



相控阵 天线理论和技术

■ 李知新 编著



国防工业出版社
National Defense Industry Press

内容简介

本书是作者在长期从事相控阵天线理论和技术研究的基础上，结合多年从事相控阵天线工程设计的经验，对相控阵天线的理论、设计、制造、测试、应用等方面进行了系统的总结和概括。全书共分10章，主要内容包括：相控阵天线的概述、基本原理、平面阵列天线、圆阵天线、波导相控阵天线、毫米波相控阵天线、相控阵天线的测试、相控阵天线的工程应用等。本书可作为从事相控阵天线理论和技术工作的工程技术人员、研究人员、设计人员和管理人员的参考书，也可作为高等院校电子信息工程、通信工程、电磁场与微波技术等专业的教材。

相控阵天线理论和技术

李知新 编著

（北京）国防工业出版社

北京：国防工业出版社，2008年12月第1版

ISBN 7-118-04847-2

定价：48.00元

ISBN 7-118-04847-2

48.00

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书着重介绍四种实用的馈相方法,即指向修正法、移位馈相法、随机馈相法以及移位加权馈相法,并分析各种方法的馈相效果及优缺点。文中还介绍几种通过控制相位实现主波束赋形及副瓣赋形的方法。为便于理解相控阵天线在雷达上的应用,还介绍了正弦空间坐标及其坐标变换、雷达坐标系及其对天线测量的影响,最后介绍几种相控阵天线的工程实例。

图书在版编目(CIP)数据

相控阵天线理论和技术/李知新编著. —北京:国防工业出版社,2015.1

ISBN 978-7-118-09748-1

I. ①相... II. ①李... III. ①相控阵天线 IV. ①TN821

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 279914 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100048)

北京京华虎彩印刷有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 11 字数 246 千字

2015 年 1 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—1500 册 定价 50.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

言 序

相控阵天线由许多辐射天线单元按一定的规律排列成阵列,每个天线辐射单元之间的相位分布关系由与它们相连接的移相器来调整,以实现天线波束在空间的指向变化和波束形状的变换。由于移相器的相移变化只需几微秒,因此相控阵天线的波束扫描可认为是无惯性的。相控阵天线能实现雷达多功能、多目标检测和跟踪,具有高数据率、高度的自适应能力、高可靠性以及较强的抗干扰能力。因此,相控阵天线已在现代雷达中被广泛应用。由此可见,了解和掌握相控阵天线理论和技术十分必要。

本人从事天线研究和设计工作 50 余年,其中 40 余年从事相控阵天线的工程设计工作。在天线理论指导下进行天线研发乐趣无穷,只有不断实践和创新才能研发出实用的新产品。我认为将相控阵天线理论和技术编写出来是很有意义的,会对后来者有所启迪和帮助,但想把所有技术都编写进来是不可能的。书中有很多作者的观点和实践,但是不一定完美,只能作为思路的启发。有不当之处,请多指教。

最后,我要对工作 30 多年的兵器工业 206 所给予的支持和帮助表示衷心感谢,对所里天线技术部在出版工作中给予的协助致谢,对在陕西事易达电子科技有限公司工作 10 余年间公司所提供的科研条件和支持表示衷心感谢。

李知新

前 言

相控阵天线是由天线辐射单元阵列、高频馈电网络、移相器及波束控制计算机等组成的。它首先是一个阵列天线,因此研究相控阵天线首先要了解阵列天线的理论和分析方法。相控阵天线与阵列天线的不同之处仅在于相控阵天线按一定的规律控制阵列的相位分布以实现波束的变化,研究相控阵天线主要应研究相控带来的新问题。因此,在论述阵列天线理论的基础上研究辐射单元对相控阵天线性能的影响。在相控阵天线中数字移相器的应用产生了相位量化,因此必须研究它对天线增益、副瓣电平及波束指向精度的影响。

本书着重介绍四种实用的馈相方法,即指向修正法、移位馈相法、随机馈相法以及移位加权馈相法,并分析各种方法的馈相效果及优缺点。单元之间的互耦是一个复杂而令人头痛的问题,由于篇幅所限,只能以偶极子阵列和矩形开口波导阵为例来讨论有源阻抗的分析方法、互耦的实验研究方法以及宽角匹配问题。书中也介绍避开这一问题的密度加权阵、环栅阵及相位加权阵列的特性和设计。在讨论波束扫描特性的基础上,同时讨论高频馈电网络和各种类型的数字移相器的性能和设计技术。相控阵天线虽具有高可靠性,但各种故障必会对天线性能产生影响,为此还专门介绍相控阵天线的可靠性分析方法。为实现相控阵天线的多功能和抗干扰性,相控阵天线波束的赋形变换势在必行。文中还介绍几种通过控制相位实现主波束赋形及副瓣赋形的方法。通过上述讨论,力求使读者对相控阵天线形成一个初步完整的印象。为便于理解相控阵天线在雷达上的应用,还介绍了正弦空间坐标及其坐标变换、雷达坐标系及其对天线测量的影响,最后介绍几种相控阵天线的工程实例。

李知新

目 录

第 1 章 天线问题的电磁场理论基础	1
1.1 麦克斯韦方程和边界条件	1
1.2 位函数	2
1.2.1 交变电磁场方程的直接解法	2
1.2.2 交变电磁场中的位函数 A 、 φ	3
1.2.3 交变电磁场中的位函数 A^* 、 φ^*	3
1.2.4 Hertz 位 Π	3
1.2.5 Π^*	4
1.3 格林公式	5
1.4 非均匀波动方程的解	5
1.5 无限均匀空间内的电磁场	8
1.6 电偶极子的辐射场	9
1.7 线振子的辐射场	10
1.8 边界值问题	12
第 2 章 天线阵的基本理论	14
2.1 天线辐射的方向特性	14
2.2 直线阵	15
2.2.1 直线阵的方向图	15
2.2.2 直线阵波束的扫描	16
2.2.3 直线阵的波束宽度	17
2.2.4 直线阵的方向性系数	17
2.3 平面阵	17
2.3.1 平面阵的方向图	17
2.3.2 平面阵的波束指向	18
2.3.3 平面阵的波束宽度	19
2.3.4 平面阵的方向性系数	19
2.3.5 平面阵波束宽度面积与方向性系数的乘积	19
第 3 章 辐射单元对阵列天线性能的影响	20
3.1 理想的辐射单元	20
3.2 辐射单元方向性引起的波束指向误差	20
3.3 辐射单元方向性对差波束斜率的影响	21

第 4 章	阵列天线的随机误差及其对波束指向的影响	23
4.1	阵列天线随机误差及其对波束指向的影响	23
4.2	线阵随机误差引起的波束电轴偏移	26
4.2.1	串联馈电	27
4.2.2	并联馈电	28
4.3	平面阵随机误差引起的指向误差	28
第 5 章	数字式移相器的应用及其带来的问题	29
5.1	应用数字式移相器的基本原理	29
5.1.1	数字式移相器	29
5.1.2	最小相移量与波束扫描步进角的关系	29
5.2	相位量化对天线增益的影响	30
5.2.1	相位量化方式	30
5.2.2	相位量化误差对增益的影响	30
5.3	相位量化引起的波束指向误差	31
5.3.1	相位量化误差	31
5.3.2	相位量化引起的指向误差	32
5.4	相位量化引起的量化副瓣	34
第 6 章	馈相方法	36
6.1	指向修正馈相法	36
6.2	移位馈相法	37
6.3	随机馈相法	38
6.3.1	波束均值无指向误差随机馈相	38
6.3.2	相位误差均值为零法	39
6.4	移位加权馈相法	40
6.4.1	相位误差与波束指向误差	40
6.4.2	移位加权馈相方程	41
6.4.3	波束控制计算机相位的字长	42
6.4.4	减少移相器位数,降低相阵成本	42
6.4.5	应用	42
6.5	馈相方程的通用形式	43
6.6	馈相效果	44
6.6.1	指向误差	44
6.6.2	量化副瓣电平	45
6.6.3	结论	45
第 7 章	互耦问题	47
7.1	两个薄片振子之间的互阻抗	47
7.2	偶极子阵的有源阻抗	48

7.2.1	有源阻抗的概念	48
7.2.2	有源阻抗的分析方法	48
7.3	互耦对单元方向图的影响	53
7.3.1	互耦的存在改变理想单元的概念	53
7.3.2	单元阵中的方向图	53
7.4	互耦的积累效应	54
7.5	互耦效应的实验研究方法	56
7.5.1	波导模拟器法	56
7.5.2	小阵法	59
7.5.3	周期性边界法	59
7.6	宽角匹配问题	61
7.6.1	馈线中实现宽角匹配	61
7.6.2	在自由空间区实现宽角匹配	61
7.7	互耦问题的数值分析方法	62
7.7.1	矩量法及线天线互耦问题	62
7.7.2	矩形开口波导阵的互耦问题	66
第8章	加权阵列	74
8.1	密度加权阵列与幅度加权阵的等效	74
8.2	环栅阵	75
8.2.1	环栅阵的几何关系	75
8.2.2	环栅阵的方向图阵因子	76
8.2.3	环栅阵的栅瓣特性	76
8.3	有幅度加权的密度加权阵的统计设计	77
8.4	相位加权阵列天线	80
第9章	相控阵的高频馈电网络	83
9.1	光学馈电系统	83
9.2	网络馈电系统	84
9.2.1	串联馈电系统	84
9.2.2	并联馈电系统	85
9.2.3	子阵馈电	86
第10章	数字式移相器	87
10.1	闭锁式铁氧体数字移相器	87
10.1.1	闭锁式波导铁氧体数字移相器	87
10.1.2	闭锁式微带铁氧体数字移相器	95
10.2	PIN 二极管移相器	98
10.2.1	PIN 二极管的基本特性及其等效电路	98
10.2.2	PIN 二极管的选用	99

10.2.3	PIN 二极管移相器	100
10.2.4	高通—低通型移相器	111
10.2.5	螺旋反射型移相器	112
10.2.6	常用 PIN 二极管移相器的主要性能比较	114
10.3	铁氧体数字移相器和 PIN 二极管移相器性能比较	115
第 11 章	相控阵天线的可靠性	117
11.1	故障的统计特性	117
11.1.1	$\{g_n\}$ 的概率密度	117
11.1.2	$\{X_n\}$ 的概率密度	117
11.2	辐射场的统计特性	119
11.3	数字移相器故障对阵性能的影响	121
11.4	单元馈电故障对阵性能的影响	122
11.5	相控阵天线的平均故障时间	122
第 12 章	相控阵天线的波束赋形变换	123
12.1	引言	123
12.2	Davies 阵	123
12.3	信噪比最佳方法	125
12.4	控相形成有指定零点的方向图	127
12.5	给定约束条件的优化方法	130
12.6	主波束赋形的相位子阵法	132
第 13 章	阵列正弦空间坐标及坐标系变换	135
13.1	阵列正弦空间坐标	135
13.2	阵列坐标系到大地坐标系的变换	136
13.2.1	阵列俯仰倾斜	137
13.2.2	偏离正北	137
13.2.3	阵列俯仰倾斜又偏离正北	137
13.3	天线中常见的坐标变换	139
13.4	欧拉角	140
13.5	雷达坐标系对相控阵天线测量的影响	141
第 14 章	工程实例	144
14.1	相频扫天线	144
14.1.1	设计要求	144
14.1.2	方案	144
14.2	一维相扫单脉冲波导窄边裂缝阵天线	145
14.3	强制馈电的两维相扫相控阵天线	147
14.4	固态实验相控阵天线	149
14.5	径向功率分配器馈电的平面相控阵天线	149

14.6	一种有限扫描相控阵天线	150
14.7	移动卫星通信天线技术	151
14.7.1	“动卫通”的跟踪方案	152
14.7.2	低轮廓的移动卫星通信设备	153
14.7.3	低轮廓“动卫通”扫描天线实例	155
附录 A	磁场与磁流的关系	159
附录 B	并矢格林函数	160
附录 C	含有双片横向磁化铁氧体的矩形波导的传播常数方程——特征方程	163
参考文献	165

第 1 章 天线问题的电磁场理论基础

天线问题是具有复杂边界条件的电磁场辐射问题。作为本书的理论基础,首先介绍电磁场的基本方程,然后介绍求解天线问题所需的电磁场的求解方法。

1.1 麦克斯韦方程和边界条件

麦克斯韦方程是电磁场理论的核心,表示电场与磁场之间,以及它们与电荷、电流之间互相联系的普遍规律。麦克斯韦方程的微分形式为

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t \quad (1-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (1-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-4)$$

式(1-1)表示单位面积周界上的磁动势等于单位面积上通过的传导电流与单位面积上电通量的变化率之和。

式(1-2)表示单位面积周界上的电动势等于单位面积上磁通的减少率。

式(1-3)表示单位体积发出的电通量等于单位体积内的电荷。

式(1-4)表示磁力线是闭合的。

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial \rho / \partial t = 0 \quad (1-5)$$

式(1-5)表示单位体积表面上流出的电流等于单位体积内电荷的减少率。

通过式(1-1)和式(1-2)可以求出均匀媒质中电场 \mathbf{E} 与磁场 \mathbf{H} 之间的关系。

电磁场在两种媒质边界上满足:

$$\mathbf{E}_{2t} = \mathbf{E}_{1t} \quad (1-6)$$

$$\mathbf{H}_{2t} - \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{J}_s \quad (1-7)$$

$$\mathbf{D}_{1n} - \mathbf{D}_{2n} = \rho_s \quad (1-8)$$

$$\mathbf{B}_{1n} = \mathbf{B}_{2n} \quad (1-9)$$

式(1-6)表示电场的切向分量连续。

式(1-7)表示磁场的切向分量在理想导体表面上不连续,即在理想导体表面感应面电流。

式(1-8)表示电位移矢量的法线分量在导体分界面上不连续,即在导体表面上感应电荷。也就是说,电荷只能存在于导体表面。

式(1-9)表示磁感应强度的法向分量连续。

从上面的叙述可知,在理想导体中不可能有电场,但可能有静磁场而没有交变磁场。

因此,理想导体表面的边界条件必须考虑静磁场和交变磁场两种情况。归纳起来,电磁场边界条件见表 1.1。

表 1.1 电磁场边界条件

	1	2	3	
1	$\varepsilon_1 \mu_1$	$\varepsilon_1 \mu_1$	$\varepsilon_1 \mu_1$	
2	$\varepsilon_2 \mu_2$	$\varepsilon_2 \mu_2 \sigma_2$	$\sigma = \infty$	
边界条件	$H_{1t} - H_{2t} = 0$ $E_{1t} - E_{2t} = 0$ $\mu H_{1n} = \mu H_{2n}$ $\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$	$H_{2t} - H_{1t} = 0$ $E_{2t} - E_{1t} = 0$ $\mu H_{1n} = \mu H_{2n}$ $\varepsilon_1 E_{1n} - \varepsilon_2 E_{2n} = \rho_s$ $(\varepsilon_{r1} E_{1n} = \varepsilon_{r2} E_{2n})$	静磁场 $H_{2t} - H_{1t} = J_s$ $E_{1t} = 0$ $\mu H_{1n} = \mu H_{2n}$ $\varepsilon_2 E_{1n} = \rho_s$	交变磁场 $H_{1t} = J_s$ $E_{1t} = 0$ $\mu H_{1n} = 0$ $\varepsilon_1 E_{1n} = \rho_s$
注: $\varepsilon_k = \varepsilon - j\sigma/\omega (k=1,2)$, 式中: σ 为电导率; ω 为角频率				

1.2 位函数

对于天线问题,常由已知天线电流求解其辐射场,而天线电流,只有振子很细时才是正弦分布,其他情况则必须根据 J 、 ρ 解麦克斯韦方程。

1.2.1 交变电磁场方程的直接解法

$$\nabla \times E = -j\omega B \quad (1-10)$$

$$\nabla \times H = J + j\omega D \quad (1-11)$$

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (1-12)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (1-13)$$

求式(1-10)的旋度,有

$$\nabla \times \nabla \times E = -j\omega\mu \nabla \times H \quad (1-14)$$

因为研究的是各向同性媒质中的场,所以 μ 为常数。再将式(1-11)代入式(1-14),得

$$\nabla \times \nabla \times E = -j\omega\mu(j\omega\varepsilon)E + j\omega\mu J$$

因为

$$\nabla \times \nabla \times E = \nabla \cdot \nabla \cdot E - \nabla^2 E$$

$$-j\omega^2 \varepsilon \mu = k^2$$

$$\nabla \cdot E = \rho/\varepsilon$$

所以

$$\nabla^2 E + k^2 E = -j\omega\mu J + \nabla(\rho/\varepsilon) \quad (1-15)$$

对于无源空间: $J=0$, $\rho=0$ 。则

$$\nabla \times \nabla \times E = 0 \quad (1-16)$$

通过式(1-15)和式(1-16)可求出传播常数的各分量间的关系,即变成解波动方

程的问题。

1.2.2 交变电磁场中的位函数 A 、 φ

根据 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, 因为 $\nabla \cdot \nabla \times \mathbf{A} \equiv 0$, 所以

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (1-17)$$

将式(1-17)代入式(1-10), 得

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \nabla \times \mathbf{A}$$

因为

$$\nabla \times \nabla \varphi \equiv 0$$

所以

$$\mathbf{E} = -j\omega \mathbf{A} - \nabla \varphi \quad (1-18)$$

\mathbf{A} 、 φ 是电磁场相互耦合产生的, 而不是单独产生的, 这样其定义就更加一般化。

若 $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \nabla \psi$, $\varphi = \varphi_1 + j\omega\psi$ 仍能得到同一个 \mathbf{E} 、 \mathbf{B} , 因此 \mathbf{A} 和 φ 不是唯一的, 必须有附加条件使之变成唯一。为了计算方便, 先将式(1-17)和式(1-18)代入式(1-11), 得

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} / \mu = j\omega \varepsilon (-j\omega \mathbf{A} - \nabla \varphi) + \mathbf{J}$$

因为

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \equiv \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} \quad -j\omega^2 \mu \varepsilon = k^2$$

所以

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \varepsilon \mu \varphi)$$

规定 $\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \varepsilon \mu \varphi = 0$, 使 \mathbf{A} 唯一且满足

$$\nabla^2 \mathbf{A} + k^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad (1-19)$$

同理, 可得

$$\nabla^2 \varphi + k^2 \varphi = -\rho / \varepsilon \quad (1-20)$$

可见, 当已知 \mathbf{J} 、 ρ 时用位函数 \mathbf{A} 、 φ 是很方便的。

1.2.3 交变电磁场中的位函数 A^* 、 φ^*

为了解决问题的方便而等效出磁荷磁流(实际上并不存在磁荷磁流), 根据对偶原理即把原有麦克斯韦方程中的 \mathbf{E} 换为 \mathbf{H} , ε 换为 $-\mu$, \mathbf{J} 换为 $-\mathbf{J}_M$, 则有

$$\mathbf{D} = -\nabla \times \mathbf{A}^* \quad (1-21)$$

$$\mathbf{H} = -j\omega \mathbf{A}^* - \nabla \varphi^* \quad (1-22)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A}^* + k^2 \mathbf{A}^* = -\mu \mathbf{J}_M \quad (1-23)$$

$$\nabla^2 \varphi^* + k^2 \varphi^* = -\rho_M / \varepsilon \quad (1-24)$$

当场源的效果与磁流磁荷相同时, 就用 \mathbf{A}^* 、 φ^* , 如磁偶极子等。

1.2.4 Hertz 位 \mathbf{II}

使式(1-19)中 \mathbf{A} 唯一条件为

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega\varepsilon\mu\varphi = 0$$

则

$$\begin{aligned}\varphi &= -\nabla \cdot \mathbf{A} / (j\omega\varepsilon\mu) \\ \mathbf{E} &= -j\omega\mathbf{A} - \nabla[\nabla \cdot \mathbf{A} / (-j\omega\varepsilon\mu)]\end{aligned}$$

如令 $\varphi = -\nabla \cdot \mathbf{II}$, 则

$$\mathbf{II} = \mathbf{A} / (\omega\varepsilon\mu) \quad (1-25)$$

代入式(1-19), 得

$$\nabla^2 \mathbf{II} + k^2 \mathbf{II} = -\mathbf{J} / (j\omega\varepsilon) \quad (1-26)$$

$$\mathbf{B} = j\omega\varepsilon\mu \nabla \times \mathbf{II} \quad (1-27)$$

$$\mathbf{E} = k^2 \mathbf{II} + \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{II} \quad (1-28)$$

令 $\mathbf{II}_1 = \mathbf{A} / (j\omega\varepsilon_1\mu)$ (ε_1 为空间媒质的介电常数), $\varphi = -\nabla \cdot \mathbf{II}_1$ 。则 (1-29)

$$\nabla^2 \mathbf{II}_1 + k_1^2 \mathbf{II}_1 = 0 \quad (1-30)$$

$$\mathbf{B} = j\omega\varepsilon_1\mu \nabla \times \mathbf{II}_1 \quad (1-31)$$

$$\mathbf{E} = k_1^2 \mathbf{II}_1 + \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{II}_1 \quad (1-32)$$

式中: $k_1 = \omega(\varepsilon\mu)^{1/2}$ 。 (1-33)

在有源空间, 假设空间侵入一些介质, 介电常数为 ε 。令

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - \varepsilon_1)\mathbf{E} \quad (1-34)$$

则

$$\nabla^2 \mathbf{II}_1 + k_1^2 \mathbf{II}_1 = -\mathbf{P} / \varepsilon_1 \quad (1-35)$$

$$\mathbf{B} = j\omega\varepsilon_1\mu \nabla \times \mathbf{II}_1 \quad (1-36)$$

$$\mathbf{E} = k_1^2 \mathbf{II}_1 + \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{II}_1 \quad (1-37)$$

研究不均匀介质块所产生的二次辐射时就要用 \mathbf{II}_1 。

1.2.5 \mathbf{II}^*

根据对偶定理, 有

$$\mathbf{E} = -\nabla \times \mathbf{A}^* / \varepsilon$$

$$\mathbf{H} = -j\omega\mathbf{A}^* - \nabla\varphi^*$$

$$\varphi^* = -\nabla \cdot \mathbf{II}$$

$$\mathbf{A}^* = j\omega\varepsilon\mu \mathbf{II}^* \quad (1-38)$$

于是

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu \nabla \times \mathbf{II}^* \quad (1-39)$$

$$\mathbf{H} = k^2 \mathbf{II}^* + \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{II}^* \quad (1-40)$$

$$\nabla^2 \mathbf{II}^* + k^2 \mathbf{II}^* = -\mathbf{J}^* / (j\omega\mu) \quad (1-41)$$

假设空间侵入一些铁磁物质, 则有

$$\mathbf{E} = -j\omega\mu_0 \nabla \times \mathbf{II}_1^* \quad (1-42)$$

$$\mathbf{H} = k^2 \mathbf{II}_1^* + \nabla \cdot \nabla \cdot \mathbf{II}_1^* \quad (1-43)$$

$$\nabla^2 \Pi^* + k^2 \Pi^* = -M/\mu_0 \quad (1-44)$$

式中: M 为单位体积内的磁矩, 即磁化强度。

1.3 格林公式

在闭曲面包围的体积 V 内有一点 P , 在 P 点的函数 $\phi(P), \psi(P)$ 满足

$$\int_v (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dv = \int_s (\psi \partial \phi / \partial n - \phi \partial \psi / \partial n) ds$$

证明 取 $A(P) = \psi \nabla \phi$, 应用奥高定理(又称高斯定理)得

$$\int_v \nabla \cdot A dv = \int_s A \cdot n ds$$

要求 A 在 V 内连续且可微, 在表面 S 上连续可微, 应用矢量公式

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) &\equiv \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \nabla \phi \\ &= \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla^2 \phi \end{aligned}$$

根据奥高定理, 应要求 ψ, ϕ 在 V 内连续可微(一次微分连续, 二次可微), ψ, ϕ 在 S 上连续且一次微分存在, 即

$$\begin{aligned} \int_v \nabla \cdot A dv &= \int_v \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) dv \\ &= \int_v (\nabla \phi \cdot \nabla \psi + \psi \nabla^2 \phi) dv \\ &= \int_s \psi \partial \phi / \partial n ds \end{aligned} \quad (1-45)$$

式中: $\nabla \phi \cdot n = \partial \phi / \partial n$ 。

再令 $A(P) = \phi \nabla \psi$, 同理得

$$\int_v (\nabla \psi \cdot \nabla \phi + \phi \nabla^2 \psi) dv = \int_s \phi (\partial \psi / \partial n) ds \quad (1-46)$$

由式(1-45)和式(1-46)可得

$$\int_v (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dv = \int_s [\psi (\partial \phi / \partial n) - \phi (\partial \psi / \partial n)] ds \quad (1-47)$$

从而格林公式得证。

可以利用格林公式取一个已知函数 $\phi(P)$ 及一个合适的曲面, 则可简化非均匀的波动方程 $\nabla^2 f + k^2 f = F$ 。

1.4 非均匀波动方程的解

此问题即是已知 F 求解 f 方程式, 为

$$\nabla^2 f + k^2 f = F$$

令 $\phi = f$, 设一个 ψ , 对曲面 S 若运用格林公式, 已知积分号内的函数, 则能将 $f(P_0)$ 放在积分号外。

若 ψ 满足 $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ 则 $\nabla^2\psi = -k^2\psi$ 。而

$$\nabla^2 f = -k^2 f + F$$

$$\psi(\nabla^2 f) = (F - k^2 f)\psi$$

$$f(\nabla^2\psi) = -k^2\psi f$$

$$\psi \nabla^2 f - f \nabla^2\psi = F\psi$$

则

$$\int_v (\psi \nabla^2 f - f \nabla^2\psi) dv = \int_v F\psi dv$$

因为

$$\int_v (\psi \nabla^2 f - f \nabla^2\psi) dv = \int_s \left(\psi \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds$$

所以

$$\int_v F\psi dv = \int_s \left(\psi \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds$$

等号左边积分号内的函数都是已知的,而等号右边积分曲面 S 必须能够找到,否则仍无法求解。

如图 1.1 所示,在 P_0 点做一个小球面 s_0 ,其半径为 r_0 ,则 $s_0 = 4\pi r_0^2$ 。因为 $\nabla^2\psi + k^2\psi = 0$ 有无限多个解,而其中最简单的一个为 $\psi = e^{-jkr}/r$,这里 r 是从 P_0 点算起但

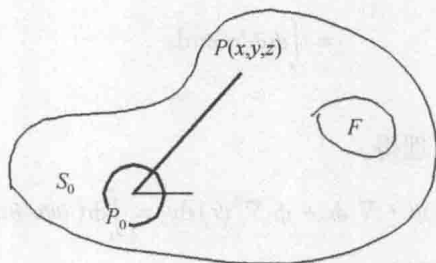


图 1.1 域内有其他源 F

不包含在 V 内,否则含有间断点存在。所以要使 s_0 无限缩小,而让 $(\partial\psi/\partial n)$ 无限增长,则

$$\int_{v-v_0} F\psi dv = \int_{s+s_0} \left(\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right) ds$$

在 s_0 上有

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = - \frac{\partial \phi}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = (1/r_0^2 + jk/r_0) e^{-jkr_0}$$

则 $\psi = 0(1/r_0)$,如果在 p_0 点不是无偶极子,而是连续分布的源或无源时, $(\partial\phi/\partial n) = (\partial f/\partial n)$ 是有限的,则

$$\int_{s_0} \psi \partial \phi / \partial n ds = 0$$

而

$$-\int_{s_0} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \equiv -\int_{s_0} f(p_0) e^{-jkr_0} / r_0^2 ds$$

因为

$$f(s_0) \approx f(p_0), r_0 \rightarrow 0, e^{-jkr_0} \rightarrow 1, ds = 4\pi r_0^2$$

$$-\int_{s_0} f(p_0) \frac{1}{r_0^2} e^{-jkr_0^2} ds = -4\pi f(p_0), V_0 = 4\pi r_0^2/3, r_0 \rightarrow 0$$

$$V_0 = 0(1/r_0^3), \text{ 而 } \psi = 0(1/r_0) \text{ 则有 } \int_{v-v_0} = \int_v$$

$$\int_v \mathbf{F} \frac{1}{r} e^{-jkr} dv = \int_{s_1} \left[\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} \right] ds - 4\pi f(p_0)$$

$$f(p_0) = \frac{1}{4\pi} \int_v -f \left(\frac{1}{r} e^{-jkr} \right) dv + \frac{1}{4\pi} \int_{s_1} \left[\frac{\partial f}{\partial n} \left(\frac{1}{r} e^{-jkr} \right) - f \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} e^{-jkr} \right) \right] ds \quad (1-48)$$

式中:第一项为场源在 P_0 点给出的场分布;第二项为 S_1 以外所有场源对 P_0 点分布的影响。

如果在无限空间,除场源外,介质常数和磁导率都是均匀的,则

$$f(p_0) = \frac{1}{4\pi} \int_v -F \frac{1}{r} e^{-jkr} dv \quad (1-49)$$

这是因为场源 F 在有限距离上 $f = 0(1/r_1)$, $\frac{\partial f}{\partial n} = -\frac{\partial f}{\partial r} \Big|_{r_1} = 0 \left(\frac{1}{r_1^2} \right)$, 则 $\frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial n} = 0 \left(\frac{1}{r_1^3} \right)$ 。所以当 $r_1 \rightarrow \infty$ 时,式(1-49)是有一定条件的,即

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + j\omega \epsilon \mu \phi = 0$$

$$\psi = \frac{1}{r} e^{-jkr}$$

如果具有有限大小的场源置于无限空间,则只要 p_0 点在 s_1 内(图 1.2), s_1 就可以任意选取,而且 \int_{s_1} 是固定的(是零或常数)。

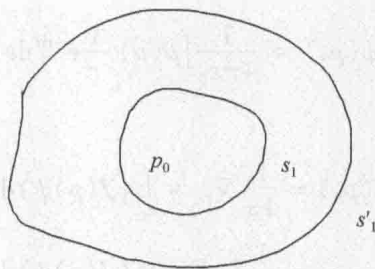


图 1.2 取包面 s_1 包围场源

$$4\pi f(p_0) = \int_v + \int_{s_1} = \int_v + \int_{s_1}$$

例如,对抛物面天线取 s_1 时,可以选在口面或口面以外。如果 s_1 选在口面以内, F 就要发生变化。

值得指出的是,选择 ψ 是根据 $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$, 而 $\psi = \frac{1}{r} e^{-jkr}$ 不是唯一解,因此不选 $\psi =$