普通高等教育"十二五"规划教材

线性代数和概率统计基础

XIANXING DAISHU HE GAILVTONGJI JICHU

主编　文华艳　唐定云

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十二五”规划教材

线性代数和概率统计基础

主　编　文华艳　唐定云
副主编　吴明科　郑金梅
参　编　张媛媛

机械工业出版社

本书分为线性代数、概率与统计两个部分，共6章，内容包括行列式、矩阵、向量组与线性方程组的解、概率与分布、随机变量的数字特征、数理统计初步，基本涵盖了工科各专业所需要的相关数学知识.

本书在编写上突出了数学知识的系统性、简洁性、实用性，在表达上力求简明扼要，同时注重概念产生的背景，强调应用数学的意识，旨在培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力以及科学建构数学知识体系的能力，并且使学生通过体会问题解决的数学过程，进一步形成解决问题的分析和思考能力，为其他课程的学习打下坚实的数学基础.

本书可作为应用型本科院校、高职高专院校的数学类教材，也可作为一般工程技术人员的参考用书.

为方便教学，本书配备电子课件等教学资源. 凡选用本书作为教材的教师均可登录机械工业出版社教育服务网 www. cmpedu. com 免费下载. 如有问题请致信 cmpgaozhi@ sina. com，或致电 010-88379375 联系营销人员.

图书在版编目（CIP）数据

线性代数和概率统计基础/文华艳，唐定云主编.
—北京：机械工业出版社，2015. 2
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978 - 7 - 111 - 49217 - 7

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①文… ②唐… Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材 ②概率统计-高等学校-教材 Ⅳ. ①O151. 2 ②O211

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 011410 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：王玉鑫　　责任编辑：王玉鑫　刘子峰
版式设计：张文贵　　责任校对：刘怡丹
封面设计：张　静　　责任印制：乔　宇
保定市中画美凯印刷有限公司印刷

2015 年 2 月第 1 版 · 第 1 次印刷
184mm × 260mm · 7. 5 印张 · 173 千字
0 001 – 3 000 册
标准书号：ISBN 978 – 7 – 111 – 49217 – 7
定价：22.50 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
电话服务
服务咨询热线：010 – 88379833
读者购书热线：010 – 88379649
网络服务
机 工 官 网：www. cmpbook. com
机 工 官 博：weibo. com/cmp1952
教育服务网：www. cmpedu. com
金 书 网：www. golden-book. com

前 言

本书是根据应用型本科院校的数学课程教学要求，在多年教学实践的基础上，针对学生专业要求以及学时少的实际情况编写而成. 本书在编写上突出了数学知识的系统性、简洁性、实用性，在表达上力求简明扼要，同时注重概念产生的背景，强调应用数学的意识.

本书内容包括线性代数、概率与统计两个部分，其中线性代数部分以“线性方程组”为中心内容进行展开；概率与统计部分以“随机变量”为中心，讨论了中心极限定理以及回归分析等常见的应用问题，内容基本包括了工科各专业所需要的相关数学知识.

本书的编写旨在培养学生的抽象思维能力、逻辑推理能力、运算能力以及科学建构数学知识体系的能力，并且使学生通过体会问题解决的数学过程，进一步形成解决问题的分析和思考能力，为其他课程的学习打下坚实的数学基础.

本书由西南科技大学城市学院数学教研室组织编写，文华艳、唐定云为主编，吴明科、郑金梅为副主编，参加编写的还有张媛媛.

由于编者水平有限，以及各行业对工科学生提出的要求不尽相同，本书在内容的取舍以及编排上还存在不妥之处，希望广大读者批评指正.

编 者

目 录

第一章　行列式

行列式是由研究线性方程组产生的，它是线性代数中的一个基本工具，在讨论许多问题时都要用到. 本章先介绍二阶行列式，并推广到 n 阶行列式，然后讨论行列式的基本性质及行列式按行（列）展开的计算方法，最后利用克莱姆法则求解线性方程组.

第一节　行列式的定义

对于二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，该方程组的解为

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}$$

若记算式

$$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{1-1}$$

那么上述方程组的解可以简单地表达为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

我们称式（1－1）为二阶行列式. 可见引入行列式记号后会在表示方程组的解方面带来便利，下面将行列式的概念推广至 n 阶.

定义 1.1　称算式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

为 n 阶行列式，其运算规则定义为：

（1）当 $n=1$ 时，$D = a_{11}$；

（2）当 $n\geqslant 2$ 时，$D=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+\cdots+a_{n1}A_{n1}$．其中 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，M_{ij}是在 D 中去掉第 i 行以及第 j 列元素后，按照原来的顺序排成的 $n-1$ 阶行列式，即

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称 M_{ij}为元素 a_{ij}的余子式，A_{ij}为元素 a_{ij}的代数余子式.

按照上述定义，欲计算一个 n 阶行列式，只需计算一系列 $n-1$ 阶行列式即可.

例 1 计算三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

解 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$$=a_{11}(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{21}(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{31}(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{21}a_{12}a_{33}+a_{21}a_{13}a_{32}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{13}a_{22}$$

例 2 证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

证明 用数学归纳法证明. 当 $n=2$ 时，显然成立.

假设当 $n=k$ 时，结论成立，那么当 $n=k+1$ 时，有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,k+1} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2,k+1} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3,k+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{k+1,k+1} \end{vmatrix}+0+\cdots+0$$

$$=a_{11}\ (a_{22}a_{33}\cdots a_{k+1,k+1})$$

所以原结论成立.

第二节　行列式的性质

通常用行列式的定义计算行列式是比较烦琐的，下面导出一些行列式的性质，以便简化行列式的计算.

性质 1　交换行列式的两行（列），行列式的值改变符号.

以 r_i 表示行列式的第 i 行，以 c_i 表示行列式的第 i 列. 交换 i，j 两行记作 $r_i \leftrightarrow r_j$，交换 i，j 两列记作 $c_i \leftrightarrow c_j$.

推论　如果行列式有两行（列）完全相同，则此行列式为零.

证　设原行列式为 D，把完全相同的两行（列）互换，有 $D=-D$，故 $D=0$.

性质 2　行列式的某一行（列）中所有的元素都乘以同一数 k，等于用数 k 乘此行列式.

第 i 行（或列）乘以 k，记作 kr_i（或 kc_i）.

推论　如果行列式有一行（列）全为零，则此行列式为零.

性质 3　把行列式的某一列（行）的各元素乘以同一数然后加到另一列（行）上去，行列式的值不变.

例如，以数 k 乘第 j 列加到第 i 列上去（记作 c_i+kc_j），有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \xlongequal{c_i+kc_j}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}+ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}+ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}+ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i \neq j)$$

同样地，以数 k 乘第 j 行加到第 i 行上，记作 r_i+kr_j.

推论　行列式中如果有两行（列）元素成比例，则此行列式的值等于零.

记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

行列式 D^{T} 称为行列式 D 的转置行列式.

性质 4 行列式与它的转置行列式相等.

由此性质可知，行列式中的行与列具有同等的地位，行列式的性质凡是对行成立的对列也同样成立，反之亦然.

性质 5 行列式等于它的任一行（列）的各元素与其对应的代数余子式乘积之和，即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n)$$

推论 行列式任一行（列）的元素与另一行（列）的对应元素的代数余子式乘积之和等于零，即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j)$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

上述性质的证明均可按照数学归纳法证明，在此从略.

<u>**例 3**</u> 计算

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & 3 & -3 \end{vmatrix}$$

解法一：

$$D \xlongequal{c_1 \leftrightarrow c_2} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -5 & 1 & 3 & -3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 + 5r_1]{r_2 - r_1} -\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -8 & 4 & -6 \\ 0 & 16 & -2 & 7 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4 - 8r_2]{r_3 + 4r_2} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & -10 & 15 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4 + \frac{5}{4}r_3} \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 8 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{5}{2} \end{vmatrix} = 40$$

解法二： 保留 a_{33}，把第 3 行其余元素变为 0，然后按第 3 行展开：

$$D \xlongequal[c_4 + c_3]{c_1 - 2c_2} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ -11 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & -5 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -11 & 1 & -1 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2+r_1} \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 2 & 0 \\ -5 & -5 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -6 & 2 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-c_2} \begin{vmatrix} -8 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = 40$$

例 4　计算

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

解　这个行列式的特点是各列 4 个数之和都是 6. 今把第 2、3、4 行同时加到第 1 行，提出公因子 6，然后各行减去第 1 行：

$$D \xlongequal{r_1+r_2+r_3+r_4} \begin{vmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_1]{\substack{r_2-r_1 \\ r_3-r_1}} 6\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 48$$

例 5　计算

$$D=\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a+b & a+b+c & a+b+c+d \\ a & 2a+b & 3a+2b+c & 4a+3b+2c+d \\ a & 3a+b & 6a+3b+c & 10a+6b+3c+d \end{vmatrix}$$

解　从第 4 行开始，后行减前行：

$$D \xlongequal{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-r_2 \\ r_2-r_1}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b & 3a+2b+c \\ 0 & a & 3a+b & 6a+3b+c \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\substack{r_4-r_3 \\ r_3-r_2}} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a & 3a+b \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{r_4-r_3} \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & a+b & a+b+c \\ 0 & 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^4$$

第三节 克莱姆法则

含有 n 个未知数 x_1，x_2，…，x_n 的 n 个线性方程的方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1-2}$$

与二、三元线性方程组相类似，它的解可以用 n 阶行列式表示，即有：

定理 1.1 （克莱姆法则）如果线性方程组（1－2）的系数行列式不等于零，即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0$$

那么，方程组（1－2）有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n=\frac{D_n}{D} \tag{1-3}$$

其中 D_j（$j=1, 2, \cdots, n$）是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组右端的自由项代替后所得到的 n 阶行列式，即

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证 用 D 中第 j 列元素的代数余子式 A_{1j}，A_{2j}，…，A_{nj} 依次乘方程组（1－2）的 n 个方程，再把它们相加，得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_{k1}A_{kj}\right)x_1+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\right)x_j+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}a_{kn}A_{kj}\right)x_n=\sum_{k=1}^{n}b_kA_{kj}$$

根据代数余子式的重要性质可知，上式中 x_j 的系数等于 D，而其余 x_i（$i\neq j$）的系数均为 0；又因为等式右端即是 D_j，于是有

$$Dx_j=D_j \quad (j=1, 2, \cdots, n) \tag{1-4}$$

当 $D\neq 0$ 时，方程组（1－4）有唯一的解（1－3）.

由于方程组（1－4）是由方程组（1－2）经乘数与相加两种运算而得，故（1－2）的解一定是（1－4）的解. 而（1－4）仅有一个解（1－3），故方程组（1－2）如果有解，就只能是（1－3）.

为证明（1－3）是方程组（1－2）的唯一解，还需验证解（1－3）确是方程组（1－2）的解，也就是要证明

$$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}=b_i \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

为此，考虑有两行相同的 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} b_i & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

它的值为0. 把它按第1行展开，由于第1行中 a_{ij}的代数余子式为

$$(-1)^{1+j+1}\begin{vmatrix} b_1 & a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{j+2}(-1)^{j-1}D_i=-D_j$$

所以有 $0=b_iD-a_{i1}D_1-\cdots-a_{in}D_n$，即

$$a_{i1}\frac{D_1}{D}+a_{i2}\frac{D_2}{D}+\cdots+a_{in}\frac{D_n}{D}=b_i \quad (i=1,2,\cdots,n)$$

例6　解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$$

解　$$D=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} \xlongequal[r_4-r_2]{r_1-2r_2} \begin{vmatrix} 0 & 7 & -5 & 13 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & -7 & 12 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 7 & -5 & 13 \\ 2 & -1 & 2 \\ 7 & -7 & 12 \end{vmatrix} \xlongequal[c_3+2c_2]{c_1+2c_2} -\begin{vmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ -7 & -7 & -2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix}=27$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix}=81,\ D_2=\begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix}=-108$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-27,\ D_4=\begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix}=27$$

于是得

$$x_1=3,\ x_2=-4,\ x_3=-1,\ x_4=1$$

克莱姆法则有重大的理论价值，撇开求解公式（1－3），克莱姆法则可叙述为下面的重要定理.

定理 1.2 如果线性方程组(1－2)的系数行列式 $D\neq0$，则它一定有解，且解是唯一的.

推论 如果线性方程组（1－2）无解或有两个不同的解，则它的系数行列式必为零.

线性方程组（1－2）右端的自由项 b_1，b_2，…，b_n 不全为零时，叫作非齐次线性方程组；当 b_1，b_2，…，b_n 全为零时，叫作齐次线性方程组.

对于齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases} \tag{1－5}$$

$x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 一定是它的解，这个解叫作该齐次线性方程组的零解. 如果一组不全为零的数是齐次线性方程组（1－5）的解，则它叫作该齐次线性方程组的非零解. 齐次线性方程组（1－5）一定有零解，但不一定有非零解.

定理 1.3 如果齐次线性方程组（1－5）的系数行列式 $D\neq0$，则它没有非零解.

推论 如果齐次线性方程组（1－5）有非零解，则它的系数行列式必为零.

定理 1.3 说明系数行列式 $D=0$ 是齐次线性方程组有非零解的必要条件. 在第三章中我们还将证明这个条件也是充分的.

习题一

1. 计算下列各行列式

（1）$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 10 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}$　　（2）$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

（3）$\begin{vmatrix} -ab & ac & ae \\ bd & -cd & de \\ bf & cf & -ef \end{vmatrix}$　　（4）$\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$

2. 证明下列各等式.

（1）$\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=(a-b)^3$

(2) $\begin{vmatrix} ax+by & ay+bz & az+bx \\ ay+bz & az+bx & ax+by \\ az+bx & ax+by & ay+bz \end{vmatrix} = (a^3+b^3)\begin{vmatrix} x & y & z \\ y & z & x \\ z & x & y \end{vmatrix}$

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ z^2 & (z+1)^2 & (z+2)^2 & (z+3)^2 \end{vmatrix} = 0$

(4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{vmatrix} = (a-b)(a-c)(a-d)(b-c)(b-d)(c-d)(a+b+c+d)$

3. λ，μ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \mu x_2 + x_3 = 0 \\ \lambda x_1 + 2\mu x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解？

4. λ 取何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1-\lambda)\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + (3-\lambda)x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 = 0 \end{cases}$$

有非零解？

第二章　矩阵

矩阵是线性代数的主要研究对象之一，它在数学和其他自然科学、工程技术和经济领域中都有着广泛的应用. 本章将介绍矩阵的定义及运算、矩阵的初等变换、求方阵的逆以及矩阵的秩.

第一节　矩阵的定义

一、矩阵的基本概念

定义 2.1　由 $m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$）排成的 m 行 n 列的数表（常用括弧将数表括起）

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，其中 a_{ij}叫作矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，i 为行标，j 为列标，表明 a_{ij}位于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列. 为简单起见，记 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为$(a_{ij})_{m\times n}$或 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$，也可简记为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

特别地，当 $m=n$ 时，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵或 n 阶方阵，记为 $\boldsymbol{A}_n$.

对于 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$，当 $m=1$ 时，有 $\boldsymbol{A}=(a_1\ a_2 \cdots\ a_n)$. 称为行矩阵，或行向量. 为避免元素间的混淆，行矩阵也可写为 $\boldsymbol{A}=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

当 $n=1$ 时，有 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$，称为列矩阵，或列向量.

当 $m=n=1$ 时，有 $\boldsymbol{A}=(a_1)=a_1$. 这里把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 看成是数.

两个矩阵的行数相等、列数也相等时，就称它们是同型矩阵. 所有元素均为零的矩阵，称为零矩阵，记作 $\boldsymbol{O}$. 注意不同型的零矩阵是不同的.

定义 2.2　如果 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 与 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是同型矩阵，且它们的对应元素均相等，即

$a_{ij}=b_{ij}$（$i=1, 2, \cdots, m$；$j=1, 2, \cdots, n$），则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记作 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

下面举几个关于矩阵应用的例子.

例 1　3 个产地与 4 个销地之间的里程（单位：千米）可列为矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}120 & 180 & 75 & 85\\ 75 & 125 & 35 & 45\\ 130 & 190 & 85 & 100\end{pmatrix}$$

其中 a_{ij} 为产地 i 到销地 j 的里程数.

例 2　4 个城市间的单向航线如图 2－1 所示.

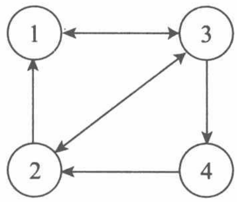

图　2－1

若令

$$a_{ij}=\begin{cases}1 & 第\ i\ 城能直接通往第\ j\ 城\\ 0 & 第\ i\ 城不能直接通往第\ j\ 城\end{cases}$$

则图 2－1 可用矩阵表示为

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

一般地，若干个点之间的单向通道都可用这样的矩阵表示.

例 3　n 个变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与 m 个变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases}y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n\\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n\\ \qquad\vdots\\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n\end{cases} \tag{2-1}$$

表示一个从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的线性变换，其中 a_{ij} 为常数. 线性变换（2－1）的系数 a_{ij} 构成矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$.

给定了线性变换（2－1），它的系数所构成的矩阵（称为系数矩阵）也就确定了. 反之，如果给出一个矩阵作为线性变换的系数矩阵，则线性变换也就确定了. 在这个意义