

数学与人文

· 第十四辑

数学与科学

主 编 丘成桐 刘克峰 杨 乐 季理真
副主编 张顺燕

Mathematics & Humanities

高等教育出版社

数学与人文·第十四辑
Mathematics & Humanities

数学与科学

SHUXUE YU KEXUE

主 编 丘成桐 刘克峰 杨 乐 季理真
副主编 张顺燕

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING
International Press

图书在版编目(CIP)数据

数学与科学 / 丘成桐等主编. — 北京: 高等教育出版社, 2015.1

(数学与人文. 第14辑)

ISBN 978-7-04-041221-5

I. ①数… II. ①丘… III. ①数学-普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第234937号

Copyright © 2015 by

Higher Education Press Limited Company

4 Dewai Dajie, Beijing 100120, P. R. China, and

International Press

387 Somerville Ave., Somerville, MA 02143 U.S.A.

出品人 苏雨恒
总 监 制 吴 向
总 策 划 李冰祥
策 划 赵天夫
责任编辑 赵天夫
书籍设计 王凌波
责任印制 韩 刚

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
印 刷 涿州市星河印刷有限公司
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 11.5
字 数 210千字
版 次 2015年1月第1版
印 次 2015年1月第1次印刷
定 价 25.00元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换

版权所有 侵权必究

物 料 号 41221-00

内 容 简 介

《数学与人文》丛书第十四辑将继续着力贯彻“让数学成为国人文化的一部分”的宗旨，展示数学丰富多彩的方面。

本丛书的目的之一，是培养青年人热爱数学，找到正确的方向，经过艰苦努力在数学上取得重大成就，推动中国数学大踏步前进。在“数学人生”栏目中，以丘成桐先生的《数学与人生》作为开篇，展示了他成功的三要素，对青年人极有榜样作用。在“数海钩沉”栏目中，转载了席南华院士的《基础数学的一些过去和现状》一文，全面系统地介绍了基础数学的近代发展，对青年学者了解基础数学的现代状况、选择研究领域都极有好处。“魅力数学”栏目中，季理真教授的《数学在天堂》一文精彩介绍了在三亚举办的“数学大师讲座”。在美国，微积分的初等部分已进入高中数学，“数学教育”栏目中，柴俊教授的《我所了解的美国微积分教学》一文对我国的中学数学教育很有启发；张奠宙教授的《微积分：局部与整体的统一》则教给青年人如何学习微积分。在“数学与科学”中转载了《杨振宁与现代数学》，杨振宁不仅对物理学做出巨大贡献，也对数学做出了巨大贡献，此文非常精彩。在相对论的诞生中，数学起了核心的作用——正是非欧几何学的诞生为相对论提供了核心工具，赵峥教授的《弯曲的时空》一文对此做了详细介绍。

丛书编委会

主 编 (按姓氏笔画排序):

丘成桐 刘克峰 杨 乐 季理真

名誉编委 (按姓氏笔画排序):

丁夏畦 万哲先 王 元 石钟慈 齐民友 吴文俊 张景中
陆启铿

编 委 (按姓氏笔画排序):

于 靖 马绍良 王仁宏 王则柯 王善平 井竹君 田 野
冯克勤 曲安京 朱熹平 刘献军 许洪伟 孙小礼 严加安
李文林 李 方 李建华 杨 静 肖 杰 吴 杰 沈一兵
张英伯 张顺燕 张海潮 张奠宙 周 坚 郑方阳 郑绍远
胡作玄 姚恩瑜 袁向东 顾 沛 徐 浩 翁玉林 黄宣国
康明昌 蔡文端

责任编委:

李 方

丛书编辑部 (按姓氏笔画排序):

邓宇善 杨 静 赵春莉

合作单位:

中国科学院晨兴数学中心

浙江大学数学科学研究中心

清华大学数学科学中心

《数学与人文》丛书序言

丘成桐

《数学与人文》是一套国际化的数学普及丛书，我们将邀请当代第一流的中外科学家谈他们的研究经历和成功经验。活跃在研究前沿的数学家们将会用轻松的文笔，通俗地介绍数学各领域激动人心的最新进展、某个数学专题精彩曲折的发展历史以及数学在现代科学技术中的广泛应用。

数学是一门很有意义、很美丽、同时也很重要的科学。从实用来讲，数学遍及物理、工程、生物、化学和经济，甚至与社会科学有很密切的关系，数学为这些学科的发展提供了必不可少的工具；同时数学对于解释自然界的纷繁现象也具有基本的重要性；可是数学也兼具诗歌与散文的内在气质，所以数学是一门很特殊的学科。它既有文学性的方面，也有应用性的方面，也可以对于认识大自然做出贡献，我本人对这几方面都很感兴趣，探讨它们之间妙趣横生的关系，让我真正享受到了研究数学的乐趣。

我想不只数学家能够体会到这种美，作为一种基本理论，物理学家和工程师也可以体会到数学的美。用一个很简单的语言解释很繁复、很自然的现象，这是数学享有“科学皇后”地位的重要原因之一。我们在中学念过最简单的平面几何，由几个简单的公理能够推出很复杂的定理，同时每一步的推理又是完全没有错误的，这是一个很美妙的现象。进一步，我们可以用现代微积分甚至更高深的数学方法来描述大自然里面的所有现象。比如，面部表情或者衣服飘动等现象，我们可以用数学来描述；还有密码的问题、电脑的各种各样的问题都可以用数学来解释。以简驭繁，这是一种很美好的感觉，就好像我们能够从朴素的外在表现，得到美的感受。这是与文化艺术共通的语言，不单是数学才有的。一幅张大千或者齐白石的国画，寥寥几笔，栩栩如生的美景便跃然纸上。

很明显，我们国家领导人早已欣赏到数学的美和数学的重要性，在 1999 年，江泽民先生在澳门濠江中学提出一个几何命题：五角星的五角套上五个环后，环环相交的五个点必定共圆，意义深远，海内外的数学家都极为欣赏这个高雅的几何命题，经过媒体的传播后，大大地激励了国人对数学的热情，我希望这个丛书也能够达到同样的效果，让数学成为我们国人文化的一部分，让我们的年轻人在中学念书时就懂得欣赏大自然的真和美。

前言

张顺燕

本丛书的目的之一，是培养青年人热爱数学，找到正确的方向，经过艰苦努力在数学上取得重大成就，推动中国数学大踏步前进。

丘成桐先生是第一个获得菲尔兹奖的华人。在“数学人生”栏目中，以丘先生的《数学与人生》作为开篇，就是以他为楷模，引导青年人沿正确的方向前进。丘先生简要地回顾了他求学的经历，展示了他成功的三要素：第一，勤奋地攻读，不懈地努力；第二，良友和同学间的有益切磋，共同进步；第三，名师的指导和引领。极有榜样作用。

韩愈讲：“古之学者必有师。师者，所以传道、受业、解惑也。”本栏目的第二篇文章是丘先生的《我在香港中文大学的数学老师》，从中我们可以看到丘先生的学问进展和师生情谊。

在《纪念拉乌尔·博特》一文中，丘先生回顾了他和博特教授深厚的友谊。正是和博特教授的深入讨论，才使丘先生做出“一生最重要的决定，那就是到哈佛任教……”。

在“数海钩沉”栏目中，转载了席南华院士的《基础数学的一些过去和现状》一文。基础数学大致分为几何、代数（包含数论）和分析。席院士从这三个领域最基本的知识开始，全面系统地介绍了基础数学的近代发展，对青年学者了解基础数学的现代状况、选择研究领域都极有好处。

刘克峰教授的《丘成桐与卡拉比猜想 60 年》一文是献给丘成桐教授荣获菲尔兹奖 30 周年的。

同济大学李雨生教授的《远处不是天尽头——Ramsey 理论简介》，对 Ramsey 理论做了扼要的介绍，可供关心这一领域的学者参考。

“魅力数学”栏目中的头篇文章是季理真教授的《数学在天堂》，该文精彩地介绍了在三亚举办的“数学大师讲座”。从季教授的《宇宙的几何——丘成桐最新力作《大字之形》书评》一文中，“读者不仅能从中学习到数学、物理和天文学的知识，更重要的是能从中了解一位当代世界顶尖几何学家如何经历艰辛直至成功的历程”，并告诉读者成功的秘诀是什么。

《怪物与月光》是台湾中研院数学研究所林正洪教授在成功大学的演讲，

谈到许多数学最基本的东西及其典故，值得欣赏。

在“数学教育”栏目中，柴俊教授的《我所了解的美国微积分教学》一文很有启发。美国微积分教学改革运动始于 1985 年。由此，微积分的初等部分进入高中教育，其目的是使美国的优秀高中生接触科学前沿，开阔数学视野，并激发他们树立远大理想。相比我们的高中课程，令人感慨。我国的学生到高三后，每天就是复习已学过的内容，备战高考，浪费了大量的时间和精力，同时也远离了科学的前沿，影响了学生学习新知识的热情。美国的经验值得我们分析和研究，以提高我们高中数学教育的水平。张奠宙教授的《微积分：局部与整体的统一》教给青年人如何学习微积分。文章简洁、明白而深刻。

在“数学与科学”中转载了《杨振宁与现代数学》。此文非常精彩。杨振宁和李政道是第一次获得诺贝尔奖的华人物理学家。杨振宁不仅对物理学做出巨大贡献，也对数学做出了巨大贡献。正如文中所述：“特别是 20 世纪 80 年代以来，导源于杨振宁的两个数学研究分支：杨-米尔斯理论和杨-巴克斯特方程，先后进入当代数学发展的主流。”

无论对科学家还是非科学家来说，相对论和量子力学是科学革命的同义语。在相对论的诞生中，数学起了核心的作用——正是非欧几何学的诞生为相对论提供了核心工具。赵峥教授的《弯曲的时空》一文对此做了详细介绍。Michal Křížek 教授三人从开普勒的贴砖图案谈起，深入讨论了《具有五重对称性的结晶格是否存在？》，问题有趣且有用。《数在运转——数学与密码学》向我们展示了密码学和数论交互作用的丰富性与深刻性。笔者的《科学的数学化》论述了数学对近代科学诞生的关键作用。

目 录

《数学与人文》丛书序言（丘成桐）

前言（张顺燕）

数学人生

- 1 数学与人生（丘成桐）
- 9 我在香港中文大学的数学老师（丘成桐）
- 15 纪念拉乌尔·博特（丘成桐，译者：程新跃）

数海钩沉

- 17 基础数学的一些过去和现状（席南华）
- 32 丘成桐与卡拉比猜想 60 年
——谨以此文献给丘成桐教授荣获菲尔兹奖 30 周年（刘克峰）
- 39 远处不是天尽头——Ramsey 理论简介（李雨生）

魅力数学

- 51 数学在天堂（季理真，译者：徐浩）
- 56 宇宙的几何——丘成桐最新力作《大宇之形》书评
（季理真，译者：王丽萍，校订者：翁秉仁）
- 62 怪物与月光——浅谈 1998 年菲尔兹奖得主 Richard Borcherds
的数学工作（林正洪）

数学教育

- 73 我所了解的美国微积分教学（柴俊）
- 95 微积分：局部与整体的统一（张奠宙）

数学与科学

- 101 杨振宁与现代数学（杨建邺）
- 110 弯曲的时空——爱因斯坦与广义相对论（赵峥）
- 127 具有五重对称性的结晶格是否存在？（胡守仁）
- 143 数在运转——数学与密码学
（Igor E. Shprarlinski, 译者：葛显良）
- 158 科学的数学化（张顺燕）

数学与人生

丘成桐

丘成桐，当代数学大师，现任哈佛大学讲座教授，1971 年师从陈省身先生在加州大学伯克利分校获得博士学位。发展了强有力的偏微分方程技巧，使得微分几何学产生了深刻的变革。解决了卡拉比 (Calabi) 猜想、正质量猜想等众多难题，影响遍及理论物理和几乎所有核心数学分支。年仅 33 岁就获得代表数学界最高荣誉的菲尔兹奖 (1982)，此后获得 MacArthur 天才奖 (1985)、瑞典皇家科学院 Crafoord 奖 (1994)、美国国家科学奖 (1997)、沃尔夫奖 (2010) 等众多大奖。现为美国科学院院士、中国科学院和俄罗斯科学院的外籍院士。筹资成立浙江大学数学科学研究中心、香港中文大学数学研究所、北京晨兴数学中心和清华大学数学科学中心四大学术机构，担任主任，不取报酬。培养的 60 余位博士中多数是中国人，其中许多已经成为国际上杰出的数学家。由于对中国数学发展的突出贡献，获得 2003 年度中华人民共和国科学技术合作奖。

当我被建议写上面这个题目，就像当年我在中学时老师在课堂上出题目叫我们去作文。五十年后重做作文题倒还蛮有意思。但人生这个命题太广，时间也不够，在这里我述说我幼时做学问的经验，一直到研究所毕业那一年的经过。

首先我得说我从来不是天才，我通过不断地学习、不断地培养自己的兴趣和得到父母师友的熏陶，才逐渐找到自己研究的天地。

少时，我喜欢听我父亲和他的学生们的交流。我父亲喜欢比较西方和东方的哲学。他对希腊哲学的描述使我兴奋。希腊哲学家的思想影响了数学两千多年来的发展。第一个对数学有深远影响的希腊哲学家叫作毕达哥拉斯。他认为万物皆数，就是说数字可以解释万象，这与伏羲作八卦，文王演易，有类似的想法。但是希腊哲学家已经发展了三段论证的逻辑思想，他们要求他

们的论断都有严格的推理方法来支持。毕氏不单证明我们现在常用的勾股定理，他也用整数来解释音乐。他和他的学派沉溺于整数和有理数，认为有理数可以代表宇宙间一切事物。所以当他们用他们自己证明的勾股定理发现 $\sqrt{2}$ 不是有理数时，他们极度失望，传说学派中有人因此而自杀。对我来说这是一个很值得思考的事情，对这些希腊数学家来说，数学竟如宗教，何事何物使他们这般执着？漂亮的几何图形还是完整漂亮的整数？毕竟他们认识的几何图形或是他们看到的数字远比不上我们今日见到的，但是他们如醉如狂的态度不能不使人佩服。我以后读数学有更多的了解时，才比较欣赏他们的态度。事实上，假如他们眼光更远一点的话，就可能发现今日我们使用的实数系统，可以解释更多的事物。我在小学的时候，从父亲处听过这些故事，但是从小学的数学里，我看不出数学精妙的地方，所以说不上对数学有兴趣。在中学二年班第一次接触到平面几何，我才知道数学的美。我诧异于平面几何完美的公理化系统，从简单而明显的公理竟可以推导这么多漂亮而繁复的定理，以后我才知道明代徐光启在翻译欧几里得的《几何原本》时也有同样的感觉。他说：“欲脱之不可得，欲驳之不可得，欲减之不可得，欲前后更置之不可得。似至晦，实至明，故能以其明明他物之至晦；似至繁，实至简，故能以其简简他物之至繁；似至难，实至易，故能以其易易他物之至难。”这种感觉就如年轻时见到纯洁而美丽的女性时，从惊艳开始，不断地找寻，不断地认识，而情不能已。我在中学时就花了不少时间看了很多课外书籍。我跑到书店去浏览书籍，有时也到旧书店去买书。当时没有能力买外文书，要托朋友到台湾买盗版书，大部分书籍都是中国大陆出版的书籍，除了中国学者的书外，还有中国学者翻译的苏联作者的书。

看这些书时，没有老师指导，有时先读比较困难的书，才找到比较入门的书来读。所以在我读到陶渊明的《五柳先生传》说“好读书，不求甚解，每有会意，便欣然忘食”时，于我心有戚戚焉。我读华罗庚先生的《数论导引》、《高等数学引论》、《从单位圆谈起》等书，对我启发良多。我也读柯召先生的《代数学》，复旦大学出版的《数学分析》，李文清先生的《泛函分析》等书。这些书籍包括在培正中学学的数学书籍，它们使我兴奋，我也花了很多工夫去想一些问题，这些问题在书本上没有提到，却不断磨炼我的思考能力。

在这一段时间，我知道平面几何的定理可以用公理来推导，我也深信数字、代数和这一切数学都应当可以从最基本的公理来推导、来构造。但在中学的时候，我不知如何去推导无理数和超越数，我一直在问它们是如何构造的？这使我迷惘，直到大学一年班时，我才学习到 Dedekind Cut 和数学系统的完备性。当我知道数学系统的完备时，我觉得无比喜悦，因为我知道我喜爱的学问竟然无懈可击，我因此写了一封信向我的老师描述我的兴奋。

记得大学一年班的开学典礼，由系主任谢兰安先生做演讲。他说你们不

要妄自菲薄，你们就算不能成为数学殿堂的梁柱，即使能够粉饰这个殿堂的墙壁，也可能青史留名。谢先生虽然没有博士学位，但这句话对我印象深刻。

从大学二年级开始，我阅读了更多现代数学的著作，包括微分方程、代数、泛函分析、古典的微分几何、牛顿力学、电磁学等等不同的学问。我读的书有 Jacobson 的代数学，Serge Lang 的数论、局部域，Dieudonné 和 Bourbaki 的拓扑学，Helson 的调和分析，Dunford-Schwartz 的泛函分析，Kakutani 的半群，夏道行的无限维空间上的测度论，华罗庚的典型群、多复变函数论，Pogorelov 和 Alexandorff 的微分几何，Chevalley 的代数曲线。我也写信要求 Irving Segal 教授和 Kadison 教授赠送他们在《算子代数》发表的单行本，他们都是名教授，却乐意送他们的文章给我阅读。我不断地找寻数学的内容、方法和意义。但是在香港的环境，我能看到的学问实在不多，也可以说是坐井观天。

但是我跟随 Saloff 教授学习了微分方程，微分方程由一定的规律推导出一些想不出来的结果。我觉得微分方程就如一个物理定律，了解它就能掌握宇宙的变化，因此是进入数学殿堂的一个重要台阶。微分方程的方法也使我兴奋，无论是不动点原理或是极大值原理都极有意思，在合适的情形下，它的运作有如魔术使我极为兴奋。

在中文大学时我也跟随 Brody 教授学习泛函分析，这门学问很是优雅，易学易通，我以为这是数学的主流，想向这方面发展。

我虽然读了不少代数的书，但遗憾的是没有读过当时 Grothendieck 等人在代数几何上的重要著作。大学三年级时有一位老师叫张广鑫，他在哥廷根大学毕业，学习代数，我问他 Serge Lang 关于局部域的理论，他说局部不好，一定要全局才好，所以我没有将这个重要学科学好。

到我读研究所一年级时，见到不少数学大师，那是伯克利数学系极盛的时代。从香港来到伯克利，就好像从井中出来见到天日一样。我选修了三门学科，却旁听了六门不同的学科。旁听的课程有数论、群表示论、Banach 空间、Ergodic 理论，还有广义相对论和半群在工程上的理论。我修的学科是代数拓扑、微分方程和微分几何，前两门学科分别是由 Spanier 和 Morrey 教授，我后来才知道他们都是一代大师。在选修代数拓扑时，由于从来没有学过这门学问，有一些困难，但是我花了不少工夫将所有习题都做好后，很快就没有问题了。从 Morrey 教授那里，我学到偏微分方程的基本技巧。我也从他那里学习了高维空间的变分方法。我对偏微分方程的方法愈多理解，我对它的威力愈感兴趣。当时我正在学习微分几何，我已经认为微分方程对微分几何应当有重要的影响。

但是这种看法和当时几何学的潮流刚好相反。当时很多几何名家的兴趣

都在研究测地线的变化，他们企图推广欧氏几何的方法到一般空间去。他们考虑的空间大部分都是正曲率空间。值得一说的是 Atiyah-Singer 已经开始用线性椭圆微分方程的方法去解决拓扑学和代数几何里面的重要问题。

我在香港时已经看过大量的从俄文翻译的几何书籍，有几个名家的作品，如 Pogorelov, Alexandorff。他们受到德国数学家 Hilbert 和 Cohn-Vossen 的影响，与我的老师陈省身走的路线挺不一样。他们对不光滑的空间和它们的刚性定理有很深入的研究，Efimov 和 Pogorelov 对刚性曲面的研究使我印象深刻，到如今我对他们的证明还是没有深入的了解。他们擅长的方法除了研究测地线的变化外，还加上微分方程的方法，但是他们的研究集中在二维空间。我的老师陈省身不大喜欢这一套方法，他喜欢光滑的空间，他喜欢德国几何学家 Blaschke, Kähler, Weyl 和法国数学家 Cartan 和 Weil 发展出来的外微分形式，他用这种方法成功地寻找出重要的几何不变量，著名的陈氏特征类就是由此而起。

伯克利数学系的研究生多达五百人，热闹得很，连助理教授都没有足够的办公室，更遑论研究生了。但是气氛很好，同学们都在讨论数学的问题，而且热烈得很。我还记得有一次看到两个从意大利来的博士后，在路上大叫大跳，兴奋得很，我问他们为什么这么兴奋，他们说他们刚得到一个微分方程的先验估值 (apriori estimate)。我问他们什么叫做估值，他们用手指指着，瞠目结舌，难以想象居然有人不知道什么叫做估值。半年后，我才了解到估值的重要性，但这事使我印象深刻，因为估值是研究微分方程最重要的一步。

跟我同时修读几何学和拓扑学的中国学生倒还不少，他们有些是从台湾来的，例如万业辉就念得很好，但也有在美国念大学的例如杨健平和王彬等人，也有南洋来的，如黄宗平。由于我很重视做课堂上的习作同时小心地写出答案，就有些同学常来找我，最常见的是杨健平和王彬。王彬跟我同一个中学念书，低我一班，还在念本科，但志向很远大，他宣称他的博士论文非要解决庞加莱猜想不可，使我钦佩。也有一位从 Rice 来访问的台湾学生叫做黄武雄和他的夫人吴贵美，有时会闲聊一些几何的问题。

第一年没有办公室，我就全部时间在图书馆里度过，到处浏览，看书也看杂志。看到欧拉 (Euler) 的书使我印象深刻，一个大书架全部是他的著作，以后我读了黎曼 (Riemann) 著作全集，我不敢说“大丈夫当如是”，但也开始知道这些古代的伟大数学家的著作不止等身，开创性的想法也胜于当代学者，想来庄子书中说的河伯见到北海若时的心情，大概也是如此。

四十三年前数学杂志不多，我都会去翻阅，当然大部分文章都看不懂。那一年冬天，圣诞节时所有学生都回家去了，图书馆冷清清。我读微分几何杂志一篇 Milnor 写的文章，写得很漂亮，在文章里提到一篇老文章是 Preissman

写的关于负曲率空间的基本群的文章，这文章的方法也是用测地线的方法来讨论空间拓扑性质的文章，引起我的兴趣。反正在图书馆里无所事事，就将 Preissman 的文章推广了。这篇文章是我学术生涯的第一篇文章，用的方法也是测地线的方法，想不到需要不少无限群的理论。我从来没有学过这方面的理论，只是在香港的一次茶会上跟一位从英国来的老师交谈的时候知道一点这方面的工作，但在图书馆找寻了很多天，才找到需要的文献，这是我论文中一个关键工具。陈省身教授以后听了我的报告，很惊讶我会有群论的知识。所以我教育学生时要他们多与人交流，同时言必及义。

在圣诞假期结束以后，我完成了上述文章的稿件，它是关于曲率和拓扑基本群的关系的一篇文章。这时才发觉伯克利的 Wolf 教授刚好发表了一篇文章，做了一个猜测，是我文章中的一个特例。他当时在休假，过了半年后，他回到伯克利，我才见到他。他很友善，还问了我一些相关的问题，都给我解决了。他对我印象不错。那年春天，我向当时教我几何课的 Lawson 教授介绍我的工作。他很兴奋，他刚拿到博士学位，我的文章方向和他做的极小子流形的工作不一样，所以他建议和我一同合作。在这三个月内，我们完成了一件相当漂亮的工作。在这期间，我和他常通电话，一谈就是一个多钟头。以后我才知道他的夫人对此极为不满，他的夫人跟他离婚后跟我说起此事，她后悔当年为此事与 Lawson 教授争吵。从这里也可以知道，做研究和家庭的和谐相处并不见得很容易兼顾。这两篇文章发表在比较重要的期刊，使我有些惊讶。但无论如何，研究院第一年能够写文章，感觉还是不错。Lawson 教授跟我说，石溪的 Simons 教授听闻了我的研究后，对我很感兴趣，想邀请我到石溪任教。我当时还在学习阶段，当陈省身教授休假回到伯克利后，我要求陈教授做我的导师，开始花时间去学习复几何，因此没有继续研究群和几何的关系。事实上，当时我已知道无限群和几何的密切关系，但我已经开始忙着发展几何分析，没有在无限群方面继续研究。过了十年后，俄国几何学家 Gromov 在这方面做了一些重要的工作，以后也有不少跟随者。可见当年的想法还是有意思的。

写完这两篇文章后，我自以为对几何已经相当精通。1970 年 3 月时我参加伯克利的博士资格考试，得到不同的经验。考试分三节口试，第一节由 Weinstein 和 Thomas 主持，问一些刁难的问题，我得了 B。第二节由 Morrey 和 Rogenthal 主持，考分析，我得了 A。第三节由 Seidenberg 和 Dupin 主持，考代数，我竟然得了 A+。这倒是有点意思，因为代数不是我的强项，可见考试不见得能够发现学生的资质。我也不以为意继续在几何学上花工夫。

在伯克利读研究院这两年，无论在做学问和对人生的看法都有着不同的变化。可以说对学问的兴趣与时而增长，知道得愈多，愈觉得自己的不足，还有很多值得我去闯的天地。我想了解自然奥秘，必须从数学开始，因为我们需

要一个理性而又有条理的方法才能了解这些基本的物理定律，也只有通过这种理性的方法，才能将物理的基本定律应用到其他科学中，数学的方法也可以寻找社会上有规律的现象。数学的威力使我兴奋，年轻人的热情实在可爱。以后一直去追求这个理想，虽然不能说得上成功，却可以说是愉快的经验。

在读研究院第一年的第三个学期的时候，美国反越战的热潮不断升级，美军空炸老挝更是一件大事，同学停课示威，校园上空烟尘滚滚，催泪弹和石头满天飞。在教室里可以看到军警和示威同学的对阵。大部分老师因学生的要求而停课，Spanier 教授正开始教授代数拓扑的精华部分，却因此而停止，我很遗憾没有学到这门学问比较深入的部分。Morrey 教授看到我每天准时来上课，就一对一地教授我，他刚完成他的变分方法的巨著。我运气很好，有机会和他讨论其中的问题。他居然会和我一同到图书馆去找资料，使我十分感动。所以我认为在一个成熟的学术环境里，我们不必问需要有多少学生在课堂里才能够开课。其实在不少数学课堂里，大师教的内容不见得受到一般学生的欣赏，但懂得欣赏的学生往往受益最大，有时甚至成就了一个学科的成长。

我从 Morrey 教授那里学习了偏微分方程，也开始在研究院学习复几何和极小子流形，后面这两个科目都是我的老师陈省身教授的拿手学问。省身教授还带领鸿熙先生做 Nevanlinna 的等值分布理论，也研究 Bott 全纯向量场不动点的文章。我虽然对这些文章有兴趣，但是我主要的精力放在我自己在图书馆看到的文章。我记得当时正在看 Huber 一篇冗长的关于黎曼曲面上的函数论，省身教授就叫我将这篇文章在他课堂上做报告，做完报告后，我就想将这些结果推广到高维空间去。听完我的计划后，陈教授很高兴，但是当时没有工具去做这些推广，过了两年后，我才成功地做到我想做的事情。我也在想一些度量几何的问题，特别是跟物理学有关的几何。

当时我的老朋友郑绍远刚从香港来伯克利，他也决定跟随省身老师学习。我们住在同一个房间，共同读书切磋，我建议我们集中精力将微分方程的方法用到几何上，尤其是微分算子的谱问题。他的博士论文在这方面有开创性的贡献，以后我和他的合作是近代几何分析的一个开始。

自从做了省身老师的学生后，我常到他办公室甚至到他家中去。他大部分时间很忙，就让我自己在他的一大堆别人赠送的数学单行本里去找自己喜欢的文章。他是一代宗师，很多数学家在文章完成后，都寄赠他一篇影印本，所以新的文献堆积如山，每星期我都拿两三篇文章回家念。我当时写论文没有打字机，就借他办公厅里面的打字机打。他的办公厅面对花园，坐在那里很是惬意。

当时最引起我注意的是解决爱因斯坦方程的空间，如何去构造这些空间？谁都没有办法去解决这些漂亮而有意义的问题，可以说连入手的门路都没有。

有一天，我在图书馆无意看到了 Calabi 先生所写的一篇文章使我大喜过望。因为我看到了一线光明，有一条路径去建造这些空间。但是十多年来没有人相信 Calabi 先生的建议，这包括我自己在内。因为这个 Calabi 猜想实在太美妙了，同时它的证明需要当时被认为极为困难的偏微分方程技巧。几何学家不敢相信它是正确的，而做方程的专家则认为在那时候证明它的时机尚未成熟。但是我坚持自己的想法，无论如何，总要找到一个水落石出的答案，经过五年的朝思暮想，才解决了这个重要的问题。

这一年，中国留学生对于日本占领钓鱼岛事件很是愤怒，一下子，全美的中国留学生都组织起来，郑绍远和我热血沸腾，参加游行示威。当时中美并未建交，主要华人代表是台湾的领事馆。我们在领事馆门前示威，竟然被有组织的华端口黑社会集团叫华青的出来搅局，站在我旁边的一位同学余经昌竟然当场眼镜被打破。这当然使得同学们更加气愤。当中国进驻联合国时，很多参加保钓的同学都参加到代表共产党的团体那边去了。同学们也办报纸（他们将它命名为战报），也演话剧，花了不少时间，有些长者却认为我们荒废学业，有一次对我们说：“人生在世，不是为名，就是为利，对这些无关的事何必如此热情。”

我们对保钓的热情却没有因此而冷却，放在这个运动的时间也实在不少。很多留学生到处游学，从一个城市到第二个城市去访问，我和绍远兄也接待过这些学生，某保钓的学生不请自来，在我们狭小的公寓打地铺，一住就是一个多月，使我们无法专心读书，只能请他走路。在这一段日子虽然有着“革命”的热情，对研究学问却始终保持着当初的心情，希望“究天人之际，通古今之变，成一家之言”。外国同学里学问做得出色的实在也有不少，有 Meeks, Bleecker, Millson 等。Meeks 喜欢极小子流形，Bleecker 跟我讨论纸在空间产生皱纹的几何形状，Millson 则喜欢找同学讨论如何计算 Chern-Simons 不变量的问题。当然最出色的是 Thurston，他做叶状结构 (foliation) 的工作，以后在三维空间几何化的伟大贡献使他得到菲尔兹奖。也有一批杰出的年轻教师，如 Bowen, Goldfeld, Schmidt 和 Uhlenbeck 等。Bowen 不幸早逝，后三者以后成为我的好朋友。看着他们与时俱进的研究水平，我得到很大的鼓舞。

教授几何学的教授除了陈省身，Wolf 和 Lawson 外，还有伍鸿熙，Weinstein, Kobayashi, Ochiai 和 Eberlein，教李代数的有 Hochschild 和 Satake，教自守型式的有 Ogg，教代数的有 Seidenberg 和林节玄。贤师良友，济济一堂，对我以后的学问都有重要的影响。

我在 1970 年暑假得到省身教授同意，做他的博士生。过了不到三个月，他就说我可以毕业了，倒使我吃了一惊。虽然我还想继续学习，由于家境的缘故，还是决定在 1971 年毕业。但是省身老师担心我没有教过书，在他外出演讲时，往往由我代课。记得第二年到伯克利读书的有几位中国学生都上过