海文考研
万学教育
www.wanxue.cn

2014版

遥遥领先的中国考研培训卓越领袖品牌
您的满意是我们唯一和全部的追求

考研数学基础教程

—万学海文名师团队 编著—

蔡子华 丁 勇 李 铮 苏德矿
铁 军 邬丽丽 赵达夫 张震锋

(按姓氏字母为序)

1.高等数学 2.线性代数
3.概率论与数理统计

内部教程

中国书籍出版社
China Book Press

海文考研

万学·海文

考研数学基础教程

万学海文名师团队 编著

中国书籍出版社
China Book Press

图书在版编目(CIP)数据

考研数学基础教程 / 万学海文名师团队编著. – 北京：中国书籍出版社, 2012.6

ISBN 978-7-5068-2853-6

Ⅰ.①考… Ⅱ.①万… Ⅲ.①高等数学 – 研究生 – 入学考试 – 自学参考资料 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2012)第109624号

责任编辑 / 宋　然 任燕萍

责任印制 / 孙马飞 张智勇

封面设计 / 冯　胜

出版发行 / 中国书籍出版社

地址：北京市丰台区三路居路97号（邮编：100073）

电话：（010）52257143（总编室）（010）52257153（发行部）

电子邮箱：chinabp@vip.sina.com

经　　销 / 全国新华书店

印　　刷 / 北京飞达印刷有限责任公司

开　　本 / 787毫米 × 1092毫米　1/16

印　　张 / 19.5

字　　数 / 510千字

版　　次 / 2012年7月第1版　2012年7月第1次印刷

书　　号 / ISBN 978-7-5068-2853-6

定　　价 / 35.00元

万学海文考研数学图书教材编委会

编　　著：万学海文名师团队

编委成员：（按姓氏字母为序）

蔡子华　柴华岳　陈建锋　陈湘华

丁　勇　李家雄　李兰巧　李　铮

马　媛　乔红端　苏德矿　铁　军

王彩霞　王　丹　王红广　邬丽丽

叶盛标　张利华　张同斌　张震峰

赵达夫　诸炜鑫

致2014届考研学员的一封信

各位考研2014届学员：

从今天开始，您们将开启考研数学复习的漫长而艰苦的过程。考研成功是我们共同的心愿！但是，在研究生考试竞争力很大的情况下，要想达到我们共同的目标，我们需要对全年的复习进行总体规划，科学合理地组织复习，注重学习效率。在考研复习的三大阶段（即基础、强化、冲刺）中，基础阶段尤为重要。为了让大家复习的效果更佳，我们组织了多年参加研究生入学考试命题和阅卷的老师，编写了这本《考研数学基础教程》，作为2014届学员的一份丰厚的礼物。

《考研数学基础教程》作为基础阶段所使用的讲义，各位学员在复习的过程中，需要注意以下几点：

第一，明确目标。基础阶段数学复习的目标包括：1. 对照大纲内容与要求，先从基本内容入手，对概念、公式、性质、定理要全面复习，熟悉并掌握基本概念、基本理论和基本方法，也就是熟悉“三基本”；2. 通过做典型例题加深对基本概念、基本理论的理解，掌握基本解题方法；3. 通过做经典习题提高逻辑推理能力、计算能力以及综合解题能力，为强化阶段打下坚实的基础。

第二，抓住重难点。在考研数学复习的基础阶段，要做到系统全面的复习，但是也要突出重点内容。大纲要求中对概念、理论有理解和了解两个层次的要求，对方法有掌握、会（能）两个层次的要求，一般来说，要求理解的概念、理论以及要求掌握的方法是考试的重点。我们这里所说的突出重点，不仅要在主要的概念、理论和方法上多下功夫，更重要的是要去寻找重点内容与次要内容之间的联系，以主带次，用重点内容提挈整个内容。

第三，勤做笔记。在基础阶段具体内容的复习主要是大纲要求的基本知识点。在学习基本内容时，对于重点的概念、定理或解题方法要作出标记，进行重点记忆，并加强练习；做典型例题时要进行总结，总结这道题所涉及到的知识点，从而加深对知识点的理解与记忆。

第四，了解课程功能。万学教育给各位考研学子全年提供的考研数学课程主要包括基础课程、强化课程、冲刺课程。每种课程的功能是不同的，了解这些课程的功能对于考研数学的复习十分有利。基础课程帮助考生系统全面复习大纲要求的知识点，夯实基础，掌握基本概念、基本理论、基本方法。强化课程全面、精细地讲解重要题型，剖析各题型的命题规律，使学员积累解题方法。冲刺课程归纳解题技巧，帮助考生提高做题效率。

千里之行，始于足下！数学复习在基础阶段夯实了基础，后期复习驾轻就熟。从基础到强化

再到冲刺阶段，从大纲要求的基本内容到各题型专项突破，这样就可以收放自如，重点难点尽在掌握中！

您的满意是我们唯一且全部的追求！祝愿各位考生金榜题名！

万学海文教学研究中心

2012年5月

目录

高等数学

数学考试根据工学、经济学、管理学各学科和专业对硕士研究生入学所应具备的数学知识和能力的不同要求,将数学统考试卷分为数学一、数学二、数学三.

第一章　函数、极限与连续

一、大纲内容与要求

【大纲内容】

函数的概念及表示法 函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性 复合函数、反函数、分段函数和隐函数 基本初等函数的性质及其图形 初等函数 函数关系的建立 数列极限与函数极限的定义及其性质 函数的左极限与右极限 无穷小量和无穷大量的概念及其关系 无穷小量的性质及无穷小量的比较 极限的四则运算 极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则 两个重要极限:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}.$$

函数连续的概念 函数间断点的类型 初等函数的连续性 闭区间上连续函数的性质.

【大纲要求】

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,并会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

二、知识网络

- 函数
  - 有界性
  - 单调性
  - 奇偶性
  - 周期性
- 极限
  - 极限概念
    - “$\varepsilon - N$”定义
    - “$\varepsilon - X$”定义
    - “$\varepsilon - \delta$”定义
  - 极限性质
    - 唯一性
    - 有界性
      - 数列整体有界
      - 函数局部有界
    - 保号性
  - 求极限的主要方法
    - 1 极限存在准则
      - 夹逼定理
      - 单调有界数列有极限
    - 2 两个重要的极限
      - $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$
      - $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
    - 3 函数的连续性
    - 4 用导数的定义
    - 5 等价无穷小替换
    - 6 洛必达法则
      - $\frac{0}{0}$型、$\frac{\infty}{\infty}$型
      - $\infty-\infty$型、$0\cdot\infty$型
      - 1^∞、∞^0、0^0型
      - 转换
    - 7 泰勒公式
    - 8 用函数极限求数列极限
    - 9 用定积分定义求某些和式的极
    - 10 利用级数相关理论求极限
  - 无穷小量
    - 无穷小量与无穷大量的定义、关系
    - 无穷小量的运算性质
    - 无穷小量与极限的关系
    - 无穷小量的比较
- 连续性
  - 连续的概念
    - 初等函数的连续性
    - 分段函数连续性的判定
    - 闭区间上连续函数的性质
      - 有界性定理
      - 零点定理
      - 最值定理
      - 介值定理
  - 间断点的分类
    - 第一类——左右极限都存在
      - 可去间断点
      - 跳跃间断点
    - 第二类——左右极限中至少有一个不存在

三、基本内容

(一)函数

1. 定义 设 x 与 y 是两个变量, D 是实数集的某个子集,若对于 D 中的每个值 x ,变量 y 按照一定的法则有一个确定的值 y 与之对应,称变量 y 为变量 x 的函数,记作

$$y = f(x).$$

数集 D 称为函数的定义域,由函数对应法则或实际问题的要求来确定,相应的函数值的全体称为函数的值域,对应法则和定义域是函数的两个要素.

2. 几种特性

(1)有界性 设函数 $y = f(x)$ 在数集 X 上有定义,若存在正数 M ,使得对于每一个 $x \in X$,都有

$$|f(x)| \le M$$

成立,称 $y = f(x)$ 在 X 上有界,否则,即这样的 M 不存在,称 $f(x)$ 在 X 上无界. 所以函数在 X 上无界,是对任何 $M > 0$,总存在 $x_0 \in X$,使 $|f(x_0)| > M$.

(2)单调性 设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义,若对于 I 上任意两点 x_1 与 x_2 ,当 $x_1 < x_2$ 时,均有

$$f(x_1) < f(x_2) \quad [\text{或} f(x_1) > f(x_2)],$$

称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(或单调减少). 如果其中的"$<$"(或"$>$")改为"$\leqslant$"(或"$\geqslant$"),称函数 $f(x)$ 在 I 上单调不减(或单调不增).

(3)奇偶性 设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 $(-a,a)(a > 0)$,若对于任一 $x \in (-a,a)$,都有 $f(-x) = f(x)$,称 $f(x)$ 为偶函数,如常数 $C, x^2, \cos x$ 等,其图像关于 y 轴对称;若对于任一 $x \in (-a,a)$, 都有 $f(-x) = -f(x)$,称 $f(x)$ 为奇函数,如 $x, x^3, \sin x$ 等,其图像关于坐标原点对称.

(4)周期性 对函数 $y = f(x)$,若存在常数 $T > 0$,使得对于定义域内的每一个 $x, x+T$ 仍在定义域内,且有 $f(x+T) = f(x)$,称函数 $y = f(x)$ 为周期函数, T 称为 $f(x)$ 的周期.

3. 复合函数、反函数、隐函数与分段函数

(1)基本初等函数与初等函数

基本初等函数　常数函数;幂函数;指数函数;对数函数;三角函数;反三角函数.

初等函数　由基本初等函数经过有限次的加、减、乘、除和复合所得到且能用一个解析式表示的函数.

(2)复合函数　设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f,函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 z_φ,若集合 D_f 与 z_φ 的交集非空,称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,u 为中间变量. 对复合函数,重要的是会把它分解,即知道它是由哪些"简单"函数复合而成的.

(3)反函数　设函数 $y=f(x)$ 的值域为 z_f,定义域为 D_f,则对于每一个 $y\in z_f$ 必存在 $x\in D_f$ 使 $y=f(x)$. 若把 y 作为自变量,x 作为因变量,便得一个函数 $x=\varphi(y)$,且 $f\left[\varphi(y)\right]=y$,称 $x=\varphi(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数,但习惯上把 $y=f(x)$ 的反函数记作 $y=f^{-1}(x)$. $y=f(x)$ 与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

(4)隐函数　设有方程 $F(x,y)=0$,若当 x 在某区间内取任一值,便总有满足该方程唯一的值 y 存在时,称由方程 $F(x,y)=0$ 在上述区间内确定了一个隐函数 $y=y(x)$.

(5)分段函数　若一个函数在其定义域的不同部分要用不同的式子表示其对应规律,如 $f(x)=\begin{cases}\varphi(x),a<x<b\\ \psi(x),c<x<d\end{cases}$ 称为分段函数.

(二)极限

1. 概念

(1)**定义 1**　设 $y=f(x)$ 在 x_0 的一个去心邻域 $(x_0-\delta_1,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta_1)$ 内有定义,若对于任意给定的 $\varepsilon>0$,总存在 $\delta>0$,使得当上述去心邻域内任意 x 满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,不等式 $|f(x)-a|<\varepsilon$ 恒成立,则称常数 a 为函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 的极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$. 或 $f(x)\to a$ (当 $x\to x_0$). 直观地说,即当 x 无限趋近 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限趋近常数 a.

定义 2　设 $f(x)$ 在区域 $|x|>E>0$ 内有定义,若对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 $M>0$,使得当 $|x|>M\geq E$ 时,不等式

$$|f(x)-a|<\varepsilon$$

恒成立,则称a为当$x\to\infty$时函数$f(x)$的极限,记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a.$$

直观地说,即当$|x|$无限增大时,函数无限趋近常数a.

(2)左极限与右极限 在定义 1 中,若把"$0<|x-x_0|<\delta$"改为"$x_0-\delta<x<x_0$",即自变量x从x_0的左侧趋近于x_0,则称a为函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=a\text{或}f(x_0-0)=a;$$

相应把定义 1 中的"$0<|x-x_0|<\delta$"改为$x_0<x<x_0+\delta$,a便是函数$f(x)$当$x\to x_0$时的右极限,记作

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=a\text{或}f(x_0+0)=a.$$

极限存在的充分必要条件:当$x\to x_0$时,函数$f(x)$的极限存在的充分必要条件为其左、右极限存在并相等,即$f(x_0-0)=f(x_0+0)$.

在定义 2 中,把$|x|>M$改为$x>M$,便得到$x\to+\infty$时函数$f(x)$的极限的定义,即$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$,以及把"$|x|>M$"改为$x<-M$,便得到$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$的定义.

注 把数列$\{x_n\}$看作整数函数即$x_n=f(n)$ $(n=1,2,\cdots)$,则数列极限的概念$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$便是$f(x)$在$x\to+\infty$时极限的特殊情况:自变量$x$取正整数.即对于任意给定的$\varepsilon>0$,总存在正整数$N$,使当$n>N$时,不等式$|x_n-a|<\varepsilon$恒成立,则称常数$a$为数列$\{x_n\}$的极限,也称此数列收敛于$a$.

2.性质

(1)唯一性 在自变量的一个变化过程中($x\to x_0$或$x\to\infty$),函数的极限存在,则此极限唯一.

(2)有界性 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$[或$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$],则存在$x_0$的某去心邻域(或$|x|>M>0$),$f(x)$在此邻域(或$|x|>M>0$)内有界.

(3)保号性 设$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=a$,$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}g(x)=b$,若在$x_0$的某去心邻域(或$|x|>M>0$)内恒有

$f(x)<g(x)$（或 $f(x)\le g(x)$），则 $a\le b$.

3.极限存在准则

夹逼准则：若在 x 的某去心邻域（或 $|x|>M>0$）内恒有 $g(x)\le f(x)\le h(x)$，

且 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} g(x)=\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} h(x)=a$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=a.$

单调有界准则：单调有界数列必收敛.

4.两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$ 或 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

5.极限的运算

设在自变量的同一变化过程中（$x\to x_0$ 或 $x\to\infty$），$\lim f(x)=a,\lim g(x)=b$，则有

(1)和差：$\lim\left[f(x)\pm g(x)\right]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=a\pm b$.

(2)积：$\lim\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=a\cdot b$.

特别地，$\lim cf(x)=c\lim f(x)=ca$　（其中 c 为常数），

$\lim\left[f(x)\right]^k=\left[\lim f(x)\right]^k=a^k$（其中 k 为正整数）.

(3)商：若 $\lim g(x)=b\ne 0$，则 $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{a}{b}$.

(4)复合函数的运算法则：已知 $\lim\limits_{u\to u_0} f(u)=A,\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=u_0\Rightarrow$ 在有意义的情况下，

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)]=A.$$

6.无穷小与无穷大

(1)无穷小的概念　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\alpha(x)=0$，称 $\alpha(x)$ 为 $x\to x_0$（$x\to\infty$）时的无穷小，即极限为 0 的变量为无穷小.常数 0 也是无穷小.

(2)无穷小的性质　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=a$ 的充分必要条件为 $f(x)=a+\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 为 $x\to x_0$（$x\to\infty$）的无穷小.

(3)无穷小的运算

1° 加法:有限多个无穷小的和仍为无穷小;

2° 乘法:有限多个无穷小的积仍为无穷小;

3° 有界变量与无穷小的乘积亦为无穷小.

(4)无穷小的比较

设$\alpha(x)$与$\beta(x)$都是在同一个自变量变化过程中的无穷小,且$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$也是在此变化过程中的极限:

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$,称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$高阶的无穷小,记作$\alpha(x)=o(\beta(x))$;

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,称$\alpha(x)$是比$\beta(x)$低阶的无穷小;

若$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$(其中 c 为常数),称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是同阶的无穷小;

特别$\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$,称$\alpha(x)$与$\beta(x)$是等价无穷小,记作$\alpha(x)\sim\beta(x)$.

在求极限过程中,有时利用等价无穷小代换可以化简计算,所以应掌握几个常见的等价无穷小:当$x\to 0$时,

$\sin x\sim x\sim\tan x$, $\ln(1+x)\sim x$, $e^x-1\sim x$, $\sqrt[n]{1+x}-1\sim\dfrac{1}{n}x$, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$等等.

(5)无穷大的概念 设函数$f(x)$在x_0的某一去心邻域内有定义(或$|x|$大于某一正数时有定义),如果对于任意给定的正数M (不论它多么大),总存在正数δ (或正数X),只要x适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$),对应的函数值$f(x)$总满足不等式$|f(x)|>M$,则称函数$f(x)$为当$x\to x_0$(或$x\to\infty$)时的无穷大.

(6)无穷小与无穷大之间的关系

在自变量的同一变化过程中,若$f(x)$为无穷大,则其倒数$\dfrac{1}{f(x)}$必为无穷小;反之,若$f(x)$为无穷小,且$f(x)\neq 0$,则其倒数$\dfrac{1}{f(x)}$必为无穷大.

7.洛必达(L'Hospital)法则

(1)$\left(\dfrac{0}{0}\right)$型 $f(x)$,$g(x)$ 在点x_0的某去心邻域内可导,$g'(x)\neq 0$,若

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞,则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(2) $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ 型　$f(x)$，$g(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内可导,$g'(x)\neq 0$,若

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$,且 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为 ∞,则有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

(三)连续

1.函数的连续性

(1)连续性的概念　设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 某邻域内有定义,若当自变量增量 $\Delta x=x-x_0\to 0$ 时,对应的函数值增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\to 0$,即 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，或 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续.若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$,称函数 $f(x)$ 在 x_0 处左连续, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$,称函数 $f(x)$ 在 x_0 处右连续.

显然,函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续的充分必要条件是 $f(x)$ 在 x_0 处既左连续又右连续.

若函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一处都连续,称 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续,也称 $f(x)$ 是 (a,b) 内的连续函数;若 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续,又在 a 点处右连续, b 点处左连续,则称 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

(2)运算

1° 加法　有限多个在同一点连续的函数之和,仍在该点处连续;

2° 乘法　有限多个在同一点连续的函数之积,仍在该点处连续;

3° 除法　若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在点 x_0 处连续,且 $g(x_0)\neq 0$,则 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在点 x_0 处连续.

(3)复合函数与初等函数的连续性

设函数 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续,且 $\varphi(x_0)=u_0$,若函数 $y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处连续.

一切初等函数在其定义区间上都是连续的.

2.函数的间断点

(1)函数间断点的概念　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义.在此前提下,如果函数 $f(x)$ 有下列三种情形之一:

1° 在 $x=x_0$ 没有定义;

2° 虽在 $x=x_0$ 有定义,但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 不存在;

3° 虽在 $x=x_0$ 有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$,

则函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续,而点 x_0 称为 $f(x)$ 的不连续点或间断点.

(2)函数间断点的类型　设 $x=x_0$ 为函数 $y=f(x)$ 的间断点,若 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在,称 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点,其他均称为第二类间断点.

在第一类间断点中,左、右极限相等的称为可去间断点,不相等的称为跳跃间断点；无穷间断点与振荡间断点都是第二类间断点.

3.闭区间上连续函数的性质

(1)最大值和最小值定理　闭区间上的连续函数一定有最大值与最小值.

(2)有界性定理　闭区间上的连续函数在该闭区间上一定有界.

(3)介值定理　设函数 $f(x)$ 在闭区 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)\neq f(b)$,则对于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一常数 C,必在开区间 (a,b) 内至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=C$.

推论　在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

(4)零点定理　设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号,则在开区间 (a,b) 内至少存在函数 $f(x)$ 的一个零点,即至少有一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$.

四、典型例题

题型一 函数及相关性质

[例 1.1]设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\le 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$______.

[例 1.2]已知 $f(x)=\sin x, f[\varphi(x)]=1-x^2$, 则 $\varphi(x)=$ ________ ,其定义域为________.

[例 1.3]设函数 $f(x)=(\ln x)(\tan x)e^{\sin^2 x}$,则 $f(x)$ 是(　　).

(A)偶函数.　(B)无界函数.　(C)周期函数.　(D)单调函数.

[例 1.4]设对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$ 有 $f(x+1)=-f(x)$,则 $f(x)$ 一定是(　　).

(A)奇函数.　(B)偶函数.

(C)周期函数.　(D)单调函数.

[例 1.5]设函数 $f(x)=\dfrac{|x-1|\tan(x-3)}{(x-1)(x-2)(x-3)^2}$,则 $f(x)$ 在下列哪个区间内有界(　　).

(A) $(0,1)$.　(B) $(1,2)$.　(C) $(2,3)$.　D $(3,4)$.