全国高职高专教育规划教材

实用高等数学

主审　刘景瑞
主编　朱彩兰　杜秀清　周巧娟

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

● 全国高职高专教育规划教材

实用高等数学

Shiyong Gaodeng Shuxue

主　审　刘景瑞
主　编　朱彩兰　杜秀清　周巧娟
副主编　冯建霞　杨　青　张红锋
编　委（以姓氏笔画为序）
于　海　冯建霞　朱彩兰　张红锋　张洪波　张晓莉
李　娟　杜秀清　杨　青　周巧娟　赵　洁　薛佳佳

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS　BEIJING

内容提要

本书是全国高职高专教育规划教材，在充分了解我国高职教育现状的基础上，根据高职教育的目标，我们编写了本教材，旨在培养高职高专学生必要的数学素质。本书以“通俗、简明、实用”为原则，概念清晰明了、语言通俗易懂、案例丰富多彩，注重增强数学的趣味性、实用性，同时注重对数学思想、数学方法的熏陶。

本书内容包括函数、极限与连续，一元函数微分学及应用，一元函数积分学及应用，常微分方程，无穷级数，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学以及多元函数积分学共八章内容。为了培养并增强高职高专学生运用数学的意识，在前五章中设置了数学软件 MATLAB 的运用和数学实际应用的案例，以使学生学以致用，并在书后附有每个章节的习题答案，以供参考。

本书可作为高职高专院校、成人高校和独立院校各专业的通用教材，也可作为高职院校学生“升本”的参考资料，同时可供相关科技人员和数学爱好者参考。

图书在版编目(CIP)数据

实用高等数学 / 朱彩兰，杜秀清，周巧娟主编. --北京：高等教育出版社，2013.8

ISBN 978-7-04-035536-9

Ⅰ.①实… Ⅱ.①朱… ②杜… ③周… Ⅲ.①高等数学-高等职业教育-教材 Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2013)第 188392 号

策划编辑	边晓娜	责任编辑	边晓娜	封面设计	张　志	版式设计	余　杨
插图绘制	黄建英	责任校对	窦丽娜	责任印制	尤　静		

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	化学工业出版社印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787mm×1092mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	15	版　　次	2013 年 8 月第 1 版
字　　数	360 千字	印　　次	2013 年 8 月第 1 次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	26.00 元

物 料 号　35536-00

前 言

高等数学是高职院校的公共基础必修课，高等数学的教学质量对高职院校的人才培养至关重要，为了使学生能够喜爱数学，会应用数学，为此我们多所高职院校的数学教师合作编写了本教材。

本教材的指导思想是"通俗、简明、实用"：通俗是指教材中使用的语言通俗易懂；简明是指教材中的内容遵循"必需、够用"的原则，做到简单明了；实用是指在教材中富含日常生活中的实例与运用数学软件解决的计算问题等，具有一定的实用性。

本书包含函数、极限与连续，一元函数微分学及应用，一元函数积分学及应用，常微分方程，无穷级数，向量代数与空间解析几何，多元函数微分学以及多元函数积分学共八章内容，每一节配有习题，每一章都配有总复习题，以供学生复习巩固，同时书后也提供了答案，以供参考。为了增强数学的实用性，本书在前五章中设置了数学实验和实用举例部分，以拓宽学生的运用数学的能力，使数学真正成为工具。由于后三章不是基础课的必备内容，我们将其作为选学内容，供教师和学习者自由选择，故未设置数学实验和实用举例。

本书具有以下特色：

一、弱化理论，加强实验

针对高职学生的特点，遵循扬长避短的原则，本书着重介绍数学思想，适当降低理论要求，通过 MATLAB 数学软件来解决繁琐的运算，旨在教会学生掌握数学思想，会运用数学软件来解决实际问题，这将更有益于学生以后的学习。

二、打破传统，另辟蹊径

为了淡化繁琐的数学运算，只介绍微(积)分的思想和必要的计算；为了还原数学发展的本来面目，先介绍定积分，后介绍不定积分；考虑到级数的应用更为普遍、使用价值更高，故将级数安排在空间解析几何以及多元函数微积分之前；为了帮助学生建立数学模型以及为了强调运用意识，在教材中列举了许多数学运用的例子，培养学生运用数学解决实际问题的能力。

三、以需为本，兼顾个别

我们在编写该教材时充分考虑到学生的就业和继续深造的两种选择需求，对即将就业的学生，注重必要的数学思想的熏陶和以"必需、够用"为原则的内容的讲授，为其专业学习打下基础；对继续深造的同学，在"必需、够用"的基础之外，增加了专升本的内容，并将这部分知识用"*"标出，供教师和学生自由选择。

四、不失严谨，饶有趣味

在教材中列举了许多数学在日常生活中的实例，并在每章结束时，介绍有关数学发展史和数学家的故事，这样不仅拓宽了学生的视野，同时也增强了不少趣味性。

本书由刘景瑞担任主审，朱彩兰、杜秀清、周巧娟任主编，冯建霞、杨青、张红锋任副主编，参编的老师还有赵洁、于海、张洪波、薛佳佳、李娟、张晓莉。

本书是在江海职业技术学院、正德职业技术学院、应天职业技术学院、长春信息技术职业学院四所院校领导的大力支持下，高等教育出版社编辑的指导下完成的，在此表示感谢！

由于编者水平有限，教材中可能还存在许多不足之处，恳请读者和广大师生批评指正！

编者

2013年7月

目　录

第一章　函数、极限与连续

名人名言 初等函数，即常数的数学，至少就总的来说，是在形式逻辑的范围内活动的，而变数的数学——其中最重要的部分是微积分——其按本质来说也不是别的，而是辩证法在数学方面的运用.

——恩格斯

本章导读 函数是高等数学的主要研究对象，是刻画变量与变量间关系的数学模型；极限的思想和分析方法将贯穿高等数学的始终；连续是函数的一个重要性态. 本章将在复习和加深函数相关知识的基础上，学习函数的极限、连续及其有关性质，为后续内容的学习奠定基础.

第一节　函数及函数关系的建立

函数是中学阶段、特别是高中阶段数学的重要学习内容. 本节将中学阶段的函数知识作一简要总结，并补充一些必要的内容，为进一步学习打下基础.

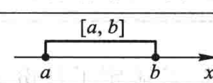
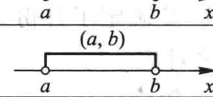
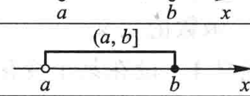
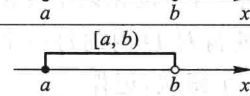
一、变量与常量

我们在观察某一现象的过程中，常常会遇到两种不同的量，一种量在研究过程中始终保持不变，称为**常量**，常用 a,b,c 等字母表示；还有一种量在研究过程中数值会发生变化，称为**变量**，常用 x,y,z 等字母来表示.

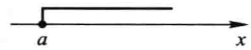
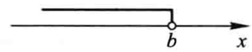
例如，某间教室的长、宽、高，北京到南京的直线距离等都是常量，而自然界的温度、人的身高等都是变量.

如果变量的变化是连续的，则常用区间来表示其变化范围，如表 1-1 所示.

表 1-1　变量的区间表示

区间的名称	区间的记号	区间满足的不等式	区间在数轴上的表示
闭区间	$[a,b]$	$a\leqslant x\leqslant b$	
开区间	(a,b)	$a<x<b$	
半开区间	$(a,b]$	$a<x\leqslant b$	
	$[a,b)$	$a\leqslant x<b$	

续表

区间的名称	区间的记号	区间满足的不等式	区间在数轴上的表示
无限区间	$[a,+\infty)$	$x\geqslant a$	
	$(-\infty,b)$	$x<b$	
	$(-\infty,+\infty)$	$-\infty<x<+\infty$	整个数轴

注：表中的 $-\infty$ 和 $+\infty$ 分别读作“负无穷大”和“正无穷大”，它们不是数，仅仅是一记号.

二、函数的概念

在同一自然现象或研究过程中，往往有多个变量在变化着，并且并不是孤立的，而是相互联系、相互依赖、按照一定的规律变化，如下面几个例子.

引例 1 已知圆半径为 r，面积为 A，则变量 A 与 r 之间的关系为

$$A=\pi r^2.$$

由上式可知当半径 r 给定一个确定的数值时，A 都有唯一确定的数值与其对应.

引例 2 下面是某上市公司股票 2013 年某日的成交价格变动曲线图(图 1－1).

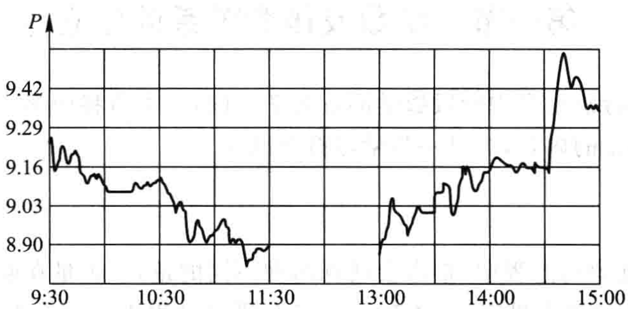


图 1－1

由图 1－1 可知，在交易日的每一个确定的交易时刻 t，这只股票的价格 P 是唯一确定的.

引例 3 某汽车销售公司 2012 年度各月份的汽车销量(单位：辆)如表 1－2 所示.

表 1－2

月份 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
销量 y	750	821	602	730	911	580	400	637	642	705	943	760

表 1－2 确定了月份 x 与销量 y 这两个变量之间的统计关系，不同的月份都有唯一确定的销量 y 与之对应.

1. 函数的定义

定义 1 设在某个变化过程中有两个变量 x 和 y，D 是一非空实数集，如果存在一个对应法则 f，使得对 D 内的每一个值 x 都有唯一的 y 与之对应，则这个对应法则 f 称为定义在集合 D 上的一个函数，记作

$$y=f(x), x\in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或**函数值**，D 称为**定义域**，f 为变量 x 和 y 之间的函数关系式.

对于 $x_0\in D$，通过对应关系 f 得到的唯一确定的 y 值，称为当 $x=x_0$ 时，函数 $y=f(x)$ 的**函数值**，记作

$$f(x_0) \text{或} f(x)\big|_{x=x_0} \text{或} y\big|_{x=x_0}.$$

全体函数值的集合 $Z=\{y\,|\,y=f(x), x\in D\}$ 称为函数 $y=f(x)$ 的**值域**.

注：(1) 由定义知，函数表示的是两个变量之间的关系，因此与这两个变量用什么字母表示无关，如 $y=f(x)$ 和 $u=f(t)$ 是同一函数.

(2) 由定义知，定义域 D 及对应法则 f 是函数的两要素，如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

(3) 函数的表示方法主要有三种：解析法(也称公式法，如引例 1)、图形法(也称图像法，如引例 2)、表格法(也称列表法，如引例 3).

2. 函数的定义域及函数值

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义而确定的. 当不考虑函数的实际意义时，函数的定义域就取使函数表达式有意义的自变量的集合. 这种定义域称为函数的自然定义域.

常见解析式函数的定义域的求法中的注意事项有如下几点：

(1) 分母不能为零；

(2) 偶次根号下非负；

(3) 对数式中的真数恒为正；

(4) 反三角函数 $y=\arcsin x$ 和 $y=\arccos x$ 须满足 $-1\leqslant x\leqslant 1$；

【例 1】 求下列函数的定义域：

(1) $y=\lg(1-x^2)+\dfrac{1}{x}$； (2) $y=\dfrac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}+\arcsin(2x-1)$.

解 (1) 该函数的定义域是使不等式组

$$\begin{cases}1-x^2>0,\\ x\neq 0\end{cases}$$

成立的 x 的全体，解此不等式组得

$$-1<x<0 \text{ 或 } 0<x<1,$$

故函数的定义域为

$$(-1,0)\cup(0,1).$$

(2) 该函数的定义域是使不等式组

$$\begin{cases}3+2x-x^2\neq 0,\\ 3+2x-x^2\geqslant 0,\\ -1\leqslant 2x-1\leqslant 1,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}x^2-2x-3<0,\\ -1\leqslant 2x-1\leqslant 1\end{cases}$$

成立的 x 的全体，解此不等式组得

$$\begin{cases} -1<x<3, \\ 0\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$$

故函数的定义域为$[0,1]$.

【例 2】 设 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$,求 $f(3)$,$f(-x)$,$f[f(x)]$.

解

$$f(3)=\frac{3}{3+1}=\frac{3}{4};$$

$$f(-x)=\frac{-x}{-x+1}=\frac{x}{x-1};$$

$$f[f(x)]=\frac{f(x)}{f(x)+1}=\frac{\dfrac{x}{x+1}}{\dfrac{x}{x+1}+1}=\frac{x}{2x+1}.$$

【例 3】 设 $f(x)=\begin{cases} x+2, & -2<x<0, \\ 0, & x=0, \\ x^2+2, & 0<x\leqslant 2, \end{cases}$ 求 $f(-1)$,$f(0)$,$f(1)$,并求 $f(x)$的定义域.

解

$$f(-1)=-1+2=1,$$
$$f(0)=0,$$
$$f(1)=1^2+2=3;$$

由 $f(x)$的表达式易知,$f(x)$的定义域为$(-2,0]\cup(0,2]=(-2,2]$.

注:在自变量 x 的不同取值范围内,$f(x)$具有不同的函数表达式,这种函数称为**分段函数**.

三、函数的基本性质

1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$在区间 I 上有定义,若对任意的 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加函数**,如图 1-2 所示;若对任意的 $x_1,x_2\in I$ 且 $x_1<x_2$,恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$在区间 I 上是**单调减少函数**,如图 1-3 所示.

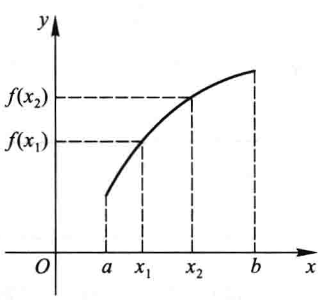


图 1-2

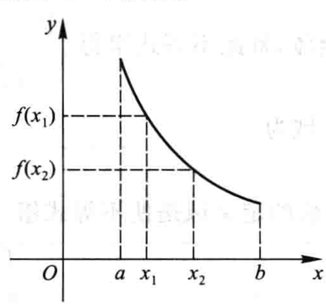


图 1-3

例如,函数 $y=x^2$ 在$[0,+\infty)$内是单调增加函数,在$(-\infty,0]$内是单调减少函数.

2. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称,若对于任意的 $x\in D$,恒有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$为**偶函数**;若对于任意的 $x\in D$,恒有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$为**奇函数**. 既不是奇函数

又不是偶函数的函数称为**非奇非偶函数**.

偶函数的图像关于 y 轴对称,奇函数的图像关于原点对称,如图 1-4、图 1-5 所示.

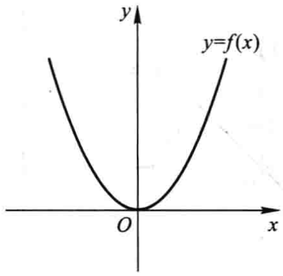


图 1-4

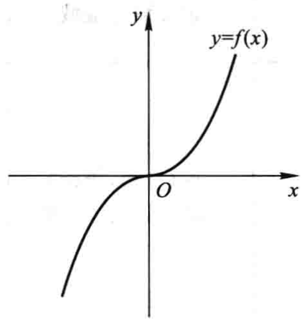


图 1-5

例如,函数 $y=\sin x$,$y=\tan x$ 是奇函数,函数 $y=\cos x$ 是偶函数.

3. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 M,对于任意的 $x\in D$,恒有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 D 上**有界**,或称 $f(x)$ 是 D 上的**有界函数**.

例如,函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 是有界函数,因对任意实数 $x\in(-\infty,+\infty)$,恒有 $|\sin x|\leqslant 1$,$|\cos x|\leqslant 1$.

4. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为全体实数 $\mathbf{R}$,若存在一个实数 T,使得对任意的 $x\in D$,恒有 $f(x+T)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为**周期函数**,称 T 是 $f(x)$ 的一个周期.

注:我们所说的周期函数的周期是指最小正周期,若 T 是 $f(x)$ 的一个周期,则 $\pm 2T$,$\pm 3T$ 等也都是它的周期.

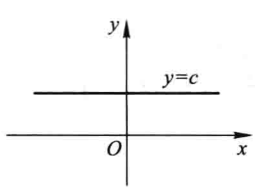
例如,函数 $y=\sin x$,$y=\cos x$ 的周期为 2π,函数 $y=\tan x$ 的周期为 π.

四、初等函数

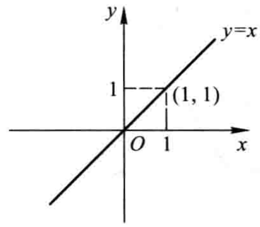
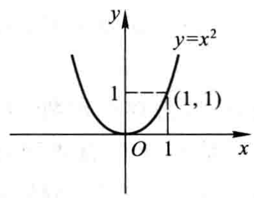
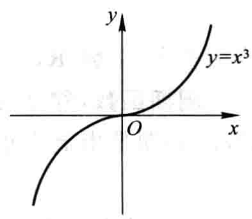
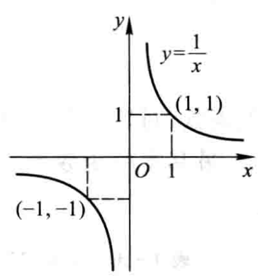
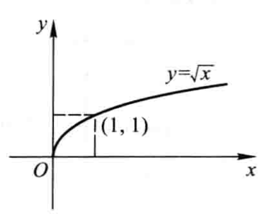
1. 基本初等函数

常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数,共六类函数统称为**基本初等函数**,它们是最常见、最简单、最基本的函数形式.很多复杂函数是以它们为基础构成的.它们的性质、图像如表 1-3 所示.

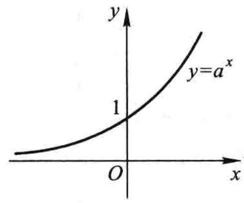
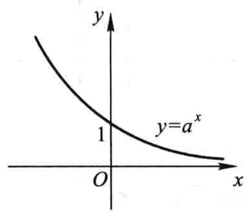
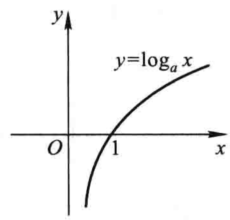
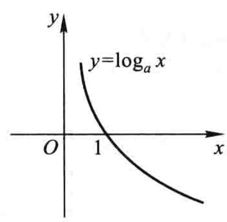
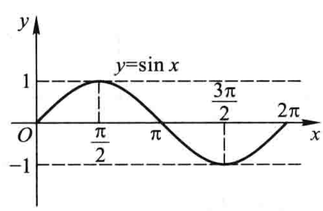
表 1-3　基本初等函数的图像及性质

函数类型	函数	定义域与值域	图　　像	性　　质
常数函数	$y=c$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\{c\}$		偶函数 有界

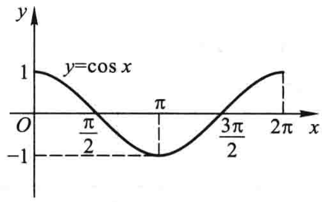
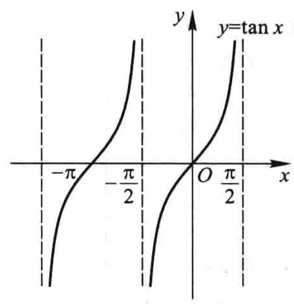
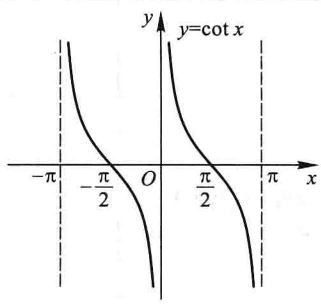
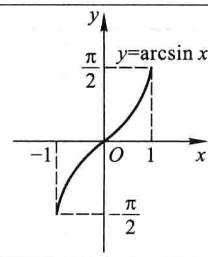
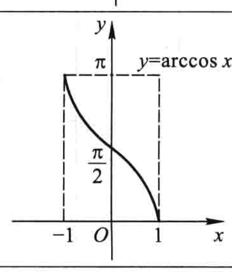
续表

函数类型	函数	定义域与值域	图　　像	性　　质
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(0,+\infty)$内单调增加，在$(-\infty,0)$内单调减少
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=\frac{1}{x}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$内单调减少，在$(0,+\infty)$内单调减少
	$y=\sqrt{x}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加

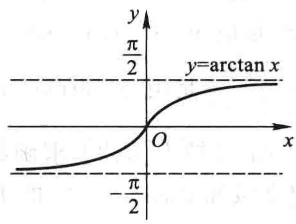
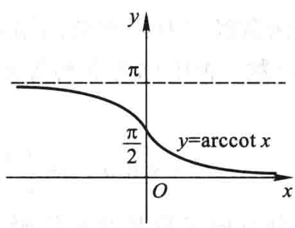
续表

函数类型	函数	定义域与值域	图　　像	性　　质
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$上单调增加； 在$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$上单调减少$(k\in\mathbf{Z})$ 奇函数 有界 周期为2π

续表

函数类型	函数	定义域与值域	图　　像	性　　质
三角函数	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		在$(2k\pi,2k\pi+\pi)$上单调减少；在$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$上单调增加$(k\in\mathbf{Z})$ 偶函数 有界 周期为2π
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$上单调增加$(k\in\mathbf{Z})$ 奇函数 周期为π
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		在$(k\pi,k\pi+\pi)$上单调减少$(k\in\mathbf{Z})$ 奇函数 周期为π
反三角函数	$y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		单调增加 奇函数 有界
	$y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少 有界

续表

函数类型	函数	定义域与值域	图像	性质
反三角函数	$y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		单调增加 奇函数 有界
	$y=\text{arccot}\, x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少 有界

2. 复合函数

在同一现象中,两个变量的关系有时不是直接的,而是通过另一变量间接联系起来的.

引例 4 在自由落体运动中,物体的动能 E 是速度 v 的函数:

$$E=f(v)=\frac{1}{2}mv^2 \quad (m\text{ 为物体的质量}),$$

而速度 v 又是时间 t 的函数:

$$v=\varphi(t)=gt,$$

这样通过中间变量 v,动能 E 也成为时间 t 的函数:

$$E=f[\varphi(t)]=\frac{1}{2}m(gt)^2=\frac{1}{2}mg^2t^2.$$

这个函数称为由 $E=f(v)$ 和 $v=\varphi(t)$ 复合而成的复合函数.

定义 2 设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D,函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z,若 $Z\cap D\neq\varnothing$,则 y 可通过中间变量 u 的联系成为 x 的函数,我们把这个函数称为是由函数 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**,记作

$$y=f[\varphi(x)],$$

其中 u 称为**中间变量**.

【例 4】 已知函数 $y=\sqrt{u}$ 与函数 $u=x^2-1$,求它们的复合函数.

解 将 $u=x^2-1$ 代入 $y=\sqrt{u}$ 中,得复合函数

$$y=\sqrt{x^2-1}, x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty).$$

注:并不是任意两个函数都能复合成一个复合函数的. 如 $y=\arcsin u, u=x^2+2$ 就不能复合成一个函数.

利用复合函数的概念,可以将较复杂的函数通过分解而表示成若干个函数的复合.