孙蕾 蔡剑 主编

微积分

跟踪习题册

（下）

清华大学出版社

孙蕾 蔡剑 主编

微积分

跟踪习题册

（下）

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是根据经管类本科微积分课程教学大纲的基本要求，兼顾研究生入学考试数学（三）的考试大纲而编写的习题册，分为上、下两册，下册内容包括定积分、多元微分学、二重积分、无穷级数以及微分方程与差分方程.

本书与现行微积分教学同步，紧扣教材内容，力求理论联系实际，着重培养学生分析问题和解决问题的能力. 本书可作为民办高校、独立学院经管类各专业本科生或者成教、电大相关专业的学生学习微积分课程的辅导用书，也可供从事微积分教学的教师参考.

图书在版编目(CIP)数据

微积分跟踪习题册. 下/孙蕾, 蔡剑主编. --北京：清华大学出版社，2015
ISBN 978-7-302-38700-8

I. ①微… II. ①孙… ②蔡… III. ①微积分–高等学校–习题集 IV. ①O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 284053 号

责任编辑：佟丽霞
封面设计：常雪影
责任校对：赵丽敏
责任印制：宋 林

出版发行：清华大学出版社
网 址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地 址：北京清华大学学研大厦 A 座 **邮 编**：100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京国马印刷厂
经 销：全国新华书店
开 本：185mm×260mm **印 张**：8.25 **字 数**：197 千字
版 次：2015 年 1 月第 1 版 **印 次**：2015 年 1 月第1 次印刷
印 数：1～2500
定 价：19.00 元

产品编号：060591-01

前　言

本书是根据经管类本科微积分课程教学大纲的基本要求，兼顾研究生入学考试数学（三）的考试大纲而编写的习题册，分为上、下两册，下册内容包括定积分、多元微分学、二重积分、无穷级数以及微分方程与差分方程.

编者在总结多年本科数学教学经验，探索独立学院本科数学教学发展动向，分析同类教材发展趋势的基础上编写了本书. 本书适合民办高校、独立学院经管类各专业本科生使用，也可供成教、电大相关专业选用.

本书与现行微积分教学同步，紧扣教材内容，力求理论联系实际，着重培养学生分析问题和解决问题的能力. 本书体现了数学教学循序渐进、由浅入深的特点，习题既包含“基础部分”，侧重对知识点的涵盖，对基础知识、基本技能的考查，对重点知识的强调；又包含“提高部分”，题目新颖灵活、难度较高并且具有一定综合性，提高部分题目都标有*号. 全书每节最后配备带有启发性的思考题，旨在加强学生对基本概念、基本结论和一些解题方法的理解. 每章最后配备一套归纳、总结和深化全章内容的总习题. 书末对全书绝大部分习题给出了答案或提示，且思考题给出了具体解题过程. 最后附有四套期末试题及参考答案与评分标准，供学生期末复习参考. 加*号的题目和思考题均可作为选做题，教师可指导学生根据自身情况选作.

本习题册的形式为学生作业本，每道题均留有答题空间，学生可直接在上面求解，无需抄作业题，不需另备作业本，便于资料的保留，同时也便于教师批阅和收发.

本书由孙蕾、蔡剑编写，由孙蕾统稿.

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中的疏漏之处在所难免，恳请广大使用者批评指正.

编者

2014 年 10 月

目　录

第五章　定　积　分

第一节　定积分的概念与性质

1. 选择题

(1) 函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续是它在该区间上可积的 (　　).

(A) 必要条件　　(B) 充分条件　　(C) 充要条件　　(D) 无关条件

(2) 设 $a=\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x,\ b=\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$，则 (　　).

(A) $a=b$　　(B) $a>b$　　(C) $a<b$　　(D) 大小无法比较

(3) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^b \sin x^2\mathrm{d}x=$ (　　).

(A) $\sin x^2$　　(B) $-2x\cos x^2$　　(C) 0　　(D) $\sin b^2-\sin a^2$

(4) 曲线 $y=x(x-1)(2-x)$ 与 x 轴所围成的图形的面积可表示为 (　　).

(A) $-\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

(B) $\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x-\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

(C) $-\int_0^1 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x+\int_1^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

(D) $\int_0^2 x(x-1)(2-x)\mathrm{d}x$

*__2__. 利用定积分定义计算 $\int_0^1 x^2\mathrm{d}x$.

*3. 利用定积分的几何意义，说明下列等式：

(1) $\int_{-\pi}^{\pi}\sin x\mathrm{d}x=0$;　　(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x=2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\mathrm{d}x$.

4. 估计下列定积分的值：

(1) $\int_{1}^{4}\left(x^{2}-1\right)\mathrm{d}x$;　　(2) $\int_{0}^{2}\mathrm{e}^{x^{2}-x}\mathrm{d}x$.

5. 比较下列各题中的两个定积分的大小：

(1) $I_1=\int_{0}^{1}x^{2}\mathrm{d}x$, $I_2=\int_{0}^{1}x^{4}\mathrm{d}x$;　　(2) $I_1=\int_{0}^{1}(1+x)\mathrm{d}x$, $I_2=\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x$.

6. 利用定积分中值定理求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^a \dfrac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x \quad (0<a<1)$.

7. (1) 利用定积分几何意义计算 $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$;

(2) 设 $f(x)$ 为连续函数，且满足 $f(x)=1+\sqrt{1-x^2}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，求 $f(x)$.

***思考题**：定积分性质中指出，若 $f(x),g(x)$ 在 $[a,b]$ 上都可积，则 $f(x)+g(x)$ 或 $f(x)g(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可积. 这一性质之逆成立吗？为什么？

第二节　微积分基本公式

1. 计算：

(1) 求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^3}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

*(2) 求 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin x}^{\cos x}\cos\left(\pi t^2\right)\mathrm{d}t$.

(3) 已知 $\int_x^a f(t)\mathrm{d}t=\sin(a-x)^2$，求 $f(x)$.

(4) 求 $f(x)=\int_0^x(1-t^2)\mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}t$ 的单调增加区间.

(5) 设 y 是 x 的函数，满足 $\int_0^y \mathrm{e}^t\mathrm{d}t+\int_0^x \cos t\mathrm{d}t=0$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

*(6) 若函数 $f(x)$ 具有连续的导数，求 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x (x-t)f'(t)\mathrm{d}t$.

2. 求函数 $f(x)=\int_0^x t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ 的极值.

3. 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x \cos t^2 \mathrm{d}t}{x}$;

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^1 \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$.

4. 利用定积分定义求下列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}$.

5. 求下列定积分：

(1) $\int_1^2\left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)\mathrm{d}x$;

(2) $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-x^2}}$;

(3) $\int_{-1}^0\frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2 x\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}x, & x<1,\\ x^2, & x\geqslant 1,\end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

7. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sin x, & 0\leqslant x\leqslant \pi,\\ 0, & x<0 \text{ 或 } x>\pi,\end{cases}$ 求 $\varPhi(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内的表达式.

***思考题:** 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 与 $\int_x^b f(u)\mathrm{d}u$ 是 x 的函数还是 t 与 u 的函数？它们的导数存在吗？如存在等于什么？

第三节　定积分的换元法和分部积分法

1. 计算：

(1) 已知 $f(x)$ 的一个原函数是 x^2，求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(-\sin x)\cos x\mathrm{d}x$.

(2) 求 $\int_{-1}^{2} \mathrm{e}^{|x|}\mathrm{d}x$.

2. 计算下列定积分：

(1) $\int_{-2}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{(9+4x)^3}$;

(2) $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1+x^2}}$;

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi$;

(4) $\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x}}$;

(5) $\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+\ln x}}$;　　　　(6) $\int_0^\pi \sqrt{1+\cos 2x}\,\mathrm{d}x$.

3. 利用函数奇偶性计算下列定积分：

(1) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;　　　　(2) $\int_{-5}^{5}\left(\frac{x^2\sin x^3}{x^4+2x^2+1}+\cos x\right)\mathrm{d}x$.

4. 计算下列定积分：

(1) $\int_0^1 x\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$;　　　　(2) $\int_1^4 \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{2\pi} x\sin x\mathrm{d}x$;

(4) $\int_0^1 x\arctan x\mathrm{d}x$;

(5) $\int_1^{\mathrm{e}} \sin(\ln x)\mathrm{d}x$;

(6) $\int_0^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\mathrm{d}x$;

(7) $\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\mathrm{d}x$;

*(8) $\int_0^{\pi} (x\sin x)^2\mathrm{d}x$.

5. 若 $f(x)$ 具有连续的导数，且 $\int_0^{\pi} f(x)\sin x\mathrm{d}x = k$，求 $\int_0^{\pi} f'(x)\cos x\mathrm{d}x$.

6. 设 $f(x)$ 可导，且 $f(0)=2$， $f(2)=3$， $f'(2)=5$，求 $\int_0^1 xf''(2x)\mathrm{d}x$.

***思考题**：指出求 $\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}}$ 的解法中的错误，并写出正确的解法.

解 令 $x=\sec t$，$t:\dfrac{2\pi}{3}\to\dfrac{3\pi}{4}$，$\mathrm{d}x=\tan t\sec t\mathrm{d}t$，于是

$$\int_{-2}^{-\sqrt{2}} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}} \frac{1}{\sec t\cdot\tan t}\sec t\cdot\tan t\mathrm{d}t = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}t = \frac{\pi}{12}.$$