

第二版

电路 (下)

李裕能 夏长征 主编



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

第二版

电路 (下)

李裕能 夏长征 主编



WUHAN UNIVERSITY PRESS

武汉大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

电路. 下/李裕能,夏长征主编. —2 版. —武汉:武汉大学出版社,2015. 1
ISBN 978-7-307-14780-5

I. 电… II. ①李… ②夏… III. 电路理论—高等学校—教材
IV. TM13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 263859 号

责任编辑:胡 艳 责任校对:鄢春梅 版式设计:马 佳

出版发行:武汉大学出版社 (430072 武昌 珞珈山)

(电子邮件:chs22@whu.edu.cn 网址:www.wdp.com.cn)

印刷:湖北睿智印务有限公司

开本:787×1092 1/16 印张:15 字数:350 千字 插页:1

版次:2004 年 8 月第 1 版 2015 年 1 月第 2 版

2015 年 1 月第 2 版第 1 次印刷

ISBN 978-7-307-14780-5 定价:30.00 元

版权所有,不得翻印;凡购买我社的图书,如有质量问题,请与当地图书销售部门联系调换。

前 言

“电路”是工科电类专业的一门重要的技术基础课,是大学生接触到的一门理论严密、逻辑性强、内容繁多而难以掌握的课程。通过本课程的学习,为后续课程的学习提供了具有一定深度和广度的电路理论知识。要真正学好这门课,并非易事,为此,本书力求遵循由浅入深、由易到难的原则,注重于基本原理、基本概念、基本分析方法的阐述,并尽力使难点分散。本书具有较完善的体系,在内容的编排上,充分考虑到学生的数学、物理基础;在内容的选择上,尽量满足电类各专业教学的需要。为了帮助读者深入理解基本概念和灵活选择分析方法,在书中引入了较多的例题,以便于读者自学;各章末还附有难易适度的练习题供教学选用。

电路理论主要包括电路分析和电路综合两个方面的内容,本书以电路分析为主。考虑到某些专业的教学需要,下册书末编入了磁路和电路计算机辅助分析简介。

全书以课内教学 130 学时编写的。书中第 3、4、5、6、7、8、9、10、11 章和附录 B 由李裕能编写;第 1、2、12、13、14、15 章和附录 A 由夏长征编写。全书承蒙杨宪章教授仔细审阅,并提出许多宝贵意见;本书编写过程中曾得到彭正未教授的指导;在书稿审订过程中,武汉大学电气工程学院电工原理教研室熊元新教授、胡钊副教授、樊亚东副教授等全体同仁提出了许多有益的建议。谨在此一并表示衷心感谢。

由于编者水平有限,谬误之处在所难免,恳请广大读者批评指正。

编 者

2014 年 6 月

目 录

第9章 一阶电路和二阶电路	1
9.1 一阶电路和高阶电路	1
9.1.1 动态电路	1
9.1.2 分析动态电路的步骤	2
9.2 电路动态过程的初始条件	2
9.2.1 电路的换路定则	3
9.2.2 如何计算电路的初始条件	4
9.3 一阶电路的零输入响应	5
9.3.1 R 、 C 电路的零输入响应	5
9.3.2 时间常数	7
9.3.3 R 、 L 电路的零输入响应	8
9.4 一阶电路的零状态响应	10
9.4.1 R 、 C 电路的零状态响应	10
9.4.2 R 、 L 电路的零状态响应	12
9.5 一阶电路的全响应	14
9.5.1 R 、 C 电路的全响应	14
9.5.2 求解一阶电路的三要素法	16
9.6 阶跃函数和一阶电路的阶跃响应	19
9.6.1 阶跃函数	19
9.6.2 一阶电路的阶跃响应	21
9.7 冲激函数和一阶电路的冲激响应	22
9.7.1 冲激函数	22
9.7.2 阶跃函数、脉冲函数、冲激函数的关系	23
9.7.3 一阶电路的冲激响应	23
9.7.4 冲激响应与阶跃响应的关系	26
9.7.5 电容电压和电感电流的跃变	27
9.8 二阶电路的零输入响应	30
9.8.1 R 、 L 、 C 电路的方程及求解	30
9.8.2 分三种情况讨论	32
9.9 二阶电路的零状态响应及阶跃响应	36
9.9.1 R 、 L 、 C 电路的方程及求解	37

9.9.2 分三种情况讨论	37
9.10 二阶电路的冲激响应	40
9.10.1 $\delta > \omega_0 \left(R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \right)$, 非振荡过程	40
9.10.2 $\delta < \omega_0 \left(R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \right)$, 振荡过程	41
9.11 卷积积分	42
9.11.1 卷积积分的定义	42
9.11.2 用卷积积分计算任意激励的零状态响应	42
习题	44
第 10 章 拉普拉斯变换及网络函数	49
10.1 拉普拉斯变换与傅里叶变换的关系	49
10.1.1 概述	49
10.1.2 拉普拉斯变换	49
10.2 拉普拉斯变换的基本性质	52
10.2.1 线性性质	52
10.2.2 微分性质	52
10.2.3 积分性质	53
10.2.4 延迟性质	53
10.2.5 卷积定理	55
10.3 拉普拉斯反变换	55
10.4 拉普拉斯变换在线性电路分析计算中的应用	60
10.4.1 电路元件特性方程的复频域形式	60
10.4.2 电路定律的复频域形式	62
10.4.3 用拉普拉斯变换分析线性电路的过渡过程	63
10.5 网络函数的定义及其性质	67
10.5.1 网络函数的定义	67
10.5.2 网络函数的性质	68
10.6 复频率平面及网络函数的极点与零点	68
10.6.1 复频率平面	68
10.6.2 网络函数的极点与零点	69
10.7 零点、极点与冲激响应	69
10.8 零点、极点与频率响应	70
10.9 拉普拉斯变换法与正弦稳态相量法之间的对应关系	72
习题	74

第 11 章 电路方程的矩阵形式	78
11.1 关联矩阵与节点电压方程	78
11.1.1 关联矩阵	78
11.1.2 支路电压与节点电压的关联性质	80
11.1.3 节点电压方程的矩阵形式	80
11.2 回路矩阵与回路电流方程	84
11.2.1 回路矩阵	84
11.2.2 支路电流与回路电流的关联性质	85
11.2.3 回路电流方程的矩阵形式	86
11.3 割集矩阵与割集电压方程	87
11.3.1 割集矩阵	87
11.3.2 支路电压与割集电压的关联性质	88
11.3.3 割集电压方程的矩阵形式	89
11.4 状态方程	90
11.4.1 状态与状态变量	90
11.4.2 状态方程	90
11.4.3 状态方程的编写	92
11.4.4 输出方程	95
习题	95
第 12 章 二端口网络	98
12.1 二端口网络和多端口网络	98
12.2 二端口网络的基本方程及其相应参数	99
12.2.1 Y 参数及相应的端口方程	99
12.2.2 Z 参数及相应的端口方程	101
12.2.3 H 参数及相应的端口方程	103
12.2.4 T 参数及相应的端口方程	105
12.3 二端口网络的等效电路	108
12.4 二端口网络的特性阻抗	111
12.5 二端口网络间的连接	113
12.5.1 二端口的级联	113
12.5.2 二端口的串联	114
12.5.3 二端口的并联	117
12.6 二端口网络的网络函数	118
12.6.1 无端接二端口的网络函数	118
12.6.2 单端接二端口的网络函数	119
12.6.3 双端接二端口的网络函数	120
12.6.4 化有端接二端口为无端接二端口	121

习题	122
第 13 章 具有运算放大器的电路	126
13.1 运算放大器的电路模型	126
13.2 由理想运算放大器构成的运算电路	128
13.3 含理想运算放大器电路的节点分析法	132
13.4 负阻抗变换器	134
13.5 回转器	136
习题	137
第 14 章 非线性电路	140
14.1 非线性电路元件	140
14.1.1 非线性电阻元件	140
14.1.2 非线性电容元件	142
14.1.3 非线性电感元件	143
14.2 分析非线性电阻电路的图解法	144
14.2.1 简单串并联非线性电阻电路的图解法	144
14.2.2 非线性电阻电路静态工作点的图解法	145
14.3 分段线性化方法	146
14.4 小信号分析法	147
14.5 牛顿-拉夫逊法	149
14.6 非线性动态电路状态方程的列写	151
14.7 求解自治电路的分段线性法	153
14.7.1 非线性电阻和线性电感构成的一阶非线性自治电路	153
14.7.2 线性电阻和非线性电容构成的一阶非线性自治电路	155
习题	157
第 15 章 均匀传输线	160
15.1 均匀传输线及其基本方程	160
15.1.1 分布参数电路的基本概念	160
15.1.2 均匀传输线及其基本方程	161
15.2 均匀传输线方程的正弦稳态解	163
15.2.1 正弦稳态情况下均匀传输线方程的通解	163
15.2.2 已知始端电压和电流时均匀传输线方程的正弦稳态解	164
15.2.3 已知终端电压和电流时均匀传输线方程的正弦稳态解	165
15.3 均匀传输线上的电压和电流行波	167
15.3.1 均匀传输线方程的正弦稳态解对应的时间函数	167
15.3.2 均匀传输线上的正向行波	168

15.3.3 均匀传输线上的反向行波	169
15.4 特性阻抗与传播常数	170
15.4.1 均匀传输线的特性阻抗	170
15.4.2 均匀传输线的传播常数	171
15.5 波的反射与终端接特性阻抗的传输线	171
15.5.1 波的反射与反射系数	171
15.5.2 终端接特性阻抗的传输线	172
15.6 终端接任意阻抗的传输线	172
15.6.1 终端开路的传输线	172
15.6.2 终端短路的传输线	173
15.6.3 终端接任意负载的传输线	174
15.7 无损耗均匀传输线	174
15.7.1 无损耗传输线的正弦稳态解	174
15.7.2 终端开路的无损耗传输线	175
15.7.3 终端短路的无损耗传输线	176
15.7.4 终端接负载的无损耗传输线	178
15.7.5 无损耗传输线的应用	180
15.8 无损耗均匀传输线方程的通解	182
15.9 传输线上波的产生	183
15.9.1 无损耗线与电压源接通时波的产生	183
15.9.2 感应雷导致的传输线上的雷电波	184
15.10 无损耗线上波的入射和反射	185
15.10.1 终端负载匹配时无损耗线上波的入射	185
15.10.2 终端开路时无损耗线上波的入射和反射	185
15.10.3 终端短路时无损耗线上波的入射和反射	187
15.11 无损耗线上波的折射	188
15.11.1 两条不同无损耗线串联的情况	188
15.11.2 终端接不匹配负载的情况	189
15.11.3 两条不同无损耗线间串联电感的情况	190
15.11.4 无损耗线连接电容的情况	190
习题	191
 附录 A 磁路	 193
A.1 磁场与铁磁材料	193
A.2 磁路的基本概念	195
A.3 磁路的基本定律	195
A.4 直流磁路的计算	197

A.4.1 无分支直流磁路的计算	197
A.4.2 有分支直流磁路的计算	202
A.5 交变磁通作用下磁路的损耗	204
A.5.1 涡流和涡流损耗	204
A.5.2 磁滞损耗	205
A.6 交流铁心线圈	205
习题	206
 附录 B 电路计算机辅助分析简介	208
B.1 电路计算机辅助分析概况	208
B.1.1 电路计算机辅助分析发展概况	208
B.1.2 电路计算机辅助分析的主要内容	209
B.1.3 电路计算机辅助分析的思路和步骤	209
B.2 电路的计算机辅助分析	210
B.2.1 建立数学模型	210
B.2.2 编制程序并计算	210
B.3 基于 PSPICE 的电路计算机辅助分析	212
B.3.1 PSPICE 简介	212
B.3.2 PSPICE 基本组成	212
B.3.3 电路仿真基本步骤	213
B.3.4 PSPICE 应用示例	213
 习题参考答案	222

第9章 一阶电路和二阶电路

本章的主要内容有:动态电路及其方程,动态电路的换路定则及初始条件的计算,一阶电路的时间常数,一阶电路的零输入响应,一阶电路的零状态响应,一阶电路的全响应,一阶电路的阶跃响应,一阶电路的冲激响应,二阶电路的零输入响应,二阶电路的零状态响应及阶跃响应,二阶电路的冲激响应和卷积积分。

9.1 一阶电路和高阶电路

9.1.1 动态电路

电路有两种工作状态:稳态和动态。

当电路在直流电源的作用下,各条支路的响应也都是直流时;当电路在正弦交流电源的作用下,各条支路的响应也都是正弦交流时,这两种电路称为稳态电路,即电路处于稳定工作状态。描述直流稳态电路的方程是代数方程;用相量法分析交流电路时,描述交流稳态电路的方程也是代数方程。前面我们研究的就是稳态电路。

当电路中存在储能元件(电感和电容),并且电路中的开关被断开或闭合,使得电路的接线方式或元件参数发生变化(称此过程为换路)时,电路将从一种稳态过渡到另外一种稳态。这一过渡过程一般不能瞬间完成,需要经历一段时间,在这段时间里电路处于一种动态过程,所以称为动态电路。

描述动态电路的方程是微分方程。动态电路中独立储能元件的个数称为电路的阶数,电路的阶数也就是微分方程的阶数。例如,有一个独立储能元件的电路称为一阶电路,如图9-1(a)所示电路,描述这个一阶电路的方程是一阶微分方程;有两个独立储能元件的电路称为二阶电路,描述这个二阶电路的方程是二阶微分方程;有两个或两个以上独立储能元件的电路称为高阶电路。

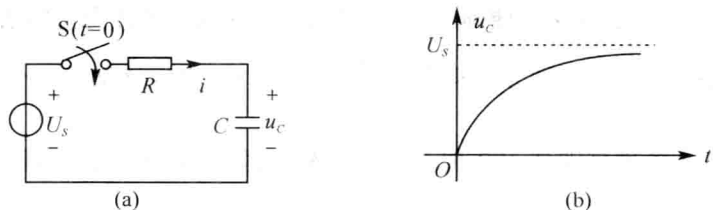


图 9-1 R 、 C 一阶电路及其响应

9.1.2 分析动态电路的步骤

当电路中的开关 S 被断开或闭合时,使电路的接线方式或元件参数会发生变化,称此过程为换路。换路这一时刻记为 $t=0$,换路前的一瞬间记为 $t=0_-$,换路后的一瞬间记为 $t=0_+$,换路后电路达到新的稳态的时间记为 $t=\infty$ 。

要分析计算电路在发生过渡过程时各条支路的响应,首先要根据换路后的电路结构列写电路的微分方程;然后求解上述微分方程,计算出方程的通解;最后由电路的初始条件确定积分常数,求出满足电路初始条件的一个解。分析动态电路的这种方法称为时域分析法,亦称为经典法。

例如,对于图 9-1(a) 所示一阶电路,开关 S 原先是断开的,且电路已处于稳定状态,当 $t=0$ 时开关 S 闭合,求 $t \geq 0$ 时电容电压 $u_C(t)$ 。

第一步:根据换路后的电路结构列写电路的微分方程: $Ri+u_C=U_S$;由于 $i=C \frac{du_C}{dt}$,故电路的微分方程为: $RC \frac{du_C}{dt}+u_C=U_S$ 。

第二步:求解上述微分方程,计算出方程的通解。由数学知识判断,上述方程是一线性常系数非齐次方程,该方程的通解为: $u_C=U_S+Ae^{-t/RC}$,其中 A 为积分常数。

第三步:由电路的初始条件确定积分常数,求出 $A=-U_S$ 。

最后求出满足电路初始条件的一个解,电容电压为 $u_C=U_S-U_S e^{-t/RC}$ 。电容电压的变化规律如图 9-1(b) 所示。

现在我们来分析一下电容电压的变化。当 $t < 0$ 时,电路处于一种稳态, $u_C=0$ 。当 $t=\infty$ 时,电路又达到一种新的稳态, $u_C=U_S$ 。当 $0 \leq t < \infty$ 时,电路处于两种稳态之间的过渡阶段,电容电压由零开始按指数规律增长,最后达到电源电压的值 U_S 。本章就是要研究这一过渡阶段电路中的响应。我们在这里只是粗略地描述分析动态电路的主要步骤,详细内容将在后面几节里深入分析。

9.2 电路动态过程的初始条件

在高等数学常微分方程章节中可知,要计算出微分方程 $\frac{d^2y}{dt^2}+a \frac{dy}{dt}+by=f(t)$ 的特定解,应

给出两个条件: $y \Big|_{t=0_+}=m, \frac{dy}{dt} \Big|_{t=0_+}=n$ 。这两个条件分别是 $t=0_+$ 时刻(即初始时刻)函数 y 的值和函数 y 的一阶导数的值,以便确定积分常数,故称这两个条件为初始条件。对于求解一个描述二阶电路电流变化的微分方程 $\frac{d^2i}{dt^2}+a \frac{di}{dt}+bi=f(t)$,也应该知道两个条件: $i \Big|_{t=0_+}=m,$

$\frac{di}{dt} \Big|_{t=0_+}=n$,这两个条件分别是 $t=0_+$ 时刻(即换路的初始时刻)电流 i 的值和电流 i 的一阶导数的值,以便确定积分常数,故称这两个条件为电流的初始条件。通常,对于任何一个电路

问题,其初始条件是不能随意给定的,因为它要根据电路在换路前后瞬间某些物理量应遵循的规律来确定。在这一节里,我们正是要研究电路在换路前后瞬间电容电压和电感电流应遵循的规律。

9.2.1 电路的换路定则

对于线性电容来说,在任意时刻其电荷与电流的关系为 $dq = i_C dt$,将这一表达式两边从 t_0 到 t 积分可得

$$\int_{q(t_0)}^{q(t)} dq = \int_{t_0}^t i_C(\xi) d\xi$$

$$q(t) - q(t_0) = \int_{t_0}^t i_C(\xi) d\xi$$

令 $t_0 = 0_-$, $t = 0_+$ 可以得到

$$q(0_+) = q(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} i_C dt \quad (9-1)$$

即

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) + \frac{1}{C} \int_{0_-}^{0_+} i_C dt \quad (9-2)$$

在一般情况下,时间由 0_- 到 0_+ ,即在换路前后瞬间,电容电流 i_C 为有限值,故式(9-1)、式(9-2)中的积分项等于零。因此可以得到

$$q(0_+) = q(0_-) \quad (9-3)$$

$$u_C(0_+) = u_C(0_-) \quad (9-4)$$

由式(9-3)、式(9-4)可以看出,在换路前后瞬间,电容的电荷和电压都不能发生跃变,即电容器的电荷和电压在换路前后瞬间是相等的。式(9-4)中的 $u_C(0_+)$ 称为电容的初始条件,该条件称为独立初始条件。

对于线性电感来说,在任意时刻其磁链与电压的关系为 $d\psi = u_L dt$,将这一表达式两边从 t_0 到 t 积分可得

$$\int_{\psi(t_0)}^{\psi(t)} d\psi = \int_{t_0}^t u_L(\xi) d\xi$$

$$\psi(t) - \psi(t_0) = \int_{t_0}^t u_L(\xi) d\xi$$

令 $t_0 = 0_-$, $t = 0_+$ 可以得到

$$\psi(0_+) = \psi(0_-) + \int_{0_-}^{0_+} u_L(\xi) d\xi \quad (9-5)$$

即

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) + \frac{1}{L} \int_{0_-}^{0_+} u_L(\xi) d\xi \quad (9-6)$$

在一般情况下,时间由 0_- 到 0_+ ,即在换路前后瞬间,电感电压 u_L 为有限值,故式(9-5)、式(9-6)中的积分项等于零。因此可以得到

$$\psi(0_+) = \psi(0_-) \quad (9-7)$$

$$i_L(0_+) = i_L(0_-) \quad (9-8)$$

由式(9-7)、式(9-8)可以看出,在换路前后瞬间,电感的磁链和电流都不能发生跃变,即电感的磁链和电流在换路前后瞬间是相等的。式(9-8)中的 $i_L(0_+)$ 称为电感的初始条件,该条件也称为独立初始条件。式(9-3)、式(9-4)、式(9-7)、式(9-8) 统称为动态电路的换路定则。

在换路前瞬间,电容的能量为 $\frac{1}{2}Cu_c^2(0_-)$,在换路后瞬间,电容的能量为 $\frac{1}{2}Cu_c^2(0_+)$ 。在换路前后瞬间电容的能量一般是守恒的,所以在换路前后电容的电压应该相等。由于功率 $p = \frac{dw}{dt}$,如果在换路前后瞬间电容的能量不相等,则电源的功率为无限大,这一般是不可能的。在换路前瞬间,电感的能量为 $\frac{1}{2}Li_L^2(0_-)$,在换路后瞬间,电感的能量为 $\frac{1}{2}Li_L^2(0_+)$ 。在换路前后瞬间电感的能量一般也是守恒的,所以在换路前后电感的电流应该相等。由于功率 $p = \frac{dw}{dt}$,如果在换路前后瞬间电感的能量不相等,则电源的功率为无限大,这一般也是不可能的。

9.2.2 如何计算电路的初始条件

对于一个动态电路,其独立的初始条件是 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$,其余的是非独立初始条件。如果要计算电路的初始条件,首先应计算独立的初始条件 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 。可以由换路前的电路计算出 $u_C(0_-)$ 和 $i_L(0_-)$,然后由换路定则即可求得 $u_C(0_+)$ 和 $i_L(0_+)$ 。其次将换路后电路中的电容用一个电压源替代,这个电压源的电压值等于 $u_C(0_+)$;将换路后电路中的电感用一个电流源替代,这个电流源的电流值等于 $i_L(0_+)$;电路中的独立电源按 $t = 0_+$ 取值(如果是直流电源则不变);这样就可以画出一个换路后的等效电路。在这个等效电路中就可以求出所需要的非独立初始条件。

例 9-1 图 9-2 所示电路原已处于稳定状态,且电容 C 上无电荷。已知 $U = 100\text{V}$, $R = 4\Omega$, $R_1 = 6\Omega$, $C = 10\mu\text{F}$, $L = 3\text{H}$ 。求开关 S 闭合后瞬间各条支路电流及电容电压、电感电压。

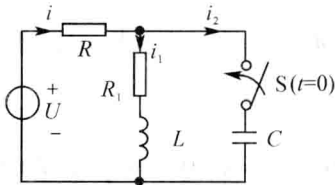


图 9-2 例 9-1 图

解 (1) 求独立初始条件。开关 S 闭合之前,电路已处于稳定状态,由于电容 C 上无电荷,所以 $u_C(0_-) = 0\text{V}$; $i_L(0_-) = \frac{U}{R + R_1} = \frac{100}{4 + 6} = 10\text{A}$ 。

(2) 画等效电路。 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 0\text{V}$; $i_L(0_+) = i_L(0_-) = 10\text{A}$ 。将换路后电路中的电

容用一个电压源替代,这个电压源的电压值等于 $u_C(0_+) = 0\text{V}$;将换路后电路中的电感用一个电流源替代,这个电流源的电流值等于 $i_L(0_+) = 10\text{A}$;电路中的独立直流电压源不变。这样就可以画出一个换路后的等效电路,如图 9-3 所示。

(3) 求非独立初始条件。

$$i(0_+) = \frac{U}{R} = \frac{100}{4} = 25\text{A}$$

$$i_1(0_+) = i_L(0_+) = 10\text{A}$$

$$i_2(0_+) = i(0_+) - i_1(0_+) = 25 - 10 = 15\text{A}$$

由于 $R_1 i_1(0_+) + u_L(0_+) = 0$, 故 $u_L(0_+) = -R_1 i_1(0_+) = -6 \times 10 = -60\text{V}$ 。

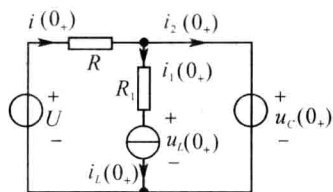


图 9-3 例 9-1 等效电路

9.3 一阶电路的零输入响应

如果动态电路在换路之后电路中无独立电源,由换路之前储能元件储存的能量在电路中产生响应,此时电路中没有外加激励,则称这种响应称为零输入响应。零输入响应实质上就是储能元件释放能量的过程。

9.3.1 R 、 C 电路的零输入响应

如图 9-4(a) 所示电路, U_0 是一个直流电压源,换路之前开关 S 接通触点 1,且电路已处于稳定状态。当 $t = 0$ 时,开关 S 由触点 1 切换到触点 2,当 $t \geq 0$ 时,试分析 R 、 C 电路中 u_C 、 u_R 、 i 的变化规律。

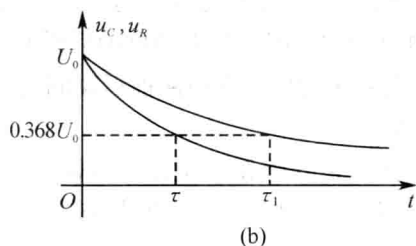
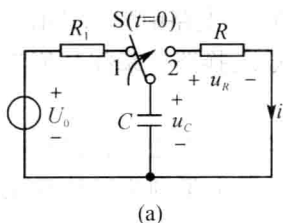


图 9-4 R 、 C 电路的零输入响应

当 $t \geq 0$ 时,在 R 、 C 回路中,可列出 KVL 方程: $u_C - u_R = 0$ 。由于 $u_R = Ri$,将 $i = -C \frac{du_C}{dt}$ 代入 KVL 方程,得到一个一阶常系数线性齐次微分方程

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad (9-9)$$

上述微分方程可以用分离变量积分法求解。在此用常系数线性齐次微分方程的一般解

法求出它的通解,其具体步骤是首先令其通解形式为

$$u_C(t) = Ae^{pt}$$

将此代入式(9-9),消去公因子 Ae^{pt} 便得到原微分方程的特征方程: $RCp + 1 = 0$ 。特征方程的特征根为: $p = -\frac{1}{RC}$ 。微分方程的通解为

$$u_C(t) = Ae^{pt} = Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (9-10)$$

其中, A 为积分常数。现在由电路的初始条件来确定积分常数: 电路在换路之前已处于稳定状态, 电容在直流稳态电路中相当于开路, 故 U_0 、 R_1 、 C 回路中的电流为零, 也就是说, 按回路的 KVL 方程可计算出换路前电容电压 $u_C(0_-) = U_0$, 即电容被充电至电源电压。由换路定则 $u_C(0_+) = u_C(0_-)$, 可以求出 $u_C(0_+) = U_0$ 。将 $t = 0_+$ 代入式(9-10), 可得到积分常数 $A = U_0$, 从而得到给定初始条件下电容电压的零输入响应

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0_+) \quad (9-11)$$

这就是在换路之后 R 、 C 电路中电容电压的变化规律。回路中的电流和电阻电压也可以计算出来, 即

$$\begin{aligned} i &= -C \frac{du_C}{dt} = -C \frac{d}{dt} (U_0 e^{-\frac{t}{RC}}) = -C \left(-\frac{1}{RC} \right) U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \\ &= \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0_+) \end{aligned} \quad (9-12)$$

$$u_R = u_C = U_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad (t \geq 0_+) \quad (9-13)$$

现根据电容电压和电阻电压的表达式, 绘出换路之后它们的变化规律如图 9-4(b) 所示。从图中可以看出, 电容电压和电阻电压都是按同样的指数衰减规律变化的。电容电压在换路前后瞬间没有发生跃变, 从初始值 U_0 开始按规律指数衰减, 从理论上讲, 当 $t = \infty$ 时, 电容电压衰减到零, 达到新的稳态。这实际上就是换路前被充电的电容换路后开始放电的物理过程。电路中的电阻电压在换路前后瞬间发生了跃变, 换路前瞬间其值为零, 换路后瞬间其值为 U_0 ; 电路中的电流在换路前后瞬间也发生了跃变, 换路前瞬间其值为零, 换路后瞬间其值为 U_0/R 。

从能量的角度来分析 R 、 C 电路的零输入响应: 电容在换路之前储存有电场能量, 在换路之后, 电容在放电过程中不断释放电场能量; 在换路之后电阻则不断消耗能量, 将电场能量转变为热能。电容储存的电场能量为

$$W_C = \frac{1}{2} C U_0^2$$

电阻消耗的能量为

$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^\infty i^2 R dt = \int_0^\infty \left(\frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \right)^2 R dt = \left[-\frac{RC}{2} \frac{U_0^2}{R} e^{-\frac{2t}{RC}} \right]_0^\infty \\ &= \frac{1}{2} C U_0^2 \end{aligned}$$

电阻消耗的能量刚好与电容器储存的电场能量相等。

9.3.2 时间常数

动态电路的过渡过程所经历的时间长短,取决于电容电压衰减的快慢。而电容电压衰减的快慢又取决于衰减指数 $\frac{1}{RC}$ 。令 $RC = \tau$, τ 称为时间常数,它的单位为秒,这是因为

$$[\tau] = [RC] = [\text{欧姆}][\text{法拉}] = \frac{[\text{伏特}][\text{库仑}]}{[\text{安培}][\text{伏特}]} = \frac{[\text{伏特}][\text{安培}][\text{秒}]}{[\text{安培}][\text{伏特}]} = [\text{秒}]$$

将 $RC = \tau$ 代入式(9-11)、式(9-12)可得到

$$u_C = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0_+) \quad (9-14)$$

$$i = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (t \geq 0_+) \quad (9-15)$$

在式(9-14)中,令 $t = \tau$,则电容电压在这一时刻的值为

$$u_C = U_0 e^{-\frac{\tau}{\tau}} = U_0 e^{-1} = 0.368 U_0$$

也就是说,在时间为 τ 这一时刻,电容电压衰减到初始电压 U_0 的36.8%,如图9-4(b)所示。换句话说, τ 就是电容电压衰减到初始电压的0.368倍所需要的时间。 τ 值越大,电压衰减越慢,图中 $\tau_1 > \tau$,相对说来 τ_1 所对应的曲线比 τ 所对应的曲线衰减要慢一些。电路的时间常数 τ 与 R 、 C 之乘积成正比,与电路的初始状态无关。在一些控制电路中,正是通过改变 R 、 C 参数来调整时间常数,以达到改变电容的放电曲线。

从理论上讲, R 、 C 电路的动态过程需要经历无限长时间才能结束,也就是说,当 $t = \infty$ 时,式(9-14)中的电压和式(9-15)中的电流才衰减到零,达到新的稳态。但实际上,当时间 $t = 5\tau$ 时, $u_C = U_0 e^{-5} = 0.007 U_0$ 。此时电容电压已接近于零,电容的放电过程已基本结束,所以工程上一般认为动态电路的动态过程持续时间为 $4\tau \sim 5\tau$ 。

例9-2 一组电容量为 $40\mu\text{F}$ 的电容器从高压电网上退出运行,在退出前瞬间电容器的电压为 3.5kV ,退出后电容器经本身的泄漏电阻放电,等效电路如图9-5所示。已知其泄漏电阻 $R = 100\text{M}\Omega$ 。(1)求电路的时间常数;(2)经过多长时间电容电压下降到 1000V ? (3)经过多长时间电容放电基本结束?

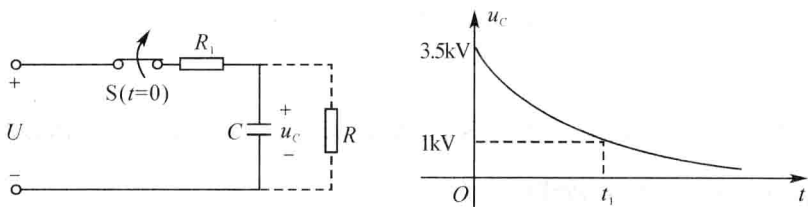


图9-5 例9-2图

解 (1) 当电容器从高压电网上退出运行,即开关 S 断开之后,就是一个 R 、 C 放电电路。由于 $u_C(0_-) = 3500\text{V}$,所以 $u_C(0_+) = u_C(0_-) = 3500\text{V}$ 。电容放电时电压的变化规律为