

⑤形如 $6k+5$ 的素数个数是无限的；……

一般地，任何一个自然数的等差数列，只要其首项和公差是互素的，就必定包含了无限多个素数.

为解决这些猜想而创造的新方法，其中所包含的基本思想，有的会具有更一般的意义. 有时，数学家就是这样无意中闯进了一个新领域的大门.

3. 对 π 的无理性的猜测

由于圆的面积与 π 相关，大大地刺激了对 π 的无理性（π 是怎样的无理数呢）的研究. 勒让德猜测说 π 可能不是有理系数方程的根（就是说，π 与 $\sqrt[3]{5}$ 是不一样的无理数，$\sqrt[3]{5}$ 显然是有理系数方程 $x^3-5=0$ 的根）.

勒让德的猜测导致了无理数学的分类，使人类对数的认识又跨进了一大步. 任何有理数系代数（多项式）方程的任何一个根（不管是实的还是复的）叫做一个代数数.

方程 $a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$ 的根叫做代数数，其中 a_i 是有理数. 因此，所有的有理数和一部分无理数是代数数. 不是代数数的数叫做超越数，