金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997

理工社

2014 考研数学终极决胜篇

考研数学 数学二

大题满分技巧揭秘

金榜考研数学命题研究组 · 编

便携记忆版

实用分析 题范例

典型解答题 阅卷人评析

让想放弃的同学得高分
让能得高分的同学得满分
抓住攻克考研数学最后一次机遇
Yes, we can!

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

金榜图书
JINBANG BOOKS · SINCE 1997
理工社®

2014 考研数学终极决胜篇

考研数学 数学二

大题满分技巧揭秘

金榜考研数学命题研究组 · 编

便携记忆版

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

考研数学大题满分技巧揭秘. 数学二 / 金榜考研数学命题研究组编. —北京 ：北京理工大学出版社，2013.11
ISBN 978-7-5640-8449-3

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①金…　Ⅲ.①高等数学—研究生—入学考试—题解　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 250480 号

出版发行／北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址／北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编／100081
电　　话／(010)68914775(总编室)
　　　　82562903(教材售后服务热线)
　　　　68948351(其他图书服务热线)
网　　址／http://www.bitpress.com.cn
经　　销／全国各地新华书店
印　　刷／大厂回族自治县彩虹印刷有限公司
开　　本／850 毫米×1168 毫米　1/32
印　　张／5
字　　数／150 千字
版　　次／2013 年 11 月第 1 版　2013 年 11 月第 1 次印刷　　责任校对／周瑞红
定　　价／21.80 元　　责任印制／边心超

前言

2014年考研的最后冲刺阶段已经开始，这最后的宝贵时间是提高数学答题能力最关键的时候。数学是考研中的重中之重，而考研数学解答题94分，占超过总分的一半。这些题目高度抽象，解答起来需要严谨的推理和准确的计算。从以往考生的成绩来看，考生在解答题部分得分差距很大，直接导致数学成为最能在分数上拉开距离的考试科目。很多同学说，很想做好解答题，但就是做题无从下笔，或者做了也这错那错。

因此，我们为大家编写了这本《考研数学大题满分技巧揭秘》，以使同学们在考试中会解大题，能得高分，会做的题目力求不失分，部分理解的题目力争多得分。

本书中的题目经典，解答规范，适合考生综合复习使用。

书中的体例设计如下：

[读题联想] 如果目前为止同学们还对题中的基本概念、方法和原理不清楚，解题时肯定会碰到各种各样的问题，容易丢失一些基本分，所以同学们务必在最后完全吃透基础理论知识，深入理解基本概念、公式、定理和图表，掌握知识点。

[解题范例] 拓展解题方法，提高解题能力，规范答题格式。同学们要提高做题质量，每做完一题，就要总结其所覆盖的知识面并且归纳其所属题型，做到举一反三。希望同学们认真领会解题方法及其实质，并做到活学活用。同时，也要注意答题的方式、步骤，关键内容要写出来，一些简单过程可省略。

[阅卷者按] 帮助同学们寻找考试的感觉，使同学们保持清晰的复习思路，做题的同时感受真实考场上的氛围，尽快进入临考状态。

由于编者水平有限，本书中的不足与疏漏之处恳请读者批评指正。

祝大家复习顺利！

编　者

2013 **年** 11 **月**

目　录

高等数学

1 设 $a_1 > b_1 > 0, a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, b_n = \frac{a_{n-1}b_{n-1}}{a_n}(n = 2,3,\cdots)$. 请问 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是否收敛，若收敛，计算其极限，若不收敛，说明理由.

读题联想 数列的极限存在与求值问题，一般有两种思路：

(1) 先证明数列极限存在，再设极限解方程，求出极限值；

(2) 先假设极限存在，解出方程值，再证明极限存在(如定义法).

本题要点：(单调有界定理) 在实数系中，有界的单调数列必有极限.

更进一步，单调增加有上界的数列必有极限，单调减少有下界的数列必有极限.

$$\text{单调数列}\{x_n\}\begin{cases}\text{单调增加 } x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots, \\ \text{单调减少 } x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant \cdots.\end{cases}$$

解题范例

【解】 已知 $b_1 < a_1$，

若 $b_{n-1} < a_{n-1}$，

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{(a_{n-1} + b_{n-1})^2}{4a_{n-1}b_{n-1}} > 1,$$ 3 分

故由数学归纳法知对所有的 n，都有 $b_n < a_n$.

因为

$$a_{n+1} - a_n = \frac{b_n - a_n}{2} < 0,$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{b_n(a_n - b_n)}{a_n + b_n} > 0.$$

所以，数列 $\{a_n\}$ 单调减少，$\{b_n\}$ 单调增加，显然 $\{a_n\}$ 有下界 b_1，$\{b_n\}$ 有上界 a_1，故 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 都收敛. 6 分

设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A, \lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$.

由关系式

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2},$$

两边同取 $n \to \infty$，
$$A = \frac{A + B}{2},$$
$$A = B.$$

又 $a_n b_n = a_{n-1}b_{n-1} = \cdots = a_1 b_1$ 8 分

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} b_n = AB = a_1 b_1$$

$$A = B = \sqrt{a_1 b_1}.$$ 10 分

阅卷者按　本题满分10分，难度适中. 对于递推数列极限的题，在解答题中出现，一般很难直接推导出数列的通项式. 首先想到数列单调有界准则，要证明数列的单调性，证明单调性的方法：$a_n - a_{n-1}$，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$（同号）；转化成函数 $f(x)$ 求导.

极限是微积分的基础概念之一，几乎所有重要概念，如无穷小的阶、连续、导数、定积分、重积分、级数，都是用极限来定义的.

希望同学们复习时重视基础知识的拓展. 本题部分同学不会证单调性，推理不严谨而丢分.

左脑休息室

《咏一朵枯萎的紫罗兰》

作者：雪莱【英】

这一朵花失去了香味，
它象你的吻，曾对我呼吸；
那鲜艳的颜色也已消褪，
不再闪耀着你，唯一的你！

一个枯萎而僵死的形体，
茫然留在我凄凉的前胸，
它以冰冷而沉默的安息
折磨着这仍旧火热的心。

我哭了，眼泪不使它复生！
我叹息，没有香气扑向我！
唉，这沉默而无怨的宿命
虽是它的，可对我最适合。

2 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(e^{\frac{3}{n}}-3\tan\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

读题联想 本题是求“1^∞”型未定式数列的极限. 除利用极限的四则运算法则、洛必达法则以及等价无穷小代换外，还需要首先把数列极限转化为适当的函数极限.

解题范例

【解】 设函数 $f(x)=(e^{3x}-3\tan x)^{\frac{1}{x^2}}$ 和数列 $x_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$，

则

$$f(x_n)=(e^{\frac{3}{n}}-3\tan\frac{1}{n})^{n^2}\ (n=1,2,3,\cdots),\text{且}\lim_{n\to\infty}x_n=0^+.$$

计算可得

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}(e^{3x}-3\tan x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^{3x}-3\tan x)}{x^2}}=e^J,$$ 1 分

其中

$$J=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(e^{3x}-3\tan x)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{3x}-3\tan x-1}{x^2}$$ 3 分

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{3x}-\sec^2 x}{x}=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{3x}\cos^2 x-1}{x}$$

$$=\frac{3}{2}\lim_{x\to 0^+}(3e^{3x}\cos^2 x-2e^{3x}\cos x\sin x)=\frac{9}{2}.$$ 8 分

故

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{\frac{3}{n}}-3\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}=\lim_{n\to\infty}f(x_n)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}f(x)=e^J=e^{\frac{9}{2}}.$$ 10 分

阅卷者按 本题满分 10 分，难度不大.

（Ⅰ）一般来说，对于 1^∞ 型未定式 $\lim f(x)^{g(x)}=e^{\lim g(x)\ln f(x)}$，利用等价无穷小代换$\ln f(x)\sim f(x)-1$ 化为求极限 $e^{\lim g(x)[f(x)-1]}$，常能简化计算.

（Ⅱ）利用函数极限与洛必达法则求数列极限的理论根据是：

（1）若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，则对任何数列$\{x_n\}$，只要它满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，就有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

（2）若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则对任何数列$\{x_n\}$，只要它满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 且 $x_n\neq x_0$，就有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

3 求下列数列极限

(Ⅰ)$I=\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \dfrac{nx^{n-1}\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$.

(Ⅱ)$J=\lim\limits_{n\to\infty}x_n, x_n=\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{2}{n^2+2^2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n^2}$.

读题联想 (Ⅰ)是定积分函数表示的数列,无法直接计算极限,因此考虑分部积分法将定积分化简.

(Ⅱ)中的 n 项和数列,先看简单的放大缩小法能不能解决问题,再看 x_n 是否是某函数的一个积分和.

本题要点:(分部积分法) 定积分分部积分法的公式与方法,与不定积分的类似,只是多了个上、下限而已:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x,$$

或
$$\int_a^b u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)\mathrm{d}u(x).$$

若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在区间$[a,b]$上连续,$f(x)\leqslant g(x)$,且至少存在点 $x_1\in[a,b]$ 使 $f(x_1)<g(x_1)$,则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x < \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

设收敛数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都以 a 为极限,数列$\{c_n\}$满足:存在正数 N_0,当 $n>N_0$ 时有 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n$,则$\{c_n\}$收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=a$.

设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,$u_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}f\left(\dfrac{i}{n}\right)\left(\text{或}\, u_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f\left(\dfrac{i}{n}\right)\right)$,则

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}u_n &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(\frac{i}{n}\right)\text{或}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}f\left(\frac{i}{n}\right)\\ &= \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

解题范例

$$\begin{aligned}(\text{Ⅰ})\, I_n &\xlongequal{\text{记}} \int_0^1 \frac{nx^{n-1}}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x^n}{1+\mathrm{e}^x}\\ &= \frac{x^n}{1+\mathrm{e}^x}\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x x^n}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{1+\mathrm{e}} + \int_0^1 \frac{x^n\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$ 2 分

由

$$0<\int_0^1 \frac{x^n \mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x<\int_0^1 x^n \mathrm{d}x=\frac{1}{n+1}$$ 4 分

其中$\frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}<1$，于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{x^n \mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}\mathrm{d}x=0$$

因此

$$I=\lim_{n\to\infty} I_n=\frac{1}{1+\mathrm{e}}.$$

（Ⅱ）$x_n=\frac{1}{n^2}\left[\frac{1}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{2}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{n}{1+(\frac{n}{n})^2}\right]$ 5 分

$$=\frac{1}{n}\left[\frac{\frac{1}{n}}{1+(\frac{1}{n})^2}+\frac{\frac{2}{n}}{1+(\frac{2}{n})^2}+\cdots+\frac{\frac{n}{n}}{1+(\frac{n}{n})^2}\right].$$ 7 分

这是 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$ 在$[0,1]$上的一个积分和（n 等分）. 8 分

因此

$$J=\lim_{n\to\infty} x_n=\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln 2.$$ 10 分

阅卷者按 本题满分 10 分，两个极限的求法都是常见类型，应该熟练掌握.

左脑休息室

诵明月之诗，歌窈窕之章，低吟浅唱清风词赋，
浩浩御架盛世繁华，伴随青灯照古佛，
弹着箜篌尽离殇。斜逸丝雨，愀然空灵。
凤鸾已去，独留鸣生。

桃花千醉，陌上残殇。流觞曲水，惨淡独白，
一场黄花碎雨，乱尽平生相思。
半生流离，一世哀伤，不觉千帆已过，
春去秋来，残叶落尽，花殇。

4 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 邻域有二阶连续导数，且满足 $f'(0)=1, f''(0)=2$. 求 $J=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(0)}-\dfrac{1}{xf'(x)}\right]$.

读题联想 本题是抽象函数求极限，且极限是"$\infty-\infty$"型未定式，可通分化为求"$\dfrac{0}{0}$"型未定式的极限.

本题要点："$\dfrac{0}{0}$"型未定式

设

(Ⅰ) $\lim\limits_{x\to\square} f(x)=0, \lim\limits_{x\to\square} g(x)=0$;

(Ⅱ) $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $\square$ 的去心邻域 $\mathring{U}$ 内可导，且 $g'(x)\neq 0$;

(Ⅲ) $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$(或 ∞),

则
$$\lim_{x\to\square}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

导数定义 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

泰勒公式
$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$
设 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)\sim a(x), \beta(x)\sim b(x)$，则
$$\lim_{x\to\square}\frac{\alpha(x)\gamma(x)}{\beta(x)\delta(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{a(x)\gamma(x)}{b(x)\delta(x)}.$$

解题范例

【解法一】

$$J=\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{f(x)-f(0)}-\frac{1}{xf'(x)}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{x[f(x)-f(0)]f'(x)}$$ 3 分

分子、分母同除 x^2，列

$$J=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}f'(x)}\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{x^2}$$ 5 分

$$=\left(\frac{1}{f'(0)}\right)^2\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{x^2}$$ 7 分

代入 $f'(0)=1$，再用洛必达法则得

$$J=\lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)+f'(x)-f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}f''(x)=\frac{1}{2}f''(0)=1.$$ 9 分

【解法二】 分母用等价无穷小因子替换：

$$f(x)-f(0)\sim f'(0)x=x$$ 2 分

然后用洛必达法则得得

$$J=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{x[f(x)-f(0)]f'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{xf'(0)xf'(x)}$$ 5 分

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{f'(0)f'(x)}\lim_{x\to 0}\frac{xf'(x)-f(x)+f(0)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xf''(x)}{2x}$$ 7 分

$$=\frac{1}{2}f''(0)=1.$$ 9 分

阅卷者按　本题满分 9 分，应用洛必达法则计算极限时，注意满足洛必达法则的同时，也要注意通过适当的化简和无穷小等价替换来简化计算.

左脑休息室

20 个影响你一生的小改变（一）

Small, simple life changes can be powerful. Implementing some of these changes can literally change your entire life. How do you change? Take on one change at a time, and go slowly. Implement each change consistently so that it becomes a habit. Don't do too much too fast. What follows is a list of changes that are simple, yet incredibly powerful. Some are obvious and some aren't. I hope they serve as reminders of useful changes.

生活中一些细微简单的改变有着不可低估的作用。一些改变甚至可以改变你的整个生活。如何改变呢？一次做出一种改变，慢慢来，并始终如一地坚持，形成一种习惯。不要贪多求快。下面列出一些改变，虽然简单，作用却难以置信。有些作用明显，而有的不易觉察。我希望下列条目能提醒你去做一些有益身心的改变。

1. *Walk daily* / 每天散步

We humans aren't supposed to be sedentary human beings. We are born to run, but even more so to walk.

人类不适于久座。我们生来善跑，走路更不在话下。

Walking every day is good for your physical health. But more importantly, it's good for your mind. Walking is a joy. You are outside without distractions. You may even see people. And there's few better ways to boast your mood.

每天散步有益于身体健康。更重要的是，它还有助于心理健康。在室外散步，令人愉快，远离烦恼，还可以接触人群。没有什么更好的方法比散步更能带给你好心情。

5 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$ 与 $J=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

读题联想 类似 $\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$,$\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$ 的三角函数应该把 $\pi\sqrt{n^2+1}$,$\pi\sqrt{n^2+n}$ 转化到原点附近研究其变化情况.

解题范例

【解】 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1}-n\pi+n\pi)$ 1 分

记 $\alpha_n=(\sqrt{n^2+1}-n)\pi=\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$,可知 $0<\alpha_n<\dfrac{\pi}{2n}$,

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$. 且

$$I=\lim_{n\to\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})=\lim_{n\to\infty}\sin(n\pi+\alpha_n)$$ 4 分

$$=\lim_{n\to\infty}(\sin n\pi\cos\alpha_n+\cos n\pi\sin\alpha_n)=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\sin\alpha_n.$$ 5 分

由于 $|(-1)^n\sin\alpha_n|\leqslant\alpha_n$,故 $I=0$.

$$J=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi+n\pi).$$ 6 分

记 $\beta_n=(\sqrt{n^2+n}-n)\pi=\dfrac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n}$,可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=\dfrac{\pi}{2}$,故 8 分

$$J=\lim_{n\to\infty}\sin^2(n\pi+\beta_n)=\lim_{n\to\infty}(\sin n\pi\cos\beta_n+\cos n\pi\sin\beta_n)^2$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sin^2\beta_n=\sin^2\frac{\pi}{2}=1.$$ 10 分

阅卷者按 本题满分10分,有一定难度.关键在于用 $n\pi$ 把 $\pi\sqrt{n^2+1}$ 转化到原点附近研究其性质.

左脑休息室

《念奴娇西子》

若耶溪畔,恨春暮,啼鸟声声明灭。
解佩凌波,人不见,漫说馆娃宫阙。
百尺琼楼,千人歌乐,纵使肌如雪。
俱归黄土,而今只剩明月。
堪叹伍相鸱夷,忠言孤胆,难抵眉心结。
西子多情怀袖里,霸主英雄气竭。
越甲三千,佳人一笑,山河空泣血。
五湖舟上,寻芳不待佳节。

6 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{\sqrt{1^2+n^2}}+\dfrac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\dfrac{n+\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)\cdot\sin\dfrac{1}{n}$.

读题联想 这是一个 n 项和的数列极限，常用的方法有两种：夹逼原理和定积分的定义，有时还需要两种方法结合使用.

解题范例

【解】 当 $n\to\infty$ 时，$\sin\dfrac{1}{n}\sim\dfrac{1}{n}$，则 1 分

$$I=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{\sqrt{1^2+n^2}}+\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\frac{n+\frac{1}{n}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1^2+n^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{2^2+n^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$ 3 分

又

$$\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$$ 6 分

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{n}\right)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{2}{n}\right)^2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{n}{n}\right)^2}}\right]$ 8 分

$$=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}}=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2})$$ 9 分

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1,\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=1$$

则 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+(\frac{1}{n})^2}}+\frac{1+\frac{1}{2n}}{\sqrt{1+(\frac{2}{n})^2}}+\cdots+\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\sqrt{1+(\frac{n}{n})^2}}\right]$$

$$=\ln(1+\sqrt{2}).$$

10 分

故 $I=\ln(1+\sqrt{2})$.

阅卷者按 本题满分10分，难度不大，主要考查利用夹逼原理和定积分定义求极限. 本题的关键是要将这两种方法结合起来问题才能得到解决.

左脑休息室

20 个影响你一生的小改变(二)

2. *Wake early* / 早起

If you asked me what's the best change you can make this instance, I would say "wake early." The early morning is peaceful – there are no interruptions and no noise. You can wakeup and go for a walk. You can meditate. And you can create.

如果你问我什么是最好的改变，我会说"早起"。早晨是那样宁静——没人打扰，没有噪音。起床后，散散步，你还可以冥思，或是创作。

And waking early is the most productive thing I've ever done. I often get more work done in a couple hours in the morning than during the entire day.

早起是我做的最富有成效的改变。在早晨的几个小时里，我做的事情常常比一整天做的都多。

3. *Eat less* / 少吃

Many of us overeat. Let's stop. Eat slowly, and eat until you're full. Eat so that your belly doesn't bulge.

我们中的很多人都饮食过量。可别吃太多。细嚼慢咽，吃饱为止。这样才不会吃起将军肚。

4. *Stop watching, start doing* / 不做旁观者

Watching is easy. Anyone can watch someone.

Spectating isn't inherently bad, but I believe we do too much of it. Instead of watching, do something. Or better yet, create something great.

看容易，每个人都可以看别人。

做个观众本身并不坏，但我认为，我们看得太多。不要做旁观者，自己去做。如果不小心搞出个伟大创造，岂不更好。

7 设常数 $p>0$，求极限

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$$

并证明：当 $n=1,2,3,\cdots$ 时

$$\left|\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}-I\right|\leqslant\frac{1}{n}.$$

读题联想 n 项和的数列极限要注意考虑定积分的定义，

注意 I 与 $\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}$ 之间的差别.

解题范例

【解】

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\frac{1}{n},$$ 1 分

其中 $f(x)=x^p$.

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{1}{n}$ 可以看成是函数 $f(x)=x^p$ 在区间 $[0,1]$ 被 n 等分，并取 $\xi_k=\frac{k}{n}(k=1,2,\cdots,n)$ 时的积分和. 由函数 $f(x)=x^p$ 在区间 $[0,1]$ 上连续知 $f(x)=x^p$ 在区间 $[0,1]$ 上可积，故

$$I=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\frac{k}{n})^p=\int_0^1x^p\,dx=\frac{1}{p+1}.\ p>0$$ 3 分

又因

$$\begin{aligned}\frac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}-I&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{1}{n}-\int_0^1x^p\,dx\\&=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{1}{n}-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}x^p\,dx\\&=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^p dx-\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}x^p\,dx\\&=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^p-x^p\right]dx,\end{aligned}$$ 5 分

且对于 $k=1,2,3,\cdots,n$，有

$$0\leqslant\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^p-x^p\right]dx$$

$$\leqslant \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left[\left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p\right] dx$$

$$= \left[(\frac{k}{n})^p - (\frac{k-1}{n})^p\right]\frac{1}{n},$$ 7 分

故

$$0 \leqslant \frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} - I$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n}\left[(\frac{k}{n})^p - (\frac{k-1}{n})^p\right]\frac{1}{n}$$

$$= \left[(\frac{n}{n})^p - (\frac{0}{n})^p\right]\frac{1}{n} = \frac{1}{n}.$$ 9 分

即当 $n = 1,2,3,\cdots$ 时，对任何常数 $p > 0$，下面的不等式成立：

$$\left|\frac{1^p + 2^p + 3^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} - I\right| \leqslant \frac{1}{n}.$$ 10 分

阅卷者按　本题满分 10 分，有一定难度．极限的计算比较基础，积分的定义是常用方法．难度在于对 I 和 $\frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$ 之间区别的理解，一般来说，若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则把 $[a,b]$ 作 n 等分时有

$$\lim_{x\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)\,dx,$$

其中 ξ_k 在小区间 $\left[a + \frac{k-1}{n}(b-a), a + \frac{k}{n}(b-a)\right]$ 中任意取定．而给定的 n 项和 $\sum_{k=1}^{n}\frac{b-a}{n}f(\xi_k)$，$\xi_k$ 一般取区间 $\left[a + \frac{k-1}{n}(b-a), a + \frac{k}{n}(b-a)\right]$ 中的端点值．

左脑休息室

随性枕霞，清风蕴涵的诗经，翻开了，飘飘峰峦，
幻化一朵清露垂滴菟丝，常驻静谷，悄然水墨，摘雨做云。
清池浣壁，砚台，以心的淡雅拂竹筛月，依绕阡陌桃源洞天，
陌上轻歌，细腻绵长为特立的一脉风情。
但看幽谷花开花落，素蝶翩然入梦，曦月千里。