

罗长青 编著

—— 初等数学

解题规律 研究

可以说，数学的全部内容就是问题和解。解题是学数学的人最基本的实践活动。学生从小学到大学解过成千上万道数学题，但或许从未对解题活动自身进行研究，也很少对一般解题方法，特别是解题思维方法进行全面系统的考察……

初等数学

解题规律 研究

罗长青 编著



 重庆出版社

图书在版编目(CIP)数据

初等数学解题规律研究/罗长青编著. —重庆:重庆出版社, 2004.6

ISBN 7-5366-6579-2/O·43

I.初... II.罗... III.初等数学—解题 IV.012-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 108475 号



初等数学解题规律研究

罗长青 编著

责任编辑 黄友六

封面设计 朱 江

技术设计 刘忠凤

重庆出版社出版、发行

(重庆长江二路205号)

新华书店经销

重庆华林天美彩色报刊印务有限公司印刷

开本890×1240 1/32 印张 14

字数370千 插图 2

2004年6月第1版

2004年6月第1版第1次印刷

印数 1- 1100

ISBN 7-5366-6579-2/O·43

定价:25.00元

编者的话

在学校领导关心、同事支持和学生要求下,本书终于能和读者见面.书名中冒昧地用了“规律研究”四个字,为的是抛砖引玉,引起同行对这一问题的关注.

书中力求用集合论观点统一各部分内容的叙述,将解题思维看做解题经验与创新思维的辩证统一和矛盾运动,突出解题中的思维过程和相关学科新理论在解题活动中的运用.

本书采用低起点、高要求、小跨度、大平台式的叙述方式,取材广泛,深入浅出,在初等数学范围内详细研讨了解数学题的思维原则、策略和方法,旨在帮助读者更新数学观念,发展数学思维,经济而有效地提高解题能力.

为方便阅读和教学,书中在不增加读者负担的前提下,配有适量思考与练习题,并对大部分练习在书末附上详尽解答,以便读者解题时能及时从中得到信息反馈.

我要特别感谢张景中院士、王子兴教授、任樟辉教授,他们的著作给我提供了不少帮助,我甚至多处引用过他们书中的材料.本书在编写过程中,还参阅过多种著作,其中主要部分已列在书末,对已列出或未列出的著作的作者,在此一并表示诚挚的谢意.

学校科研处和重庆出版社的有关同志为本书顺利出版做了大量细致工作,老朋友丁运才同志为封面设计提供了帮助,罗光耀老师挤出时间阅读书稿,并提出宝贵意见,在此表示深深的感谢.

因本人教学任务重,编写时间仓促,错误之处想必甚多,敬请同行赐教,并希读者提出宝贵意见.

2004年4月于重庆工商大学翠湖边

目 录

前 言

一	为什么要开设解题规律研究课	(1)
二	开设解题规律研究课的目标	(3)
三	掌握解题规律是学好数学、提高数学素养的重要一环	(5)
	思考与练习 1	(8)

第一部分 解题有规律可循

一	解题规律研究的历史和现状	(9)
§1	历史和现状	(10)
§2	国内外数学竞赛情况综述	(12)
	思考与练习 2	(14)
二	解题是一项系统工程	(14)
§1	题和解题	(14)
§2	解题要简捷合理	(19)
§3	解题过程及解题能力分析	(30)
§4	解题是一项系统工程	(36)
	思考与练习 3	(39)
三	解题的思维流程	(39)
§1	审题	(40)

§ 2	联想	(43)
§ 3	构思	(48)
§ 4	变换	(49)
§ 5	评价和决策	(51)
§ 6	执行和反思	(52)
§ 7	范例	(54)
	思考与练习 4	(59)
四	解题的基本思路和方法——化归	(60)
	思考与练习 5	(65)
五	解题的原则和策略	(65)
§ 1	相关概念	(65)
§ 2	解题的原则和策略	(68)
§ 3	关于解题的条件和条件创造	(70)
	思考与练习 6	(72)
六	解题思维是一种创造性的思维	(73)
	思考与练习 7	(83)
七	美学方法在解题中的运用	(83)
	思考与练习 8	(95)

第二部分 从解题中学习解题

一	正整数	(96)
§ 1	数制	(96)
§ 2	奇偶分析法	(103)
	思考与练习 9	(107)
二	数的整除性	(108)
§ 1	数的整除性	(108)
§ 2	完全平方数	(115)
	思考与练习 10	(120)

三	Dirichlet 原则	(121)
§ 1	基本原理	(121)
§ 2	应用举例	(123)
§ 3	竞赛题选解	(130)
	思考与练习 11	(139)
四	整数三角形	(140)
§ 1	整数三角形	(140)
§ 2	整数勾股形	(143)
§ 3	Heron 三角形	(149)
§ 4	Fibonacci 三角形	(153)
	思考与练习 12	(154)
五	图形覆盖	(154)
§ 1	相关概念及基本原则	(154)
§ 2	凸图形与 Helly 定理	(157)
§ 3	解题方法	(158)
§ 4	竞赛题选解	(162)
§ 5	关于棋盘覆盖	(168)
	思考与练习 13	(172)
六	面积方法	(173)
§ 1	背景资料	(173)
§ 2	面积法体系的建立	(174)
§ 3	应用举例	(179)
§ 4	蝴蝶定理及其他	(183)
	思考与练习 14	(191)
七	组合问题	(192)
§ 1	基础知识	(192)
§ 2	解题方法举例	(194)
§ 3	凸 n 边形问题	(202)
§ 4	竞赛题选解	(204)

思考与练习 15	(214)
八 容斥原理	(215)
§1 基本原理	(215)
§2 应用举例	(217)
思考与练习 16	(223)
九 四面体问题	(224)
§1 知识概述	(224)
§2 问题选解	(229)
思考与练习 17	(236)
十 不定方程	(237)
§1 基本理论	(237)
§2 解法及应用举例	(242)
思考与练习 18	(246)
十一 不等式问题	(246)
§1 基本知识	(246)
§2 解题技巧与方法	(252)
思考与练习 19	(262)
十二 递归方法	(263)
§1 什么是递归方法	(263)
§2 等比差数列及其应用	(268)
§3 二阶线性递归数列	(273)
§4 Fibonacci 数列	(280)
思考与练习 20	(284)
十三 函数问题	(284)
§1 函数的最值	(285)
§2 函数方程	(292)
思考与练习 21	(300)

第三部分 解题有法但解无定法

一 几种常用的数学方法	(303)
§1 特殊探路法	(303)
思考与练习 22	(310)
§2 辅助元素法	(310)
思考与练习 23	(319)
§3 数形转化法	(320)
思考与练习 24	(328)
§4 构造性方法	(329)
思考与练习 25	(344)
二 一题可以多解	(345)
§1 综述	(345)
§2 范例	(355)
思考与练习 26	(368)
三 移花接木,为我所用	(368)
§1 中途点法	(368)
§2 模拟法	(373)
§3 探索法	(377)
思考与练习 27	(385)
四 发展元认知,提高解题能力	(386)
§1 什么是元认知	(386)
§2 发展元认知,提高解题能力	(387)
思考与练习 28	(389)
五 通过解题学习数学化	(390)
§1 什么是数学化	(390)
§2 数学化观念对解题的指导意义	(391)
§3 努力在解题活动中实现数学化	(392)

思考与练习 29	(399)
部分“思考与练习”参考答案或提示	(400)
主要参考文献	(437)

真奇怪,我们期望学生学习,然而却很少教给他们解决问题的思维策略.

——诺曼(著名心理学家)

前 言

一 为什么要开设解题规律研究课

我曾经长期从事数学教育专业的专业课教学,在教学中对学生学习过程中经历的一种“怪圈”深有体会.他们在中学全力学习初等数学内容,上大学后一心学习高等数学的各个分支,大学毕业时,初等数学已忘记得差不多了.走上工作岗位,又把高等数学丢在一边,再花功夫重新熟悉初等数学的内容.

没有想到,由此产生的问题竟是个“世界难题”.

我在前后几届学生的调查中发现,他们在大学学习期间,一般把大部分的精力都用在高等数学的学习上,对初等数学的复习及研究则无暇顾及,也提不起兴趣.

由于思想上重视不够,在课程设置方面又缺少相关的保证,所以经过几年大学学习之后,也许他们可以根据一定的程序和方法解一些比较繁难的高等数学问题,但解内容广泛且灵活性较大的初等数学问题的能力却不但没有增强,反而显得很弱.没有掌握一般的探索程序,没有相对稳定的思考模式,思维混乱,解题是否成功具有很大的随机性,结论正确与否没有客观评判标准.在解题过程中,不是推理不严,表述不全,便是不能正确运用基础知识、逻辑手段和推理方

法去化解并解决相关问题;面对一些比较新颖的非标准问题或开放性问题,往往不知从何入手,对各种数学竞赛题更是望而生畏.他们解起初等数学问题来,酷似棋场中一个水平不高的棋手,盲目移动着棋子,不知眼下该做什么,对整个棋局缺乏总体把握意识,只能“尝试错误”,见子打子,停留在十分初级的认识阶段.

事实说明,他们缺乏解题规律方面的系统知识,没有形成自己关于解题规律的科学认知结构,不善于进行创造性的解题思维.

如果说一个学生学了不少数学理论知识和计算方法,但没有掌握解数学题的一般规律,对他深入进行其他专业的学习还不致出现太大的障碍,那么对于师范专业的学生,就该另当别论了.因为他们未来的教学工作中,会经常面对思想活跃、求知欲旺盛、极富钻研精神的青少年学生向他提出的各种各样的数学问题.如不能准确及时地解决这些问题,就可能挫伤学生数学学习的积极性,减低他们学习数学的兴趣,甚至有损于教师在他们心目中的形象和信誉,进而影响到整个数学教学的质量.

美国当代著名数学家 P. R. Halmos 提出:“问题是数学的心脏.”他认为,“数学家存在的主要理由就是解问题,因此,数学的真正组成部分是问题和解.”*

从为解决代数方程可解性条件而创立的“伽罗瓦理论”,为求平面图形面积和立体体积而发明的微积分,为解决博弈取胜问题而产生的概率论,为证明费尔马大定理而提出的理想数理论等等,到 David Hilbert 在 1900 年第二届国际数学家代表大会上提出 23 个问题对 20 世纪数学发展所产生的巨大而深远的影响,无不充分说明,数学问题是数学的生命和活力之所在,是数学发展的永不枯竭的源泉.

解问题不仅是数学家全部活动的真正目的,也是所有学数学的人的最基本的实践活动.我们的学生,从小学读到大学,在十多年里,

* P. R. Halmos:《数学的心脏》,弥静译,《数学通报》1982 年第 4 期.

解过的数学题成千上万,但遗憾的是,他们一直没有机会对自己的解题(思维)活动进行认真反思和客观而系统地评审,让他们的解题经验升华为对一般解题规律的认知,来提高思维的能动性、指向性和科学性,这就不但大大缩小了他们可解问题的范围,限制了他们解题所能达到的难度和高度,增大了他们解题取得成功的偶然性,使经过长期努力才获得的数学知识和技能积淀在解题活动中得不到正常有效的发挥。

如何解决上述问题呢?

书店的书架上摆放着各种各样的《数学题解》,鼓励学生去多读几本这样的书行吗?不行!因为这些书中除了各种各样题目的详细解答之外,往往看不出解题的探索 and 思维过程,学生从中得到的也许只是模仿的本领,而不是可以迁移和创新的能力。

让学生去钻研思维心理学、创造学、数学方法论吗?也不行。因为这些又毕竟各是一个分支或一门学问,不是一下子就能掌握的,即使掌握了,对于数学解题而言,也有一个困难的心理融合和知识转换的过程。

这就是为什么我们要在学生中开设解题规律研究课的原因。

二 开设解题规律研究课的目标

根据师范院校的培养目标,作为一名高师院校的毕业生,除了必须具有较为系统而坚实的数学理论知识,懂得中学数学教学的一般规律之外,还必须具有灵活运用所学知识分析和解决数学问题(主要是初等数学问题)的能力。这种能力,虽说在他们学习数学的过程中已有不同程度的提高,但那就像施氮肥照样能促进作物果实生长一样,实际得到的只是理论学习的“副产物”。因为,即使是初等数学研究课,由于更多地要照顾知识本身的系统性,所以不能把着重点放在对解题的原则、策略、思路及方法的探究上,甚至不可能太多地涉及综合题及非标准问题的解法,也不可能按照解题中用的数学思想

或方法将问题进行分类研究. 因此, 有必要在这些学生中专门开设一门课, 有目的、有计划地培养他们用数学的意识和解各种数学问题的一般能力, 争取用最有效、最经济的方法把这一能力提高到新的层次上.

为此, 我们从上世纪 80 年代中期开始, 尝试在我校数学教育专业开设“解题规律研究”课, 探索解题过程中思维活动所经历的各个基本阶段, 进行经济有效思维的正确方法和为提高解题能力需要重点关注与发展的思维形式, 总结寻找解题路径, 发现解题线索的技巧与方法, 并讨论这些方法在解题过程中的具体运用. 以此帮助学生提高认知水平, 在解题时自觉进行心理调节, 有效控制自己的思维流程, 达到优化解题思维的目标.

同时, 开设这门课还可以帮助学生熟悉中学数学教学内容, 深入理解其中的精神、思想和方法, 培养他们钻研初等数学问题的兴趣, 激发他们的探索和创新精神, 进而帮助他们巩固专业思想、坚定搞好教学工作的信心和终身从事数学教学的勇气. 事实证明, 这是因材施教提高学生专业素质的有效途径.

我们将该课作为学生一门必修的选修课, 在“大三”或“大四”开设, 学时数为 54 或 72 (周 3 或周 4), 分单元或专题讲授, 一学期授完.

我们给自己确定的课程设置目标是:

1. 帮助学生掌握解初等数学问题的基本原则、策略和方法, 发展数学思维, 提高灵活运用基础知识、基本技能和数学观念解决问题的能力.

2. 引导学生钻研并逐步熟悉初等数学问题 (包括数学竞赛问题), 培养他们研究数学问题的兴趣, 促进专业思想的进一步巩固.

在教学中, 首先由教师归纳总结本专题的基本理论及方法, 通过对典型例题的分析说明这些理论及方法的运用, 并在学生完成适量作业之后, 组织他们开展专题讨论, 总结解题的成功体验及思维规律, 引导学生在对一系列精心设计编排的问题的探究中得到思想方

法上的深刻启迪.

根据多年的经验,我们深感在教学中必须注意以下几个问题:

1. 强化学生在学习过程中的主体地位. 采用讨论式和探索式的教学方法,充分调动学生学习的积极性和创造性,以问题为中心,展开对解题过程中思维规律和策略的探究. 把教学过程作为学生主动学习、主动建构并获得发展的过程.

2. 在教学过程中贯穿数学精神和思想的主线,着重研究解题的思维模式,探究方法和原则与策略. 因为这些才是学生全部解题能力中的“魂”,是他们可以广泛迁移和终生受用的东西.

3. 突出那些在解题过程中反复运用的数学原理和方法. 在面对一个数学问题时,重在解题思路的探寻和分析上,不搞题海战术和题型归纳,让学生在解题过程中加深对相关知识及数学结构的理解,从根本上提高数学思维的品质.

4. 在加强一般能力培养的同时,重点发展以下几种能力:

- | | |
|-------------|-----------------|
| (1) 观察实验能力; | (2) 发现并提出问题的能力; |
| (3) 猜想能力; | (4) 直觉思维能力; |
| (5) 元认知能力; | (6) 辩证思维能力. |

三 掌握解题规律是学好数学、提高数学素养的重要一环

从数学学习的特点来看,学习数学知识的过程是一个认识(学习理论知识)——实践(解数学题)——再认识(从数量关系和空间形式的角度去认识实际)——再实践(解决实际问题)的过程. 所以数学教学过程,应是一个不断提出问题、分析问题和解决问题的过程,要在教学中始终把解题作为学生掌握数学知识、培养数学技能、发展数学思维、提高数学能力的不可缺少的实践环节.

通过这样的实践,学生能从中获得如下三方面的能力:

1. 从现实世界中发现和提出数学问题或从已掌握的数学知识中提出新的数学问题的能力.

2. 对实际事物或所学数学知识进行观察、实验、类比、归纳、抽象、概括,实现从感性认识向理性认识飞跃,得出相应概念的能力。

3. 运用所得概念和已有知识进行判断、推理,得出新的数学命题或原理的能力。

这些正是数学家发现数学新规律的全部思维过程的生动再现,是需要在学生中着力培养,并通过学生在下一代青少年中着力培养并使之发扬光大的创造性思维和创造性能力。

数学解题对思维的锻炼,像慢跑对身体的锻炼一样,是全面而持久的。学生只有通过解题实践,才可以逐步掌握数学探究、发现和证明的方法,逐渐领悟数学的精神和思想,树立正确的观念和信念,逐步学会进行数学思维的方法,提高思维的品质。此间,教师如能及时给予恰当的指引,便可以使学生逐步独立地去发现数学概念、定理、公式和法则的一些新功能,逐步学会从多角度、多层次去观察和探究同一数学问题,尝试用自己已知的数学方法独立地组成新方法,提高对数学美的鉴赏能力和对数学结构的洞察能力,增强对探讨新问题、发现新解法、新知识的兴趣。这些都是学生进行数学创新思维,开展数学创新活动的重要特征。

我们可以毫不夸张地说,在数学中,创造性思维形成和发展的最有效的途径是通过解题训练实现的。

可是,现有的数学课程采用“烧中段”式的课程编制模式和以知识单元构筑教材框架的编写体例,学生从中见到的只是一大堆公理、定义、定理、公式和法则,加上大量的抽象推理与证明,看不出里面有活的精神和思想,感受不到数学家们发现和创造的过程与艰辛,使他们误认为数学只是枯燥乏味的结论,最多不过是一种用作计算的工具,因而提不起学习的兴趣。这不仅严重影响到他们对该课的学习,而且有碍于他们数学素质的发展。

解题活动经历了创造性思维的基本过程。在此过程中,不仅要用上数学的知识和技能,还要用上数学的精神、思想和方法,通过解题不仅可以从中体验发现过程的各种心理感受,还可以陶冶人的性格

和情操,使一个人的观察、分析、比较、重组、抽象、概括、归纳、演绎、猜想、建构、文字表达、评价反思等一系列能力和用数学的意识,都得到发展和提高。

解题规律研究课正是通过对上述问题系统深入的探索,采用行之有效的方法来促进学生数学素质和综合能力的提高。

随着经济全球化趋势的进一步增强,随着国际上科技竞争的日益激烈,随着信息化社会的加速到来,国家对高素质、创新型人才的需求愈来愈迫切,因此对学校教育提出了更高要求。其中,学生的数学学习首当其冲。因为,数学是进行各种创新活动的工具、技术和手段。要让数学在社会生活中担此重任,学生在校学习的就应是“创新的数学”,创新的数学不是从“听课—巩固训练—模仿”的学习模式中学到的,而是从充满创新的数学解题活动中学到的,从数学解题的探索和发现过程中领悟的,数学创新的手段和方法,正是寓于解题的探索过程之中。

在当今社会,数学中的探索和创新方法远比那些通过电脑能完成的数学计算和证明重要。随着应用技术的进步,这一点越来越突出地显现出来。

现代科学技术中,任何重大发现和成果无一不与计算机相联系,但这丝毫没有减低探索和创新方法的重要性,相反,更加强了它的地位。因为计算机的工作离不开软件,“从本质上看,任何计算机软件都是某种数学方法的具体应用,数学方法的水平有多高,软件的水平就有多高。”所以,能根据一定的探索与创新的数学思想和方法提出问题、分析问题、解决问题,将逐步成为每个公民必须具备的基本素养。正因为如此,我国数学教育正经历着由局部性改变向素质教育的整体性改革转移的历史变革,以适应快速发展的形势,这正好从一个侧面说明,在数学教学中加强解题规律研究教学的必要性和重要性——因为掌握解题规律是学好数学、提高数学素养的重要一环。