$AA^{*}=A^{*}A=|A|I$

新世纪大学数学系列教材

线性代数

XIAN XING DAI SHU

主　编　张　瑞　刘泮振
副主编　臧振春　苏白云　王晓艳　张建生

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

河南大学出版社
HENAN UNIVERSITY PRESS

XIAN XING DAI SHU

线性代数

主　编　张　瑞　刘泮振

副主编　臧振春　苏白云

王晓艳　张建生

河南大学出版社

·郑州·

内 容 简 介

本书根据高等院校经管类本科专业线性代数课程的教学大纲和考研大纲编写而成，是新世纪大学数学系列教材之一. 本书主要介绍线性代数的基本概念、基本理论和方法，主要内容有行列式、矩阵、线性方程组、矩阵的特征值和特征向量、二次型等. 书中每章配有 A，B 两组习题，书后附有习题参考答案. 在附录中适当增添本课程数学问题的计算机求解内容.

本书主要特色是结构清晰、概念准确、深入浅出、通俗易懂、可读性强，使读者易于理解和接受. 在数学思想和方法的讲解过程中注重与实际应用背景相结合，强调应用能力的培养. 在内容安排上还考虑了学生考研的需要，因此本书可作为高等学校经管类专业本科生的教材，也适合作为非数学类其他专业学生和相关课程教师的参考用书，适合考研学生参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/张瑞，刘泮振主编. —郑州：河南大学出版社，2013. 9

新世纪大学数学系列教材

ISBN 978-7-5649-1239-0

Ⅰ. ①线…　Ⅱ. ①张…②刘…　Ⅲ. ①线性代数—高等学校—教材　Ⅳ. ①O151. 2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 120585 号

责任编辑　阮林要

责任校对　文　博

封面设计　郭　灿

出　版　河南大学出版社

地址：郑州市郑东新区商务外环中华大厦 2401 号　　邮编：450046

电话：0371－86059701(营销部)　　网址：www. hupress. com

排　版　郑州市今日文教印制有限公司

印　刷　郑州市今日文教印制有限公司

版　次　2013 年 9 月第 1 版　　**印　次**　2013 年 9 月第 1 次印刷

开　本　787mm×1092mm　1/16　　**印　张**　19. 25

字　数　480 千字　　**印　数**　1—5000 册

定　价　34. 90 元

前 言

线性代数是财经、管理类等学科的专业基础课，也是研究生入学考试的必考内容之一. 随着高等教育事业的发展和教育改革的不断深入，高等教育对基础课的内容也提出了一系列新的要求. 教材改革作为教育改革的基本内容，愈来愈受到学校和教育人士的关注. 本书编者根据财经、管理类等学科的发展需要，结合多年来的教学实践，广泛参阅国内外有关著作，依据高等院校经管类本科专业线性代数课程的教学大纲和考研大纲，组织编写了这本《线性代数》教材.

本书具有以下主要特点：

1. 注重基本理论、基本知识的介绍和基本技能的训练，概念引入力求自然、简洁明了. 针对一些较难问题的提出、不易理解的概念和不易掌握的方法均给出了注释，力求使抽象的问题变得通俗易懂.

2. 尽量吸收本学科新的、比较成熟的研究成果，充实了线性代数在经济管理中的应用.

3. 书中配有较多的典型例题，题型多样，内容广泛，使读者有更多的解题训练机会，以培养分析和解决问题的能力.

4. 本书各章配备习题，针对性强，又兼顾前后内容的复习和巩固，具有典型性和代表性. 习题分为 A，B 两组，A 组为传统题型，B 组为标准化题型，难度高于 A 组，以备读者进一步学习之用.

5. 为适合不同专业学习和考研的需要，保持学科本身的系统性，针对数学基础要求较高的专业或学生准备了带“*”号的部分章节，可以作为选学内容，使用时可视具体课时情况酌情取舍.

6. 为了提高读者对线性代数知识的应用能力，适当反映线性代数方法在实际应用中的进展，同时为计算机辅助教学和进行数学实验准备，以附录形式增添了利用计算机解决数学问题的内容，简介 MATLAB 在该课程中的应用.

本书由张瑞、刘泮振担任主编. 参与编写的作者具体分工如下：苏白云第 1 章，刘泮振第 2 章，王晓艳第 3 章，张建生第 4 章，张瑞第 5 章、第 6 章第三节及习题 6，臧振春第 6 章第一、二节及附录、附表、习题解答.

本书编写过程中，曾得到河南大学出版社、河南财经政法大学教务处及石永生老师的大力支持和帮助，参与授课的老师也对本书提出了很多宝贵的意见，在此一并感谢.

由于编者水平有限，书中难免有不妥之处，祈望同仁和广大读者不吝指正.

编 者

2013 年 5 月

目　录

第1章 行 列 式

行列式在线性代数中具有重要意义，它是研究线性方程组的有力工具. 在这一章，我们将介绍 n 阶行列式的概念、性质、计算方法以及解 n 元线性方程组的克莱姆法则.

§1.1 二阶、三阶行列式

在中学里已通过解二元、三元线性方程组引出了二阶、三阶行列式的定义，在此我们再进行简单的复习.

一、二阶行列式

我们用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

二阶行列式的计算也可根据图 1-1 来记忆.

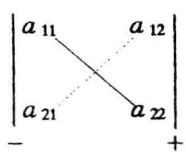

图 1-1

即实线联结的两个元素乘积减去虚线联结的两个元素乘积.

例 1 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}.$$

解 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}=1\times2-3\times(-7)=23.$

例 2 设
$$D=\begin{vmatrix}\lambda^2 & \lambda \\ 4 & 2\end{vmatrix},$$
问：(1) 当 λ 为何值时，$D=0$；

(2) 当 λ 为何值时，$D\neq 0$.

解 $D=2\lambda^2-4\lambda=2\lambda(\lambda-2)$.

令 $D=0$ 得 $\lambda=0,\lambda=2$，因此

当 $\lambda=0$ 或 $\lambda=2$ 时，$D=0$；

当 $\lambda\neq 0$ 且 $\lambda\neq 2$ 时，$D\neq 0$.

二、三阶行列式

我们用记号
$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$
表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}$，称为三阶行列式，即
$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$
三阶行列式的计算也可根据图 1-2、1-3 来记忆.

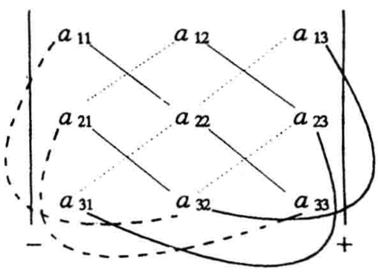

图 1-2

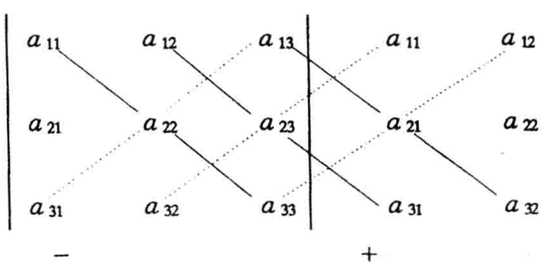

图 1-3

例 3 计算行列式
$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & 5 \\ 7 & -9 & 8\end{vmatrix}.$$
解 $D=1\times(-4)\times 8+0\times(-9)\times 3+2\times 5\times 7-3\times(-4)\times 7-5\times(-9)\times 1-2\times 0\times 8$

$=167.$

例 4 若三阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix}=0,$$

求 x 的值.

解 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & 5 & x \end{vmatrix}=3x+25-8-30+10-2x=x-3.$

令 $x-3=0$，则 $x=3$.

例 5 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}>0$ 的充要条件是什么？

解 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}=4-a^2.$

令 $4-a^2>0$ 得 $-2<a<2$.

故 $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}>0$ 的充要条件是 $-2<a<2$.

§1.2 n 阶行列式

作为定义 n 阶行列式的准备，我们先来讨论一下排列的性质.

一、排列与逆序

定义 1.1 由 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个无重复的 n 元有序数组称为一个 n 级排列，记作 $i_1i_2i_3\cdots i_n$.

例如，34521 和 54312 都是 5 级排列，124356 和 356421 都是 6 级排列. 13456 既不是 5 级排列也不是 6 级排列. $123\cdots n$ 是一个 n 级排列，称为自然排列.

n 级排列要由全部 $1\sim n$ 这 n 个数组成，既不要遗漏也不要重复. 另外还要注意排列的顺序性，顺序不同的排列将是不同的排列.

自然排列 $123\cdots n$ 是按递增的顺序排起来的，其他的排列都或多或少地破坏这种自然顺序.

定义 1.2 在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，若 $i_s>i_t$，并且 i_s 排在 i_t 前面，则称 i_s 与 i_t 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数，称为它的逆序数，记为 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)$.

求 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数，即求该排列的各个数码前面比它大的数码个数的总和，可参考下面的方法.

观察排在 1 前面比 1 大的数码个数，设为 k_1，划掉 1. 再观察排在 2 前面比 2 大的数码个数，设为 k_2，划掉 2. 如此下去直到 n，于是可得 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)=k_1+k_2+\cdots+k_n$.

例 1 求排列 7342651 和 3742651 的逆序数.

解 $k_1=6$，因 1 前面有 6 个比 1 大的数码，划去 1，余下 734265；

$k_2=3$，因 2 前面有 3 个比 2 大的数码，划去 2，余于 73465；

$k_3=1$，因 3 前面有 1 个比 3 大的数码，划去 3，余下 7465；

$k_4=1$，因 4 前面有 1 个比 4 大的数码，划去 4，余下 765；

$k_5=2$，因 5 前面有 2 个比 5 大的数码，划去 5，余下 76；

$k_6=1$，因 6 前面有 1 个比 6 大的数码，划去 6，余下 7；

$k_7=0$，因 7 前面已没有数码.

所以
$$\tau(7342651)=6+3+1+1+2+1+0=14.$$

同理可求 $\tau(3742651)=6+3+0+1+2+1+0=13$.

例 2 求由数码 $1,2,\cdots,n,n+1,\cdots,2n$ 构成的一个排列 $(2n)1(2n-1)2\cdots(n+1)n$ 的逆序数.

解 1 前面有 1 个比 1 大的数码 $2n$，所以 $k_1=1$，划去 1；

2 前面有 2 个比 2 大的数码，所以 $k_2=2$，划去 2；

……

n 前面有 n 个比 n 大的数码，所以 $k_n=n$，划去 n；

$n+1$ 前面有 $n-1$ 个比 $n+1$ 大的数码，所以 $k_{n+1}=n-1$，划去 $n+1$；

$n+2$ 前面有 $n-2$ 个比 $n+2$ 大的数码，所以 $k_{n+2}=n-2$，划去 $n+2$；

……

$2n-1$ 前面有 1 个比 $2n-1$ 大的数码，所以 $k_{2n-1}=1$，划去 $2n-1$；

$2n$ 前面没有任何数码，所以 $k_{2n}=0$. 因此

$$\begin{aligned}&\tau[(2n)1(2n-1)2\cdots(n+1)n]\\=&1+2+\cdots+n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1+0\\=&n^2.\end{aligned}$$

定义 1.3 逆序数为偶数的排列称为偶排列，逆序数为奇数的排列称为奇排列.

例如，排列 7342651 的逆序数为偶数，故为偶排列；排列 3742651 的逆序数为奇数，故为奇排列.

定义 1.4 在一个排列 $i_1\cdots i_s\cdots i_t\cdots i_n$ 中，如果仅将它的两个数码 i_s 与 i_t 对调，其他数码不变，得到另一个排列 $i_1\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$，这样的变换，称为一个对换，记作对换 (i_s,i_t).

例如，排列 7342651 经过对换 (7,3) 变成了排列 3742651，同时也将偶排列变成了奇排列，改变了排列的奇偶性. 这一现象不是偶然的，它具有一般性.

定理 1.1 一次对换改变排列的奇偶性.

证 分两种情况进行讨论.

(1) 对换相邻两个数码.

设排列为 $AijB$，其中 A,B 代表 $1\sim n$ 这 n 个数中除 i,j 以外的其他数码.

排列 $AijB$ 经过一次对换 (i,j) 变为新排列 $AjiB$. 从原排列到新排列，A,B 中数码的次序没发生变化，A,B 中的数码与 i,j 的次序也没发生变化，只有 i 与 j 的次序产生了颠倒. 因此，原排列与新排列的逆序数应相差 ± 1，故排列的奇偶性发生了变化.

(2) 对换不相邻的两个数码.

设排列为 $Aik_1k_2\cdots k_sjB$，经过一次对换 (i,j) 变为新排列 $Ajk_1k_2\cdots k_siB$.

新排列可以看作是原排列经过如下相邻对换得到的：先将 i 依次与 $k_1,k_2,\cdots,k_s$ 对换得到 $Ak_1k_2\cdots k_sijB$，再将 j 依次与 $i,k_s,k_{s-1},\cdots,k_2,k_1$ 作对换得 $Ajk_1k_2\cdots k_siB$. 以上共经过了 $2s+1$ 次相邻对换，因一次相邻对换改变排列的奇偶性，故经过 $2s+1$ 次相邻对换，排列的奇偶性也发生了变化.

定理 1.2 $n(n>1)$ 级排列共有 $n!$ 个，其中奇偶排列各占一半.

证 因排列是无重复排列，故排列总数为 $n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1=n!$ 个.

设奇排列个数为 s，偶排列个数为 t. 现对所有奇排列作同一对换，因一次对换改变排列的奇偶性，所以经过同一对换后，所有奇排列就变成了 s 个不同的偶排列；又因偶排列总数为 t，所以 $s\leqslant t$. 同理再对所有偶排列作同一对换，可得 $t\leqslant s$. 故 $s=t$，即奇偶排列各占一半.

二、n 阶行列式定义

在对排列知识有了一定了解之后，我们可以对二阶、三阶行列式作进一步的研究，得出它们的结构规律，利用这些规律来定义 n 阶行列式.

我们先看三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

我们把 a_{ij} 叫作行列式的元素，并且约定，在一个行列式里，把横排叫作行，纵排叫作列. 显然，三阶行列式有以下特点：

(1) 三阶行列式由 3^2 个元素所组成，它表示代数和.

(2) 代数和中每一项都是取自不同行、不同列的三个元素的乘积，而且代数和中包括所有这样的项.

(3) 每一项中三个元素的行标全是按自然顺序排列. 三个正项的列标构成的排列分别为 123，231，312，全是偶排列；三个负项的列标构成的排列分别为 321，132，213，全是奇排列.

分析一下二阶行列式也会发现完全类似的规律，我们根据这个规律来定义 n 阶行列式.

定义 1.5 由 n^2 个元素 $a_{ij}\,(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，其中横排称为行，纵排称为列. 它表示所有取自不同行、不同列的 n 个元素乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$（其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 为 n 级排列）的代数和，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时该项取正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时该项取负号，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

行列式可简记为 $|a_{ij}|$. n 阶行列式共 $n!$ 项，其中正负各占一半（不包括元素本身的符号）.

一阶行列式 $|a_{11}|$ 就是 a_{11}，不要混同于绝对值.

例 3 选择 k,l 使 $a_{13}a_{2k}a_{34}a_{42}a_{5l}$ 成为 5 阶行列式 $|a_{ij}|$ 中带负号的项.

解 因行列式中的项要取自不同行、不同列，所以 k 和 l 只能取 1 或 5.

若 $k=5,l=1$，则该项列标构成的排列为 35421，是偶排列，故该项取正号.

若 $k=1,l=5$，则该项列标构成的排列为 31425，是奇排列，故该项取负号.

所以 k 取 1，l 取 5.

例 4 计算四阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & e & f & 0 \\ g & 0 & 0 & h \end{vmatrix}.$$

解 根据定义 1.5，D 是一个 $4!=24$ 项的代数和. 然而在这 24 项中除了 $acfh$，$adeh$，$bcfg$，$bdeg$ 外，其余各项中至少有一个 0，因而等于 0. 与上面 4 项对应的列标排列分别为 1234 偶排列、1324 奇排列、4231 奇排列、4321 偶排列.

所以行列式 $D=acfh-adeh-bcfg+bdeg$.

例 5 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2012 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2013 \end{vmatrix}.$$

解 此行列式刚好只有处在不同行、不同列的 n 个非零元素 $a_{1(n-1)},a_{2(n-2)},\cdots,a_{(n-1)1}$，$a_{nn}$，故非零项只有一项 $a_{1(n-1)}a_{2(n-2)}\cdots a_{(n-1)1}a_{nn}$，该项所带符号为 $(-1)^{\tau[(n-1)(n-2)\cdots 1n]}=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$，因此 $D=(-1)^{\frac{(2013-1)(2013-2)}{2}}1\times2\times\cdots\times2012\times2013=2013!$.

例 6 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ii}\neq 0(i=1,2,\cdots,n)$.

解 根据定义 1.5，$D=\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$，在上面的代数和中只有当 $j_1=1,j_2=2,\cdots,j_n=n$ 时，乘积$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$才不等于零，因此

$$\begin{aligned} D&=(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \\ &=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}. \end{aligned}$$

一个行列式中从左上角到右下角的连线称为主对角线. 主对角线以上元素 $a_{ij}(i<j)$ 全为零的行列式称为下三角形行列式，主对角线以下元素 $a_{ij}(i>j)$ 全为零的行列式称为上三角形行列式，它们统称为第Ⅰ型三角形行列式.

由上例知，第Ⅰ型下三角形行列式等于主对角线上元素的乘积. 同理可得第Ⅰ型上三角形行列式也等于主对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

主对角线以外元素全为零的行列式称为对角形行列式. 作为第Ⅰ型三角形行列式的特例，对角形行列式也等于主对角线上元素的乘积，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}.$$

一个行列式中从右上角到左下角的连线称为次对角线或虚对角线，次对角线以上元素 a_{ij} 全为零的行列式称为第Ⅱ型下三角形行列式，次对角线以下元素 a_{ij} 全为零的行列式称为第Ⅱ型上三角形行列式，它们统称为第Ⅱ型三角形行列式. 下面用定义计算它们的值.

例 7 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{(n-1)2} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 由定义知，D 中不为零的项只有 $a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{(n-1)2}a_{n1}$，它前面的符号为

$$(-1)^{\tau[n(n-1)\cdots 21]}=(-1)^{(n-1)+(n-2)+\cdots+1}=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

故
$$D=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}a_{1n}a_{2n-1}\cdots a_{n-12}a_{n1}.$$

即第Ⅱ型下三角形行列式等于次对角线上元素乘积冠以符号$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$. 同理可得第Ⅱ型上三角形行列式也等于次对角线上元素乘积再冠以符号$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

由于数的乘法满足交换律，所以 n 阶行列式的一般项也可以写作 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$，其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列. 那么，决定该项的符号可按以下两种方法处理：第一种先将行标按自然顺序排列，再按列标构成排列的奇偶性决定正负号；第二种则是按下面定理直接进行.

定理 1.3 设有 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$，则 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 前所带符号为$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$，其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列.

证 为了确定 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 前面的符号，可先将其行标按自然顺序排列，使其成为 $a_{1j'_1}a_{2j'_2}\cdots a_{nj'_n}$，故其符号应为$(-1)^{\tau(j'_1j'_2\cdots j'_n)}$.

设从 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 到 $a_{1j'_1}a_{2j'_2}\cdots a_{nj'_n}$ 行标进行了 s 次对换，则列标也进行了相同次数的对换，故 $\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)$与 $\tau(123\cdots n)+\tau(j'_1j'_2\cdots j'_n)$的奇偶性相同，从而

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}&=(-1)^{\tau(12\cdots n)+\tau(j'_1j'_2\cdots j'_n)}\\&=(-1)^{\tau(j'_1j'_2\cdots j'_n)},\end{aligned}$$

所以 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 的符号为$(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$.

由定理 1.3 很容易得到下面推论.

推论 1 设有 n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$，则

$$D=\sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

例 8 若 $a_{i1}a_{24}a_{43}a_{k2}$ 是四阶行列式$|a_{ij}|$中前面冠以负号的项，则 i,k 各是多少？若它是前面冠以正号的项，则 i,k 又各是多少？

解 $a_{i1}a_{24}a_{43}a_{k2}$ 前面所带符号决定于 $\tau(i24k)+\tau(1432)$，i 与 k 为 1 和 3，或 3 和 1.

当 $i=1,k=3$ 时，$\tau(1243)+\tau(1432)=4$；

当 $i=3,k=1$ 时，$\tau(3241)+\tau(1432)=7$.

所以，若 $a_{i1}a_{24}a_{43}a_{k2}$ 前面冠以负号，则 $i=3,k=1$；若 $a_{i1}a_{24}a_{43}a_{k2}$ 前面冠以正号，则 $i=1,k=3$.

§1.3 行列式的性质

行列式计算非常重要，但是用定义计算行列式的方法一般不采用，因为这时要计算 $n!$ 个乘积，且每个乘积中又有 n 个元素相乘，共需作 $n!\times(n-1)$ 次乘法，当 n 较大时相当麻烦，它只在行列式中零元素较多且只需要计算 1～2 项时才用. 本节我们将寻求新的较为简便的计算行列式的方法，为此先介绍行列式的有关性质.

一、行列式性质

定义 1.6 将行列式 D 的行和列互换后得到的新行列式称为原行列式 D 的转置行列式，记作 D^{T} 或 D'，即若

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

例如，若 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$，则 $D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix}$.

在 D^{T} 中元素的下标已不代表其所处的真正位置，第一个下标代表其所在列，第二个下标代表其所在行.

D^{T} 的转置为 D.

性质 1 行列式转置，其值不变，即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

证 设 $D=|a_{ij}|$，$D^{\mathrm{T}}=|b_{ij}|$.

将 D^{T} 按上节定理 1.3 的推论计算，则

$$\begin{aligned} D^{\mathrm{T}} &= \sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)} b_{i_1 1} b_{i_2 2}\cdots b_{i_n n} \\ &= \sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)} a_{1i_1} a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}, \end{aligned}$$

恰好为 D 按定义 1.5 计算所得，故 $D=D^{\mathrm{T}}$.

性质 1 表明，在行列式中行与列的地位是对称的. 因此，凡是有关行的性质，对列也同样成立. 以下性质只对行进行证明，对列不再重复证明.

性质 2 用常数 k 乘行列式的某一行(列),等于用 k 乘此行列式.

证 设
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$
$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

由定义 1.5 知
$$\begin{aligned} D_1 &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (ka_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\ &= k \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\ &= kD. \end{aligned}$$

此性质说明行列式某一行(列)的公因子可以提到行列式前面.

推论 2 若行列式某行(列)元素全为零,则行列式的值等于零.

证 设行列式 D 的第 i 行元素全为零. 用数 2 乘其第 i 行的元素,则由性质 2 可知所得行列式的值为 $2D$;但另一方面 D 的值并没有变,因此 $2D=D$,故 $D=0$.

性质 3 行列式具有分行(列)可加性,即若
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1}+c_{i1} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$
$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$
$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$
则
$$D=D_1+D_2.$$

证 由定义 1.5,得

$$
\begin{aligned}
D &= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots (b_{ij_i} + c_{ij_i}) \cdots a_{nj_n} \\
&= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} (a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n}) \\
&= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots b_{ij_i} \cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots c_{ij_i} \cdots a_{nj_n} \\
&= D_1 + D_2.
\end{aligned}
$$

此性质指的是行列式可按某一行(列)拆成其他行(列)都不变的两个行列式.

需要注意的是,一般来说下式是不成立的:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

例如,
$$\begin{vmatrix} 3+1 & 2-2 \\ -1+2 & 3+0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 12,$$

而
$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (9+2)+(0+4)=15,$$

因此
$$\begin{vmatrix} 3+1 & 2-2 \\ -1+2 & 3+0 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

以上情况对 n 阶行列式也会出现,务请大家注意.

性质 4 若行列式两行(列)元素对应相同,则行列式值为零.

证 设行列式
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

其中 $a_{ij}=a_{kj}\ (j=1,2,\cdots,n)$. 按定义 1.5,则

$$D= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}.$$

要证 $D=0$,只需证明上式右端所出现的项全能两两抵消即可.

事实上,与项 $a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}$ 同时出现的项还有 $a_{1j_1} \cdots a_{ij_k} \cdots a_{kj_i} \cdots a_{nj_n}$,因 $a_{ij_i} = a_{kj_i}$,$a_{kj_k}=a_{ij_k}$,故这两项数值相等. 但前者所带符号为 $(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_i \cdots j_k \cdots j_n)}$,后者所带符号为 $(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_k \cdots j_i \cdots j_n)}$,两者符号正好相反,故 $a_{1j_1} \cdots a_{ij_i} \cdots a_{kj_k} \cdots a_{nj_n}$ 与 $a_{1j_1} \cdots a_{ij_k} \cdots a_{kj_i} \cdots a_{nj_n}$ 可以抵消. 即在行列式 D 所表示的代数和中,每一项都有一数值相同但所带符号相反的项与之成对出现,从而行列式为零.

性质 5 若行列式中两行(列)成比例,则行列式的值为零,即