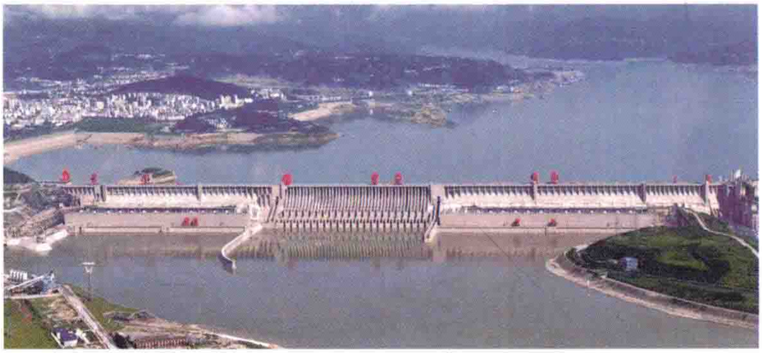
河海大学“211工程”三期资助研究生系列教材

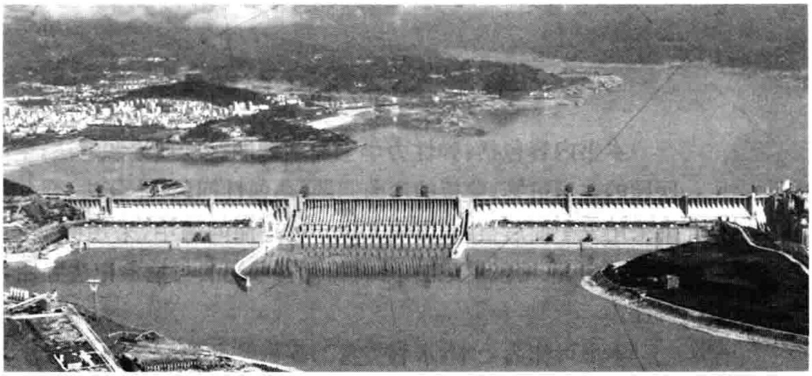


弹性力学

陈国荣 / 编著

河海大学出版社
HOHAI UNIVERSITY PRESS

河海大学"211工程"三期资助研究生系列教材



弹性力学

陈国荣/编著

河海大學出版社
HOHAI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书内容包括：弹性力学平面问题的基本理论和解法；空间问题的基本理论；空间问题的典型解答；薄板的弯曲问题；热弹性问题；差分法；变分法等。在内容排序上，本书采用先平面后空间，由浅入深。在平面问题中，采用标量记法，突出力学概念；在空间问题中，采用张量记法，并将指标符号记法与抽象记法并用，强调理论的严密性和统一性。

本书可作为土木，水利类及工程力学和研究生的弹性力学教材，也可供高等学校力学教师和工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学 / 陈国荣编著. —南京：河海大学出版社，2013.10

ISBN 978－7－5630－3575－5

Ⅰ.①弹… Ⅱ.①陈… Ⅲ.①弹性力学—研究生—教材 Ⅳ.①O343

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 291307 号

书　　名 / 弹性力学
书　　号 / ISBN 978－7－5630－3575－5/O・168
作　　者 / 陈国荣
责任编辑 / 谢业保
封面设计 / 黄　煜
出版发行 / 河海大学出版社
地　　址 / 南京市西康路 1 号(邮编：210098)
电　　话 / (025) 83786651(编辑室)　　(025) 83737852(传真)
电子信箱 / hhup@hhu. edu. cn
制　　版 / 南京紫藤制版印务中心
印　　刷 / 南京玉河印刷厂
开　　本 / 787 毫米×960 毫米　1/16　21.5 印张　433 千字
版　　次 / 2013 年 10 月第 1 版
印　　次 / 2013 年 10 月第 1 次印刷
定　　价 / 38.00 元

前　　言

本书原为河海大学“面向 21 世纪工程力学系列教材”之一，也是“国家工科基础课程（力学）教学基地”建设的教材之一，现经修订为河海大学“211 工程”资助研究生系列教材之一。

本书旨在从特殊问题开始，让读者比较容易地掌握弹性力学的基本概念和基本解法，而后，在一般性问题里，力求统一，严密，加强理论性描述，为进一步深入研究固体力学及其应用打下必要的基础。

本书在整体结构上采用徐芝纶教授的风格，先平面后空间，由浅入深。在平面问题中，采用标量记法，突出力学概念。在空间问题中，采用张量记法，并将指标符号记法与抽象记法并用，加强理论的严密性和统一性，强调张量的不变性特性，避免了曲线坐系有关方程的繁琐推演。

本教程平面问题的内容与空间问题的内容相对独立，去掉空间问题，可以作为土木、水利类工科专业本科生的教材，全部内容可以作为力学专业本科生和工科研究生的弹性力学教材，也可供高等学校力学教师和工程技术人员参考。

本教程承南京航天航空大学王鑫伟教授，东南大学佘颖禾教授主审，他们详细地审阅了本书稿，提出了许多宝贵意见；河海大学姜弘道教授、卓家寿教授，北京大学王敏中教授给本书提出了改进意见。在此，一并对他们表示衷心的感谢。

由于水平所限，书中难免存在错误和不足之处，敬请读者不吝指正。

陈 国 荣

2013 年 8 月

目　　录

第1章 绪 论

§1-1 弹性力学的内容

弹性力学，又称为**弹性理论**。弹性力学研究弹性体由于受外力作用或温度改变等原因而发生的应力、应变和位移。

弹性力学的任务，与材料力学、结构力学的任务一样，是分析各种结构物或其构件在弹性阶段的应力和位移，校核它们是否具有足够的强度、刚度和稳定性，并寻求和改进它们的计算方法。然而，这三门学科在研究对象上有所分工，在研究方法上也有所不同。

在材料力学里，基本上只研究所谓杆状构件，也就是长度远大于宽度和厚度的构件。这种构件在拉压、剪切、弯曲、扭转等作用下的应力和位移，是材料力学的主要研究内容。在结构力学里，主要是在材料力学的基础上研究杆状构件所组成的结构，也就是所谓杆件系统，如桁架、刚架等等。至于非杆状的构件，如板和壳，以及堤坝、地基等实体结构，则在弹性力学里加以研究。同时，弹性力学还可以对杆状构件作进一步的、更精确的分析。

虽然在材料力学和弹性力学里都研究杆状构件，然而研究的方法却不完全相同。在材料力学里研究杆状构件，除了从静力学、几何学、物理学三方面进行分析以外，为了简化数学推导，大都还引用一些关于构件的形变状态或应力分布的假定，因而得出的解答有时只是近似的。在弹性力学里研究杆状构件，一般都不必引用那些假定，因而得出的解答就比较精确，并且可以用来校核材料力学里得出的近似解答。

例如，在材料力学里研究直梁在横向荷载作用下的弯曲，就引用了平面截面的假定，得出的结果是：横截面上的正应力（弯应力）按直线分布。在弹性力学里研究这同一问题，就无须引用平面截面的假定。相反地，还可以用弹性力学里的分析结果来校核这个假定是否正确，并且由此判明：如果梁的高度并不远小于梁的跨度，而两者是同等大小的，那么，横截面上的正应力并不按直线分布，而是按曲线变化的，并且材料力学所给出的最大正应力将有成倍的误差。

虽然弹性力学通常是不研究杆件系统的，然而近几十年来，不少力学工作者曾经致力于弹性力学和结构力学的综合应用，使得这两门学科越来越密切结合。弹

性力学吸收了结构力学中的超静定结构分析法以后，大大扩展了它的应用范围，使得一些比较复杂的问题，本来无法求解的问题，得到解答。这些解答虽然在理论上具有一定的近似性，但应用在工程上，却是足够精确的。在近几十年间快速发展起来的有限单元法中，把连续弹性体划分成为有限大小的单元，然后用结构力学中的位移法、力法或混合法求解，更加显示了弹性力学与结构力学综合应用的良好效果。

此外，对于同一结构的各个构件，甚至对于同一构件的不同部分，分别用弹性力学和结构力学或材料力学进行计算，常常可以节省很大的工作量，而仍然能得到令人满意的结果。

总之，材料力学、结构力学和弹性力学这三门学科之间的界线不是很明显的，更不是一成不变的。我们不应当强调它们之间的分工，而应当多多发挥它们综合应用的威力。

§1－2　弹性力学的发展简介

弹性力学既是一门古老的学科，也是一门在工程应用上充满活力的学科，它的理论成果已经普遍应用于工程实践中。

弹性力学的发展最早可以追溯到17世纪。1678年英国的R. Hooke(1635—1703)，1680年法国的E. Mariotte(1620—1684)分别独立地提出了弹性体变形与所受外力成正比的定律，即Hooke定律。1704年，J. Bernoulli(1654—1705)建立了弦的振动方程，提出了张力和伸长的关系，开始了变形体力学的研究。18世纪中期，D. Bernoulli(1700—1782)和L. Euler(1707—1783)研究了弹性曲线(elastica)，并建立了受压柱体的微分方程及其失稳的临界值公式。1821年，法国的H. Navier(1785—1836)建立了弹性力学基本方程。1822年，法国的L. Cauchy(1789—1857)给出了应力和应变的严格定义，并于尔后几年导出了六面体微元的平衡微分方程，给出了各向同性和各向异性材料的广义Hooke定律，从而奠定了弹性力学的理论基础。

19世纪到20世纪初，是弹性力学大发展的时期。这一时期，弹性力学广泛用于解决工程问题，得到了许多典型解答，从而促进了弹性理论的发展，建立了许多重要的定理或原理。1855—1856年，法国的B. Saint-Venant(1797—1886)用半逆解法解出了柱体扭转和弯曲问题，并提出了著名的Saint-Venant原理。他的理论与实验结果密切吻合，为弹性理论的正确性提出了有力的证据。1862年，英国的B. Airy提出平面问题的应力函数解方法。1881年，德国的R. Hertz(1857—1894)解出了两弹性体局部接触时弹性体内的应力分布。1898年，德国的G. Kirsch在计算圆孔附近的应力分布时，发现了应力集中现象，这对提高机械、结构部件的设

计水平起到了重要作用。此外,这一时期还建立了弹性力学的能量原理:虚功原理、最小势能原理,以及功的互等定理。1872年,意大利的E. Betti(1823—1892)给出了功的互等定理的普遍证明。1873—1879年,意大利的A. Castigliano(1847—1884)建立了最小余能原理。1903年,德国的L. Prandtl(1875—1953)提出了解扭转问题的薄膜比拟法。这一时期,在用弹性理论解决工程问题时,提出了许多有效的数值方法,如Rayleigh-Ritz法,Ъ. Г. Галёркин法。20世纪30年代,苏联的H. И. Мусхелшвили(1891—1976)将保角变换等复变函数法成功地应用于求解弹性力学问题,发展了弹性力学的复变函数解法,为断裂力学的发展打下了理论基础。

20世纪,在弹性经典理论继续得到发展时,许多复杂问题也得到了深入研究,并出现了许多边缘分支,如非线性弹性理论,非线性板壳理论和稳定性分析,各向异性和非均匀体的理论,粘弹性理论,动力弹性理论等。20世纪初弹性力学广义变分原理的发展,以及20世纪60年代快速发展起来的有限单元法、边界单元法等数值方法,更为弹性力学解决工程实际问题提供了强有力的工具。

我国在20世纪30年代也开展了弹性力学的研究和推广。钱伟长、徐芝纶、胡海昌等,对我国的弹性力学教育和发展都做出了巨大的贡献,他们的优秀著作培养了一代又一代的工程师和科学家。

§1-3 弹性力学中的几个基本概念

弹性力学中经常用到的基本概念有外力、应力、应变和位移。这些概念,虽然在材料力学和结构力学里都已经用到过,但在这里仍有必要再加以详细说明。

作用于物体的外力可以分为体积力和表面力,两者也分别简称为体力和面力。

体力是分布在物体体积内的力,例如重力和惯性力。物体内各点受体力的情况,一般是不相同的。为了表明该物体在某一点P所受体力的大小和方向,在这一点取物体的一微小部分,它包含着P点而它的体积为ΔV,如图1-1(a)所示。设作用于ΔV的力为$\Delta \boldsymbol{Q}$,则体力的平均集度为$\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta V$。如果把所取的那一小部分物体不断减小,即$\Delta V$不断减小,则$\Delta \boldsymbol{Q}$和$\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta V$都将不断地改变大小、方向和作用点。现在,命$\Delta V$无限减小而趋于$P$点,假定体力为连续分布,则$\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta V$将趋于一定的极限$\boldsymbol{f}$,即

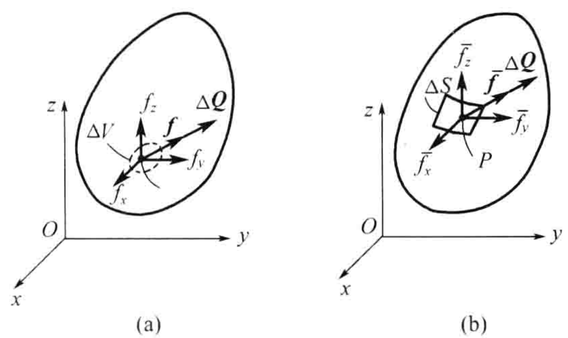


图1-1

$$\lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta V} = \boldsymbol{f}$$

这个极限矢量 $\boldsymbol{f}$,就是该物体在 P 点所受体力的集度。因为 ΔV 是标量,所以 $\boldsymbol{f}$ 的方向就是 $\Delta \boldsymbol{Q}$ 的极限方向。矢量 $\boldsymbol{f}$ 在坐标轴 x,y,z 上的投影 f_x,f_y,f_z,称为该物体在 P 点的体力分量,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。它们的因次(亦称量纲)是[力][长度]$^{-3}$。

面力是分布在物体表面上的力,例如流体压力和接触力。物体表面上各点受面力的情况,一般也是不相同的。为了表明该物体表面上某一点 P 所受面力的大小和方向,在这一点取该物体表面的一微小部分,它包含着 P 点而它的面积为 ΔS,如图 1-1(b)所示。设作用于 ΔS 的力为 $\Delta \boldsymbol{Q}$,则面力的平均集度为 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta S$。与上相似,命 ΔS 无限减小而趋于 P 点,假定面力为连续分布,则 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta S$ 将趋于一定的极限 $\overline{\boldsymbol{f}}$,即

$$\lim_{\Delta S \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta S} = \overline{\boldsymbol{f}}$$

这个极限矢量 $\overline{\boldsymbol{f}}$ 就是该物体在 P 点所受面力的集度。因为 ΔS 是标量,所以 $\boldsymbol{t}$ 的方向就是 $\Delta \boldsymbol{Q}$ 的极限方向。矢量 $\overline{\boldsymbol{f}}$ 在坐标轴 x,y,z 上的投影 $\overline{f}_x,\overline{f}_y,\overline{f}_z$,称为该物体在 P 点的面力分量,以沿坐标轴正方向为正,沿坐标轴负方向为负。它们的因次是[力][长度]$^{-2}$。

物体受了外力的作用,或由于温度有所改变,其内部将发生内力。为了研究物体在其某一点 P 处的内力,假想用经过 P 点的一个截面 mn 将该物体分为 A 和 B 两部分,而将 B 部分撇开,如图 1-2 所示。撇开的部分 B 将在截面 mn 上对留下的部分 A 作用一定的内力。取这一截面上的一微小部分,它包含着 P 点,而它的面积为 ΔA。设作用于 ΔA 上的内力为 $\Delta \boldsymbol{Q}$,则内力的平均集度,即平均应力为 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta A$。现在,命 ΔA 无限减小而趋于 P 点,假定内力为连续分布,则 $\Delta \boldsymbol{Q}/\Delta A$ 将趋于一定的极限 $\boldsymbol{S}$,即

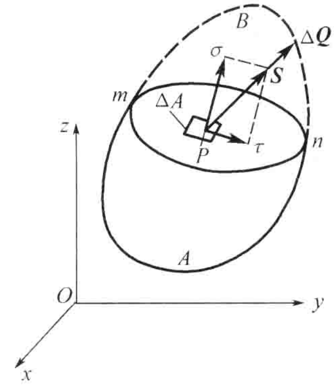


图 1-2

$$\lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta A} = \boldsymbol{S}$$

这个极限矢量 $\boldsymbol{S}$ 就是物体在截面 mn 上、在 P 点的**应力**。因为 ΔA 是标量,所以应力 $\boldsymbol{S}$ 的方向就是 $\Delta \boldsymbol{Q}$ 的极限方向。

对于应力,除了在推导某些公式的过程中以外,通常都不用它沿坐标轴方向的分量,因为这些分量和物体的变形或材料强度都没有直接的关系。与物体的变形

及材料强度直接相关的，是应力在其作用截面的法向和切向的分量，也就是**正应力** σ 和**切应力** τ，如图 1－2。应力及其分量的因次也是[力][长度]$^{-2}$。

显然可见，在物体内的同一点 P，不同截面上的应力是不同的。为了分析这一点的应力状态，即各个截面上应力的大小和方向，在这一点从物体内取出一个微小的平行六面体，它的棱边平行于坐标轴而长度分别为 $PA=\Delta x$、$PB=\Delta y$、$PC=\Delta z$，如图 1－3 所示。将每一面上的应力分解为一个正应力和两个切应力，分别与三个坐标轴平行。正应力用σ表示。为了表明这个正应力的作用面和作用方向，加上一个坐标角码。例如，正应力 σ_x 是作用在垂直于 x 轴的面上，同时也是沿着 x 轴的方向作用的。切应力用 τ 表示，并加上两个坐标角码，前一个角码表明作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表明作用方向沿着哪一个坐标轴。例如，切应力 τ_{xy} 是作用在垂直于 x 轴的面上而沿着 y 轴方向作用的。

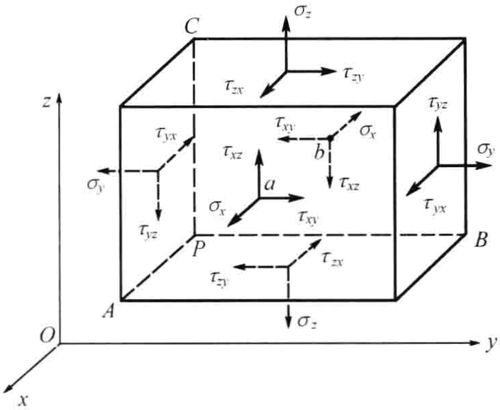


图 1－3

如果某一截面上的外法线是沿着坐标轴的正方向，这个截面就称为正面，而这个面上的应力分量就以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负。相反，如果某一个截面上的外法线是沿着坐标轴的负方向，这个截面就称为负面，而这个面上的应力分量就以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图 1－3 上所示的应力分量全部都是正的。注意，虽然上述正负号规定，对于正应力说来，结果是与材料力学中的规定相同（拉应力为正而压应力为负），但是，对于切应力说来，结果却与材料力学中的规定不完全相同。

六个切应力之间具有一定的互等关系。例如，以连接前后两面中心的直线 ab 为矩轴，列出力矩平衡方程，得到

$$2\tau_{yz}\Delta z\Delta x\,\frac{\Delta y}{2}-2\tau_{zy}\Delta y\Delta x\,\frac{\Delta z}{2}=0$$

同样可以列出其余两个相似的方程。简化以后，得出

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\quad \tau_{zx}=\tau_{xz},\quad \tau_{xy}=\tau_{yx} \tag{1-1}$$

这就证明了切应力的互等关系：作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两面交线的切应力是互等的（大小相等，正负号也相同）。因此，切应力记号的两个角码可以对调。

在这里，我们没有考虑应力由于位置不同而产生的改变（也就是把六面体中的

应力当做均匀应力)，而且也没有考虑体力的作用。实际上，即使考虑到应力随位置不同而产生的改变和体力的作用，仍然可以推导出切应力的互等关系。建议读者自行证明之。

顺便指出，如果采用材料力学中的正负号规定，则切应力的互等关系将成为

$$\tau_{yz}=-\tau_{zy}, \quad \tau_{zx}=-\tau_{xz}, \quad \tau_{xy}=-\tau_{yx}$$

显然不如采用上述规定时来得简单。但也应当指出，在利用莫尔圆(即应力圆)时，就必须采用材料力学中的规定。

以后可见，在物体的任意一点，如果已知 $\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{yz},\tau_{zx},\tau_{xy}$ 这六个应力分量，就可以求得经过该点的任意截面上的正应力和切应力。因此，上述六个应力分量可以完全确定该点的应力状态。

应变用来描述物体各部分线段长度的改变及两线段夹角的改变。为了分析物体在其某一点 P 的应变状态，在这一点沿着坐标轴 x,y,z 的正方向取三个微小的线段 PA,PB,PC，如图 1－3 所示。物体变形以后，这三个线段的长度以及它们之间的直角一般都将有所改变。各线段的每单位长度的伸缩，即单位伸缩或相对伸缩，称为正应变；两线段之间的直角的改变，用弧度表示，称为切应变。正应变用字母 ε 表示，如 ε_x 表示 x 方向的线段 PA 的正应变，其余类推。正应变以伸长时为正，缩短时为负，与正应力的正负号规定相适应。切应变用字母 γ 表示，如 γ_{yz} 表示 y 与 z 两方向的线段(即 PB 与 PC)之间的直角的改变，其余类推。切应变以直角变小时为正，变大时为负，与切应力的正负号规定相适应。正应变和切应变都是无因次的数量。

以后可见，在物体的任意一点，如果已知 $\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{yz},\gamma_{zx},\gamma_{xy}$ 这六个应变分量，就可以求得经过该点的任一线段的正应变，也可以求得经过该点的任意两个线段之间的角度的改变。因此，这六个应变分量，可以完全确定该点的应变状态。

顺便指出，物体变形与应变是两个不同的概念，有些书中把这两个概念混用了。变形指的是物体各部分形状的改变，物体内任意线段的长度和方向的改变确定了物体的变形，以后将看到，位移的导数能确定线段的长度和方向的改变。而应变只能确定线段长度的改变和两线段夹角的改变。

位移就是物体内质点位置的移动。物体内任意一点的位移，用它在 x,y,z 三轴上的投影 u,v,w 来表示，以沿坐标轴正方向的为正，沿坐标轴负方向的为负。这三个投影称为该点的位移分量。位移及其分量的因次是[长度]。

一般而论，弹性体内任意一点的体力分量、面力分量、应力分量、应变分量和位移分量，都是随着该点的位置而变的，因而都是位置坐标的函数。

在弹性力学的问题里，通常是已知物体的几何形状和大小(即已知物体的边界)，已知物体的弹性常数，物体所受的体力，物体边界上的约束情况或面力，须要

求解应力分量、应变分量和位移分量。

§1-4 弹性力学中的基本假定

为了由弹性力学问题中的已知量求出未知量，必须建立这些已知量与未知量之间的关系，以及各个未知量之间的关系，从而导出一套求解的方程。在导出方程时，可以从三个方面进行分析。一方面是静力学方面，由此建立应力、体力、面力之间的关系。另一方面是几何学方面，由此建立应变、位移和边界位移之间的关系。再一个方面是物理学方面，由此建立应变与应力之间的关系。

在导出方程时，如果精确考虑所有各方面的因素，则导出的方程非常复杂，实际上不可能求解。因此，通常必须按照研究对象的性质，联系求解问题的范围，作出若干基本假定，从而略去一些暂不考虑的因素，使得方程的求解成为可能。在本教程中，除了个别的章节以外，都采用如下的基本假定。

连续性假定：假定整个物体的体积都被组成这个物体的介质所填满，不留下任何空隙。这样，物体内的一些物理量，例如应力、应变、位移等等，才可能是连续的，因而才可能用坐标的连续函数来表示它们的变化规律。实际上，一切物体都是由微粒组成的，都不能符合上述假定。但是，可以想见，只要微粒的尺寸以及相邻微粒之间的距离都比物体的尺寸小得很多，那么，关于物体连续性的假定，就不会引起显著的误差。

完全弹性假定：假定物体服从虎克定律——应变与引起该应变的应力成比例；反映这种比例关系的常数，即所谓弹性常数，并不随应力或应变的大小和符号而变。具体地讲，当应力增大到若干倍时，应变也增大到同一倍数；当应力减小到若干分之一时，应变也减小到同一分数；当应力减小为零时，应变也减小为零（没有任何剩余应变）；当应力反其符号时，应变也反其符号，而且两者仍然保持其同样的比例关系。由材料力学已知：脆性材料的物体，在应力未超过比例极限以前，可以认为是近似的完全弹性体；韧性材料的物体，在应力未达到屈服极限以前，也可以认为是近似的完全弹性体。

均匀性假定：假定整个物体是由同一材料组成的。这样，整个物体的所有各部分才具有相同的弹性，因而物体的弹性常数才不随位置坐标而变，可以取出该物体的任意一小部分来加以分析，然后把分析的结果应用于整个物体。如果物体是由两种或两种以上的材料组成的，那么，也只要每一种材料的颗粒远远小于物体而且在物体内均匀分布，这个物体也就可以当做是均匀的。对于明显的非均匀体问题，只能作为接触问题来处理，例如隧洞衬砌、基础梁板等的问题，就属于此类。

各向同性假定：假定物体的弹性在所有各个方向都相同。这样，物体的弹性常数才不随方向而变。显然，木材和竹材的构件都不能当做各向同性体。至于钢材

的构件，虽然它含有各向异性的晶体，但由于晶体很微小，而且是随机排列的，所以钢材构件的弹性(包含无数多微小晶体随机排列时的统观弹性)，可以认为是各向相同的。

凡是符合以上四个假定的物体，就称为理想弹性体。

小变形假定：假定物体受力以后，整个物体所有各点的位移都远远小于物体原来的尺寸，并且应变和转角都远小于 1。这样，在建立物体变形以后的平衡方程时，就可以用变形以前的尺寸来代替变形以后的尺寸，而不致引起显著的误差，并且，在考察物体的应变及位移时，转角和应变的二次幂或乘积都可以略去不计。这样，可使得弹性力学中的代数方程和微分方程简化为线性方程。

习 题

1-1 试举例说明，什么是均匀的各向异性体，什么是非均匀的各向同性体，什么是非均匀的各向异性体。

1-2 一般的混凝土构件和钢筋混凝土构件能否作为理想弹性体？一般的岩质地基和土质地基能否作为理想弹性体？

1-3 试回忆，在学习材料力学时，曾经遇到过哪些非线性问题。它们的解答和线性问题的解答有什么重大的差别？

1-4 应力、应变的正负号可否有另外一种规定？