高等职业教育“十二五”规划教材

高等数学及其应用

王振吉 王 斌 主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

高等职业教育“十二五”规划教材

高等数学及其应用

主　编　王振吉　王　斌
副主编　张　军　封　梅
主　审　于文国

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书依据教育部制定的《高职高专高等数学课程教学基本要求》，充分考虑高职高专医药、化工类专业人才培养计划标准，结合编写人员课程建设与教学改革研究成果，吸收其他院校数学课程教学改革成功经验，经过教材编写组成员几年来深入研讨编写而成.

本书内容主要包括：函数与极限，导数、微分及其应用，不定积分、定积分及其应用，微分方程及其应用 4 个模块及数学实验等. 本书中每节附有练习题，每章附有内容小结和复习题. 考虑高职数学课程教学目标要求，例题及练习题设置了一定量的专业应用问题，结合现代化教学要求，配备了相应的数学课件.

本书可作为高职高专工科类各专业数学教材，也可作为专接本的学习参考教材.

图书在版编目（CIP）数据

高等数学及其应用/王振吉，王斌主编. —北京：北京理工大学出版社，2012.8
ISBN 978－7－5640－6416－7

Ⅰ. ①高…　Ⅱ. ①王…　②王…　Ⅲ. ①高等数学－高等职业教育－教材　Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2012）第 179666 号

出版发行 /北京理工大学出版社
社　　址 /北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 /100081
电　　话 /（010）68914775（办公室）　68944990（批销中心）　68911084（读者服务部）
网　　址 /http://www.bitpress.com.cn
经　　销 /全国各地新华书店
印　　刷 /北京兆成印刷有限责任公司
开　　本 /710 毫米×1000 毫米　1/16
印　　张 /14
字　　数 /320 千字
版　　次 /2012 年 8 月第 1 版　2012 年 8 月第 1 次印刷
印　　数 /1～4000 册
定　　价 /29.80 元

责任编辑 /陈莉华
责任校对 /周瑞红
责任印制 /王美丽

图书出现印装质量问题，本社负责调换

前　言

高等职业技术教育承担着为生产、管理、服务一线培养专科层次高素质技能型人才，以及培养将来成为生产一线发现问题、解决问题的技术能手和生产组织管理人员的主要任务.本书充分考虑专科层次定位、高职类别特点、专业需求标准、学生生源状况、数学学习认知规律等重要因素，以实现数学课程在高职工科类人才培养计划中的功能和价值.高等数学及其应用是高职工科类各专业的一门主干公共基础课程，是工科类各专业人才培养的基础，是对学生能力提升、素质培养的重要课程.

本书编写基于以下几点考虑：

(1) 高职数学课程的基本定位：以数学为本，强化服务，统筹功能；

(2) 高职数学课程的教学理念：以问题为主线，学生为主体，应用为重点，能力为本位；

(3) 高职数学课程的体系构建及教学内容选取原则：使数学课程教学与后续课程相衔接，与专业建设相融合，对专业人才培养目标实现有支撑，对职业能力提升有帮助.

在本书编写过程中，努力体现以下特色：

(1) 内容模块化.本书结构分为函数与极限，导数、微分及其应用，不定积分、定积分及其应用，微分方程及其应用 4 个教学模块.内容模块化体系便于根据专业人才培养计划需求或后续课程需要，在教学过程中对内容进行剪裁、不同侧重和不同要求；也便于根据教学目的与学生接受能力将模块划分为基本要求、一般要求、较高要求，可实现分层教学与分层考核.以内容模块化体系搭建的知识和方法平台，便于分析和解决实际应用问题.

(2) 以问题为主线.围绕问题进行教学，主要通过问题解决与问题驱动两种配套途径来实施以问题为主线的教学理念.问题解决在于强调知识的来龙去脉，数学主要概念的引入和提出，尽力通过学生能够接受的、最好用学生感兴趣或熟知的实际问题作为引例，在此前提下，使问题回归自然和本源，寓概念形成于实例的分析、解决过程之中，突出知识产生教学过程中数学思想方法和数学能力的培养；同时，在概念、定理、公式等相对完整知识体系形成之后，不仅要通过理论化形式的例题练习，更要适度设置实际问题分析求解，使落脚点放在解决实际问题的应用上，贯彻以应用为重点的教学理念.本书中设置了一定量的“观察”“思考”等训练，旨在遗弃教师灌输式的讲解，形成在教师主导下的师生共同参与的问题探索解决过程，使学生亲身体验到自己发现问题，获取知识的乐趣，激起他们的求知欲和创造欲，以问题驱动形成知识体系，促使以学生为主体、能力为本位教学理念的落实.

(3) 考虑专业背景，注重数学应用.依据应用为重点的高职数学教育观，本书通过引例、例题、课后练习题以及实训应用题等途径，强化数学应用，尤其注意了贴近专业背景，考虑专业需求，以便于数学课程与后续课程相衔接.运用数学的知识和方法表达或解释实际和专业问题，提高应用数学的知识和方法分析解决实际问题的能力，切实实现数学课程在专业人才培养目标中的地位和作用.

(4) 淡化理论，强化直观.依据高职专业人才培养目标要求与数学课程教学目的，本书尽量避免不必要的理论证明和推导，避免对职业能力培养、数学应用价值不大的那些不必要的解析推导，不过分强调知识的逻辑体系，加强“直观”教学，尽量将抽象的理论利用几何图像观察

或数值分析使问题直观化、简单化.

(5) 侧重计算方法的掌握,避免繁杂的数学运算.随着计算机的广泛应用,考虑数学现代发展趋势,改变以数学运算为基本能力和主要教学目的,以题型为中心的传统数学教学观,侧重计算方法的掌握,避免繁杂而又价值不大的单纯数学运算、例题、作业题及复习题等,以理解概念、掌握方法及数学应用能力培养为主要目的,同时将较简单的数学实验融入教材,使之不断适应现代科学技术发展的需要.

本书第1、2章由张军、封梅老师编写,第3、4、5、6、7章及数学实验由王振吉、王斌老师编写,王振吉、王斌老师承担了本书大纲的制定、内容体系构建及全书的统稿工作.多媒体电子课件由本书编写组集体制作完成.由于编者水平所限,书中若有不妥之处,敬请同仁和读者批评指正.

编　者

目　　录

第1章　函数

函数关系是刻画变量之间相互关系的数学模型，函数概念是现代数学最重要的概念之一，微积分是在实数范围内，以函数为主要研究对象的基础学科. 本章将在中学学习的基础上，进一步系统学习函数的相关概念和性质，并运用这些知识解决一些实际问题，为微积分的学习和应用奠定基础.

§1.1　函数概念

1.1.1　函数定义

在对自然现象与社会现象的观察与研究过程中，人们会碰到许多用来表示不同事物的量，通常可将它们分为两类：一类是在问题的研究过程中保持不变的量，称之为常量；一类是在问题的研究过程中会出现变化，即可以取不同值的量，称之为变量.

例如，学校的体育馆的面积是保持不变的，是常量；而每天来体育馆打球的人数不尽相同，因而是变量.

又如，将一密闭的容器中的气体进行加热，在加热过程中，容器中气体的体积，分子数保持不变，是常量，而气体的温度、容器内的气压在不断变化，是变量.

在研究实际问题的过程中，经常出现有两个变量，并且它们在变化过程中，不仅是相互联系的，而且彼此间还遵循一定的变化规律.

下面举例说明.

【引例1】 在自由落体运动中，设物体下落的时间为 t，下落的距离为 s，如果开始下落的时刻 $t=0$，那么 s 和 t 之间的变化规律由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2\text{（}g\text{ 为重力加速度）}$$

表示，若物体到达地面的时刻 $t=T$，则在时间区间 $[0,T]$ 上任取一个数值时，由上面的公式都可以确定出 s 的对应值.

【引例2】 某容器中装有质量为 M 的酒精，由于封闭不严产生挥发，酒精的挥发量与时间 t 成正比，则经过时间 t 之后容器中剩余的酒精质量为

$$m=M-kt(t>0).$$

上面两个引例的实际意义虽然不同，但就数学角度而言，每个引例所描述的变化过程都有

两个变量,当其中一个变量在某取值范围内取定一个数值时,按照某种对应规律,另一变量都有确定的数值与之相对应,两个变量之间的这种对应关系称为函数关系.

【定义 1】 设有两个变量 x 和 y,当变量 x 在实数集 D 内取得某一数值时,如果依照某种对应法则 f,变量 y 都有确定的数值与之对应,则称变量 y 为变量 x 的函数,记作 $y=f(x)$.其中 x 叫作自变量,y 叫作函数或因变量,数集 D 叫作函数的定义域,当 x 取遍 D 的各个数值时,对应的函数值全体组成的数集 M 叫作函数的值域.

如果对于 D 中的每个 x 的取值,y 都有唯一的值与之相对应,称这样的函数为**单值函数**;如果对于 D 中的每个 x 的取值,y 有两个或两个以上不同的值与之相对应,称这样的函数为**多值函数**.

本教材主要研究单值函数.

在函数定义中,并未要求对于自变量不同的取值,函数的对应值一定不同. 比如 $y=c$,当 x 在$(-\infty,+\infty)$内取任意值时,y 都有确定的值 c 与之对应. 称这样的函数为**常函数**.

由函数定义可以看出,函数的定义域和对应法则是确定函数的两大要素,当且仅当**两个函数的定义域和对应法则均相同时,它们才是相同的函数.**

例如,函数 $y=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$ 与函数 $y=x+2$ 的定义域不同,它们是不同的函数.

思考:定义域、值域、对应法则哪个对确定函数有决定作用? 两个函数相同的充要条件是什么?

1.1.2 函数的表示法

表示函数的方法,常用的有:公式法、图像法和表格法.

1. 公式法

用数学解析式表示两个变量之间对应关系的方法称为公式法(解析法). 如

$$y=\frac{\sqrt{x+2}}{x},\quad x^2+y^2=1.$$

在用公式法表示函数关系时,称型如 $y=f(x)$表示的函数叫显函数.

如某种细菌繁殖个数 N 与时间 t 呈指数生长规律

$$N(t)=N_0 e^{\frac{t}{T_c}}$$

其中 N_0 为繁殖开始时的细菌数,T_c 为生长周期,均为正的常数.

如果因变量 y 与自变量 x 的对应关系是由一个含有 x 和 y 的二元方程的形式 $F(x,y)=0$ 所确定,这样的函数叫作**隐函数**. 比如由方程 $x^2+y^2=1$ 确定的函数 y.

有些函数在整个定义域范围内,可以用一个数学式来表示,但有些函数在其定义域的不同范围内用不同数学式表示,这类函数我们称之为**分段函数**.

例如,有人根据在一项生理研究中测得血液中胰岛素浓度 $c(t)$(单位/毫升)与时间 t(分钟)的变化数据,建立了如下经验公式,其中 k 为常数.

$$c(t)=\begin{cases} t(10-t), & 0\leqslant t\leqslant 5,\\ 25e^{-k(t-5)}, & t>5. \end{cases}$$

注：(1) 求分段函数的函数值时，必须将自变量的值代入它所对应的解析式计算.

(2) 分段函数是一个函数，也是单值函数.

2. 图像法

在坐标系中用图形来表示两个变量之间对应关系的方法称为图像法. 如：股市走向图(如图 1-1)；一天中的气温记录显示图；与心脏有关的电流随时间变动的心电图，等等.

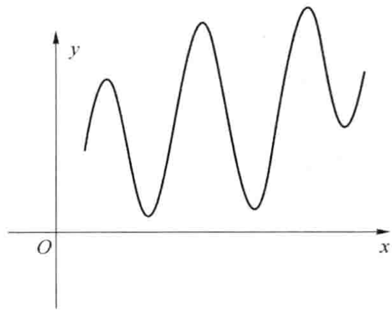

图 1-1

3. 表格法

将自变量的值与对应的函数值列成表格表示函数关系的方法称为表格法.

如某一住院病人六天内的体温状况记录如表 1-1 所示：

表 1-1

时间/天	1	2	3	4	5	6
体温/℃	40	39	37.4	38.5	38	37.2

三种表示方法各有特点，有时一个问题只能用某一种方法表示，有时可以用三种表达方式，有时为解决问题又可以从一种形式转化成另一种形式.

思考：某种笔记本的单价是 5 元，买 $x(x\in\{1,2,3,4,5\})$ 个笔记本需要 y 元. 试用函数的三种表示法表示函数 $y=f(x)$.

1.1.3　函数定义域的确定

由于函数的定义域是函数的两要素之一，所以在研究函数关系时，一定要考虑自变量的取值范围，即函数的定义域.

对于用数学解析式给出的函数，自变量与函数均无实际意义，此时，函数的定义域即为使解析式有意义的自变量的取值范围. 为此我们要求：

(1) 分母不能为零；

(2) 偶次根号下非负；

(3) 对数的真数为正；

(4) 正切函数自变量不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$；

(5) 余切函数自变量不等于 $k\pi$；

(6) 反正弦、反余弦函数的自变量部分的绝对值小于等于 1.

【例 1】 求下列函数的定义域

(1) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$;(2) $y=\lg(x^2-x-2)$;(3) $y=\arccos\dfrac{2x-1}{3}$.

解 (1) 在函数 $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x-2}$ 中,

因为 $\begin{cases}x+1\geqslant 0\\ x-2\neq 0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x\geqslant -1\\ x\neq 2\end{cases}$

所以,函数的定义域为$[-1,2)\cup(2,+\infty)$.

(2) 在函数 $y=\lg(x^2-x-2)$中,

因为 $(x^2-x-2)>0$,即 $(x+1)(x-2)>0$, 解得 $x<-1$ 或 $x>2$.

所以,函数的定义域为$(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

(3) 在函数 $y=\arccos\dfrac{2x-1}{3}$ 中 ,

因为 $-1\leqslant\dfrac{2x-1}{3}\leqslant 1$,即 $-2\leqslant 2x\leqslant 4$, 解得 $-1\leqslant x\leqslant 2$.

所以函数的定义域为$[-1,2]$.

对于由实际问题确定的函数,其定义域需要由问题本身的实际意义来确定.(这里不再举例说明,可参阅§1.3 节内容)

1.1.4 函数的几种特性

1. 函数的奇偶性

【定义 2】 设函数 $y=f(x)$的定义域 D 关于原点对称,若对任意 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为偶函数;如果对于任意 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为奇函数.

例如,函数 $y=x^2$,$y=\cos x$ 是偶函数,$y=\dfrac{1}{x}$,$y=\tan x$ 是奇函数.

偶函数的图像关于 y 轴对称;奇函数的图像关于原点对称(图 1-2;图 1-3).

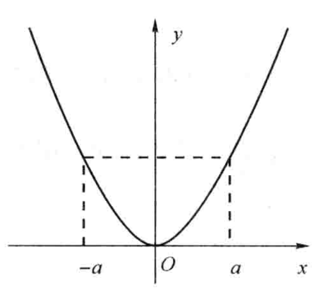

图 1-2

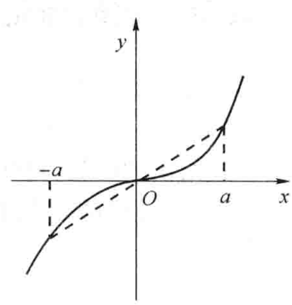

图 1-3

【例 2】 判断函数 $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}$的奇偶性.

解　因为 $x\in(-\infty,+\infty)$且 $f(-x)=\dfrac{2^{-x}-2^{x}}{2}=-f(x)$,所以该函数是奇函数.

2. 函数的单调性

【定义 3】　设函数 $y=f(x)$在区间(a,b)内有定义,如果对于(a,b)内任意两点 x_1 及 x_2,当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内单调增加,(a,b)叫作函数 $f(x)$的单调增区间;如果当 $x_1<x_2$ 时,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称函数 $f(x)$在区间(a,b)内单调减少,(a,b)叫作函数 $f(x)$的单调减区间.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数,单调增加和单调减少的区间统称为单调区间.

例如,函数 $y=2^x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内单调增加;函数 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 在区间$(-\infty,+\infty)$内单调减少. 函数 $y=x^2$ 在$(-\infty,0)$内单调减少,在$(0,+\infty)$内单调增加.

单调增加函数的图像沿 x 轴正向而上升(图 1-4),单调减少函数的图像沿 x 轴正向而下降(图 1-5).

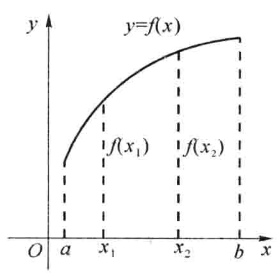

图 1-4

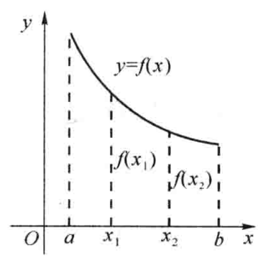

图 1-5

【例 3】　证明 $f(x)=x^2$ 在$(0,+\infty)$内单调增加.

证明　在$(0,+\infty)$内任取两点 x_1、x_2 并且设 $x_1<x_2$,因为

$$f(x_2)-f(x_1)=x_2^2-x_1^2=(x_2-x_1)(x_2+x_1)$$

又　$x_1>0$, $x_2>0$, $x_1<x_2$,

所以　　$f(x_2)-f(x_1)=(x_2-x_1)(x_2+x_1)>0$,

于是,$f(x)=x^2$ 在$(0,+\infty)$内单调增加.

思考:如何证明 $f(x)=x^2$ 在$(-\infty,0)$内单调减少?

用单调性的定义判定函数的单调性和单调区间一般比较困难,更有效的判断方法将在之后的学习中介绍.

3. 函数的周期性

【定义 4】　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D,如果存在一个不为零的数 T,使得对于任一 $x\in D(x\pm T\in D)$, 恒有

$$f(x+T)=f(x)$$

成立,则称 $f(x)$为周期函数. T 称为 $f(x)$的周期. 如果在所有周期中存在最小的正数,其中的最小正数 T 称为周期函数的最小正周期,简称为周期. 通常所说的周期函数的周期是指最小正周期.

例如，函数 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 是以 2π 为周期的函数；函数 $y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 是以 π 为周期的函数.

周期函数图形的特点是自变量增加或减少距离 $|T|$ 后，图形重复出现.

4. 函数的有界性

【定义 5】 设函数 $y=f(x)$ 在数集 D 内有定义，若存在一个正数 M，使得对于任一 $x\in D$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 D 内有界. 如果这样的 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在 D 内无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的，函数 $y=\arctan x$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内有界；而函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界，$y=\tan x$ 在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内无界.

思考：具有下列特性的函数其图像有什么特征？

① 单调性；② 奇偶性；③ 有界性；④ 周期性.

习题 1.1

1. 下列各组中所给的函数是否相同？为什么？

(1) $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ 与 $y=x-2$；　(2) $y=|x|$ 与 $y=\sqrt{x^2}$；

(3) $y=\lg x^2$ 与 $y=2\lg x$；　(4) $y=\lg x^3$ 与 $y=3\lg x$；

(5) $y=\cos x$ 与 $y=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

2. 已知 $f(x)=|x-4|-4$，求 $f(-4)$，$f(0)$，$f(4)$.

3. 已知 $f(x)=\sqrt[3]{1-x^2}$，求 $f(0)$，$f(1)$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$，$f(x+h)$.

4. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{3-2x}$；　(2) $y=\dfrac{2x}{x^2-3x+2}$；　(3) $y=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$；

(4) $y=\dfrac{\sqrt{x+1}}{x^2-5x+6}$；　(5) $y=\arcsin(1-3x)$；　(6) $y=\dfrac{x}{\tan x}$.

5. 若 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，求 $f(\lg x)$ 的定义域.

6. 下列函数中哪些是偶函数？哪些是奇函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $f(x)=x-\sin x$ ；　(2) $f(x)=x^2+\cos x$；

(3) $f(x)=\dfrac{2^x+2^{-x}}{2}$ ；　(4) $f(x)=\tan x-x^2$；

(5) $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ ；　(6) $f(x)=\sin(\lg x)$.

7. 下列函数中哪些是周期函数？如果是周期函数，指出其最小正周期.

(1) $y=3\sin(2x-\pi)$；　(2) $y=x^2+1$；

(3) $y=\tan(x-1)$；　(4) $y=|\sin x|$.

§1.2 初等函数

1.2.1 基本初等函数

我们已学过五类函数：

幂函数 $y=x^a$ （a 是常数）.

指数函数 $y=a^x$（a 是常数，$a>0$ 且 $a\neq 1$）.

对数函数 $y=\log_a x$（a 是常数，$a>0$ 且 $a\neq 1$）；

三角函数 $y=\sin x$；$y=\cos x$；$y=\tan x$；

$y=\cot x$；$y=\sec x$；$y=\csc x$.

反三角函数 $y=\arcsin x$；$y=\arccos x$；

$y=\arctan x$；$y=\mathrm{arccot}\, x$.

以上函数统称为**基本初等函数**.

基本初等函数的定义域、值域、图像和性质见附录表.

1.2.2 反函数

在研究实际问题时，函数关系中自变量与因变量的地位是相对的. 如一辆汽车在某段时间内，以 80 km/h 的速度做匀速直线运动，其运动规律为 $s=80t$. 若已知 $t=2$ h，可得 $s=160$ km；反之，若已知 $s=240$ km，也可以从 $s=80t$ 中求得 $t=3$ h.

【定义 1】 设有函数 $y=f(x)$，其定义域为 D，值域为 M. 如果对于 M 中的每一个 y 值（$y\in M$），都可以从关系式 $y=f(x)$ 确定唯一的 x 值（$x\in D$）与之相对应，那么所确定的以 y 为自变量的函数 $x=\varphi(y)$（或 $x=f^{-1}(y)$）叫作函数 $y=f(x)$ 的反函数，它的定义域为 M，值域为 D.

习惯上，函数的自变量都以 x 表示，所以，反函数通常表示为 $y=f^{-1}(x)$.

例如，函数 $y=\sin x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，则 $x=f^{-1}(y)=\arcsin y, y\in[-1,1]$，故 $y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数是 $y=\arcsin x, x\in[-1,1]$.

若把函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像画在同一平面直角坐标系内，那么这两个图像关于直线 $y=x$ 对称.

想一想：(1) 为什么说，在定义区间上的单调函数必存在反函数？

(2) 函数与其反函数的定义域、值域的关系是怎样的？

若 $y=f(x)$ 存在反函数时，一般要确定 $y=f(x)$ 的反函数，只需先从 $y=f(x)$ 中解出 x 的表达式，再将其中的字母 x,y 进行交换即可.