华章数学译丛

HZ BOOKS
华章教育

55

PEARSON

Algebra

(Second Edition)

代数

（原书第2版）

（美）Michael Artin 著
麻省理工学院

姚海楼 平艳茹 译

机械工业出版社
China Machine Press

Algebra

(Second Edition)

代数

（原书第2版）

（美）Michael Artin 著
麻省理工学院

姚海楼 平艳茹 译

机械工业出版社
China Machine Press

图书在版编目（CIP）数据

代数（原书第 2 版）/（美）阿廷（Artin，M.）著；姚海楼，平艳茹译．—北京：机械工业出版社，2014.12
（华章数学译丛）
书名原文：Algebra，Second Edition

ISBN 978-7-111-48212-3

I. 代… II. ①阿… ②姚… ③平… III. 代数 IV. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2014）第 233028 号

本书版权登记号：图字：01-2010-6654

本书是一本代数学的经典著作，既介绍了矩阵运算、群、向量空间、线性变换、对称等较为基本的内容，又介绍了环、模、域、伽罗瓦理论等较为高深的内容，对于提高数学理解能力、增强对代数的兴趣是非常有益处的．

本书是一本有深度、有特点的著作，适合数学工作者以及基础数学、应用数学等专业的学生阅读．

出版发行：机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码：100037）
责任编辑：迟振春　　责任校对：殷　虹
印　　刷：三河市宏图印务有限公司　　版　　次：2015 年 1 月第 1 版第 1 次印刷
开　　本：186mm × 240mm　1/16　　印　　张：29
书　　号：ISBN 978-7-111-48212-3　　定　　价：79.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换
客服热线：（010）88378991　88361066　　投稿热线：（010）88379604
购书热线：（010）68326294　88379649　68995259　　读者信箱：hzjsj@hzbook.com

译 者 序

这本书的特色很浓. 它给人的感觉是完全背离了 Serge Lang 那本经典的《代数》，也完全背离了 Jacobson 的《抽象代数学》与《基本代数》或者 Hungerford 的《代数》. 书里讲的内容很广泛，不算太难，深度中等，大学阶段就可以看，其中一些内容也可作为研究生的代数教材. 该书对于提高数学理解能力、增强对代数的兴趣是非常有益处的. 此外，本书的可阅读性强，书中的习题也很有针对性，能让读者很快地掌握分析和思考的方法. 美国伊利诺伊大学教授杰拉尔德 · 雅努斯评论该书为：“对于有一定线性代数和微积分基础而且学习动机很强的本科生而言，这是一本极好的教材. 其内容和编写方式值得称道. 作者在前言中列出了其编写所遵循的三个原则(简言之：例证应有助于理解定义、专业要点仅在需要时才在书中较后位置呈现、主题对大多数从事数学研究及教学的人而言都应是重要的)，且特别强调这些原则中并不包括‘按照所教的方法做’这一项. 整本书的编写风格是：给出基本概念、列出许多重要的例证以及简单明了地讨论一些前沿课题.”

该书作者 Michael Artin 教授在 2002 年被美国数学学会授予 Steele 终身成就奖，在 2005 年被授予哈佛大学百年奖章，在 2013 年获得了 Wolf 数学奖. Michael Artin 是当代领袖型代数学家与代数几何学家之一，美国麻省理工学院数学系荣誉退休教授. 1990 年至 1992 年，曾担任美国数学学会主席. Artin 的主要贡献包括他的逼近定理、在解决沙法列维奇-泰特猜想中的工作以及为推广“概形”而创建的“代数空间”概念. 正因为这样，作者在该书里着力强调代数同其他数学分支的联系，特别是同拓扑和代数几何的联系. 作者对本版进行了全面更新，更强调对称、线性群、二次数域和格等具体主题，让读者体会到代数在其他数学分支中的威力. 同时，同第 1 版相比，习题变化很大. 从习题中，读者对书中内容以及内容的延拓会有很深的体会.

我们一接到翻译该书第 2 版任务，就深为书中内容所吸引，怀着愉悦的心情将本书翻译完，以便让更多的数学爱好者分享这部精彩著作. 译者花了八个月的时间将其译完. 翻译的过程也是学习该书的过程，并得到了许多收获. 但由于译者学识以及翻译时间的限制，译稿一定有不当之处，欢迎读者指正.

姚海楼　平艳茹

于北京工业大学

2014 年 9 月

前　言

基本概念和命题在代数中或许很重要，
原因在于它们是人们为探索公理及概括性
而投入了孜孜不倦的热情所总结出来的，
它们在代数中的重要性甚至可能会超过在任何其他学科中.
但是，我坚信，
具有极端复杂性的特殊问题才构成了数学的主干和核心，
而掌握其难点往往需要更刻苦地钻研.

——*Herman Weyl*

本书源于多年前我的代数课程补充讲义. 我那时想比课本上更详尽地讨论一些具体的课题，比如，对称、线性群、二次数域，再将群论的重点由置换群转到矩阵群. 格，另一个常见的主题，就自然出现了.

我希望具体的东西能激发学生的兴趣并使抽象的东西更容易理解. 简言之，同时学习具体和抽象两个方面，学生能考虑得更深远. 这项工作进展得很顺利. 我花了很长时间来确定什么内容要加进去，我逐渐写出了更多的讲义，最终上课就仅用讲义而不用教材了. 虽然这样形成了一本与众不同的书，但当我把材料汇总起来时却遇到了很多难题. 我不建议以这种方式写书.

与多数代数书不同，本书更突出特殊的主题. 每次重写一些章节的时候内容就会扩充，因为多年来我注意到，与抽象的概念相比，学生更喜欢具体的数学题材. 结果，上面提到的这些东西就成了本书的主体.

在写本书时，我尽量遵守下面的原则：

1. 基本的例子放在抽象的定义之前.
2. 技巧只要在本书的其他地方出现，它就应该被介绍.
3. 对一般的数学工作者而言，所有讨论的主题都应该是重要的.

虽然这些原则听起来有点像爱国主义的教义，但我发现把它们明确地讲出来是有益的. 当然，我有时也会违背这些原则.

书中的章节按照我讲课的顺序编排，线性代数、群论和几何构成第一学期的内容. 环的第一次引入是在第十一章，虽然在逻辑上这一章和前面的章节没有关系. 我采用这样的编排是因为想从一开始就强调代数与几何的联系，而且因为前面几章的内容对其他领域的人来说也是最重要的. 本书的前半部分没有侧重计算，但在后面的章节里弥补了这一不足.

关于第 2 版的说明

本书第 2 版做了广泛的修订，融入了我 20 年的教学经验和许多人的建议．我已将修订部分在课堂上发给学生，初稿在过去的两年里一直用做讲义．这样，我从学生那里得到了许多宝贵的建议．本书的整体组织结构没变，但有两章太长把它们拆分了．

书中还添加了一些新的内容．这些内容都不多，通过在别处做些改动就平衡了．这些新内容包括：若尔当形的提早介绍(第四章)，一小节关于连续性的问题(第五章)，交错群是单群的证明(第七章)，球体的简短讨论(第九章)，积环(第十一章)，分解多项式的计算机方法和限定多项式的根的取值范围的柯西定理(第十二章)，基于对称函数的分裂定理的证明(第十六章)．此外还添加了一些好的练习题．但这本书太厚了，因此我尽力遏制了添加内容的冲动．

给教师的话

使用本书的教师可以适当取材．不要试图全讲整本书，但是一定要包括一些有意义的特定主题，例如平面图形的对称、SU_2 的几何、虚二次数域上的算术．如果你不想讨论这些问题，那么这本书不适合你．

使用本书需要的预备知识相对较少．学生应熟悉微积分、复数的基本性质和数学归纳法．了解证明肯定是有用的．第九章(线性群)中要用到的拓扑学概念不作为预备知识要求．

建议你关注具体的例子，特别是前几章中的．这一点对学习这门课而对证明的构成没有明确概念的学生来讲是至关重要的．

教师可以花一个学期讲授前 5 章，但这样会使本书的目的大打折扣，真正有意义的内容从第六章(对称)才开始．尽快学到第六章，这样就可以以轻松的节奏学完第六章．尽管对称很快能吸引学生的注意力，但是对称不是一个轻松的主题，教师很容易为内容陶醉而学生却跟不上进度．

目前，我班上的大多数学生来上课前就熟悉了矩阵运算和模算术，在班上我根本没讲第一章(矩阵)而直接留了作业．下面是关于第二章(群)的建议．

1. 对抽象的问题浅尝辄止，在第六、七章还会遇到它们．
2. 例如，重点放在矩阵群．对称的例子最好推迟到第六章讲授．
3. 不要在计算上花费太多时间，在第十二章和第十三章自然会大量涉及．
4. 不强调商群的构造．

商群提出了一个在教学上如何讲授的问题．虽然商群的结构在概念上很难，但在多数初等例子里商群是很容易作为同态的像给出的，因而不需要抽象定义．模算术几乎是其仅有的反例．由于模 n 的整数构成一个环，对于群的商，模算术不是一个具有启发性的好例子．第一次真正使用商群是在第七章讨论生成元和关系时．在本书的早期手稿里，我把商群推迟到那里讲授，但是，由于担心引起代数界的不满，我最后还是把商群放到了第二

章. 如果你不打算在课程中讲授生成元和关系，那么可将商的深入讨论推迟到第十一章(环)，在那里商起着重要的作用，而且模算术成了最好的富于启发性的例子.

在第三章(向量空间)中，我试图建立这样一种用基计算的方式，它使学生不会为保持下标一致而烦恼. 由于记号在整本书中都使用，建议采纳这些记号.

在第五章定义的矩阵指数在第十章用于描述单参数群，所以，如果你计划讲单参数群，迟早要讨论矩阵指数. 但不要陷入过多讲授微分方程的诱惑，因为你是在讲授代数，不讲授过多的微分方程是可以理解的.

除去前两节，第七章(群论的进一步讨论)包含了可选的内容. 关于托德-考克斯特算法一节是为讨论生成元和关系用的，否则没有什么用处. 这一节也很有趣.

第八章(双线性型)没有什么特别的. 我没能解决这个主题的主要教学问题，即同一主题有太多的变化，但通过集中于实的和复的情形，我尽量使讨论简短.

在第九章(线性群)，计划把时间花在 SU_2 的几何上. 在我扩充关于 SU_2 一节内容之前，我的学生每年都抱怨，之后他们开始索要补充读物，想学更多的东西. 许多学生在上这门课时不熟悉拓扑学概念，但我发现学生不熟悉拓扑学概念所带来的困难是可以克服的. 的确，这一章是学生了解流形的很好切入点.

若干年来我一直反对把群表示写入第十章，因为它太难了. 但是学生常常要求学习这个主题，我不断地问自己：化学家都能教的东西，为什么我们不能教？最终，依照本书的逻辑结构要求还是纳入了群表示这一主题. 作为回报，埃尔米特型有了一个应用.

你可能发现在第十三章中二次数域的讨论对于一般的代数课程来说太长了. 考虑到这一点，我将第十三章第五节(分解理想)作为一个自然的停顿点.

在入门级的代数课程里，似乎应该提及域的最重要的例子，因此第十五章讨论了函数域. 伽罗瓦理论是否应该放到本科生课程中一直是一个有争议的问题. 但是作为对称讨论的高潮，我把它安排在这里.

对一些较难的练习题标上了星号. 虽然我讲授代数课程多年，但这本书的许多方面仍是试验性的，我非常感谢使用本书的人提出批评和建议.

致谢

我主要想感谢我的学生，多年来是他们使我的课堂如此令人神往. 其中很多人在本书中会看到自己的贡献，我希望你们能原谅我没有一一列举你们的名字.

第 1 版致谢

许多人用了我的讲义并给出了宝贵的建议，其中包括：Jay Goldman，Steve Kleiman，Richard Schafer 和 Joe Silverman. Harold Stark 在数论方面、Gil Strang 在线性代数方面给予了帮助. 此外，下列人员阅读了手稿并给出了建议：Ellen Kirkman，Al Levine，Barbara Peskin 和 John Tate. 我要特别感谢 Barbara Peskin 在她生命的最后一年通读了整本书两遍.

需要数学精确性的插图是 George Fann 和 Bill Schelter 在计算机上制作的，我自己做不来. 感谢 Marge Zabierek，八年里他每年都重录手稿，直到手稿放到计算机里我能自己修订为止. 感谢 Mary Roybal 对手稿的细致而老练的编辑工作.

我在写本书时对其他书参考得不多，但 Birkhoff 和 MacLane 的经典著作以及师从 van der Waerden 的学习对我影响很大. Herstein 的书也一样对我影响深刻，我曾多年用之作为教材. 在 Noble 的书以及 Paley 和 Weichsel 的书中我发现了好的练习题.

第 2 版致谢

许多人对第 1 版做过评论，一些在文中提及了. 我恐怕忘记了提及许多人.

要特别感谢以下这些人：Annette A' Campo 和 Paolo Maroscia 对第 1 版做了仔细的转换和修正；Nathaniel Kuhn 和 James Lepowsky 提出了宝贵意见；Annette 和 Nat 最终教会了我怎样证明正交关系.

感谢那些审阅我的手稿并给出建议的人. 他们是：Alberto Corso，Thomas C. Craven，Sergi Elizade，Luis Finotti，Petter A. Linnell，Brad Shelton，Hema Srinivasan 和 Nik Weaver. Roger Lipsett 阅读了全部修订后的手稿并给出了建议. Brett Coonley 帮忙解决了把手稿变成 TeX 文档时遇到的技术问题.

也感谢在 Pearson 出版社工作的 Caroline Celano，她仔细而全面地对手稿进行了编辑；还有在 Laserwords 工作的 Patty Donovan，她总是优雅地回复我要求进一步校正的请求，尽管她的耐心曾经多次受到考验.

我同 Gil Strang 与 Harold Stark 几乎交谈过所有问题.

最后，感谢麻省理工学院的本科生，他们阅读且评论了修订的文本并修正了错误. 这些读者包括 Nerses Aramyan、Reuben Aronson、Mark Chen、Jeremiah Edwards、Giuliano Giacaglia、Li-Mei Lim、Ana Malagon、Maria Monks 和 Charmaine Sia. 我越来越依赖他们，特别是 Nerses、Li-Mei 和 Charmaine.

“1，2，3，5，4…”

“不！爸爸，是 1，2，3，4，5.”

“哎，如果我想说 1，2，3，5，4，为什么不行呢？”

“不是那样数数的.”

——*Carolyn Artin*

记　　号

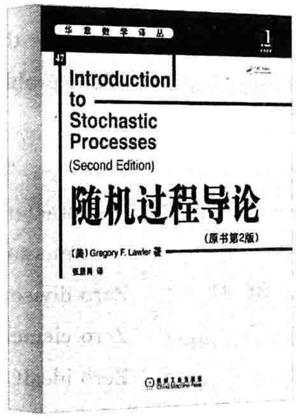
$\langle A\rangle$	理想 A 的类(13.7.2)
A^{t}	矩阵 A 的转置(1.3.1)
A_n	交错群(2.5.6)
$\mathbf{C}$	复数域(2.2.2)
C_n	n 阶循环群(6.4.1)
$C(x)$	元素 x 的共轭类(7.2.3)
$\mathrm{cof}(A)$	矩阵 A 的伴随矩阵(1.6.7)
D_n	二面体群(6.4.1)
$\det A$	矩阵 A 的行列式(1.4.1)
e_i，e_{ij}	标准基向量(1.1.24)，矩阵单位(1.1.21)
F^n	系数在域 F 上的 n 维列向量空间(3.3.6)
$F^{m\times n}$	系数在域 F 上的 $m\times n$ 矩阵空间(3.3.6)
$\mathbf{F}_p$	整数模 p 的域(3.2.4)
GL_n	一般线性群(2.2.4)
I	单位矩阵(1.1.11)，二十面体群(6.12.1)
$\mathrm{im}\varphi$	映射 φ 的像(2.5.4)
$\ker\varphi$	同态 φ 的核(2.5.5)，(4.1.5)
K^G	固定域(16.5.1)
l^∞	有界序列空间(3.7.2)
M，M_n	平面等距群，n 维空间的等距群(第六章第二节)
$\mathbf{N}$	正整数集合，又叫自然数(A.2.1)
$N(H)$	子群 H 的正规化子(7.6.1)
$n!$	n 的阶乘：整数 1，2，…，n 的乘积
$\binom{n}{k}$	二项式系数(A.1.1)
O_n	正交群(6.7.3)，(9.1.2)
$O_{3,1}$	洛仑兹群(9.1.5)
PSL_n	射影群(9.8.1)
$\mathbf{R}$	实数域(2.2.2)
R^+	环 R 的加群(2.1.1)
$R^\times$	环 R 的可逆元构成的乘法群(2.1.1)

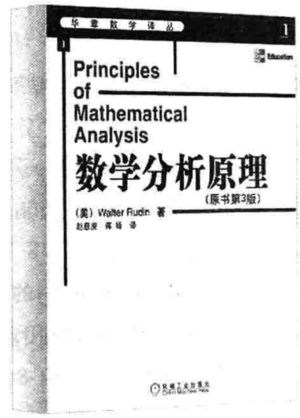
S_n	对称群(2.2.5)
$\mathbf{S}^n$	n 维球面(第九章第二节)
SL_n	特殊线性群(2.2.11)，(9.1.3)
SO_n	特殊正交群(5.1.11)，(9.1.3)
SP_{2n}	辛群(9.1.4)
SU_n	特殊酉群(9.1.3)
T	四面体群(6.12.1)
U_n	酉群(8.3.14)，(9.1.3)
$\langle x\rangle$	由元素 x 生成的子群(2.4.1)
Z	群的中心
$\mathbf{Z}$	整数环(2.2.2)
$Z(x)$	元素 x 的中心化子(7.2.2)
ζ_n	n 次单位根 $e^{2\pi i/n}$(12.4.7)
$\lfloor\mu\rfloor$	小于等于 μ 的最大整数：μ 的下取整(13.7.7)
ω	3 次单位根 $e^{2\pi i/3}$(10.4.14)
$\approx$	指两个结构是同构的，比如 $G\approx G'$(2.6.3)
$\equiv$	同余，如在 $a\equiv b(\bmod n)$中所示(2.9.1)，参见(2.8.2)和(2.7.14)
$*$	如果 A 是复矩阵，则 A^* 是伴随矩阵$\overline{A}^t$(8.3.5)
	在矩阵表示中，$*$ 表示未定元素
	带星号的练习是较难的
$\oplus$	直和(3.6.5)，(14.7.2)

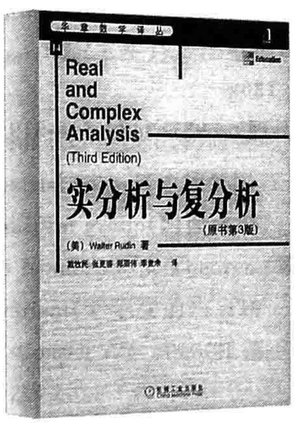
如果 S 和 T 为集合，我们使用如下记号：

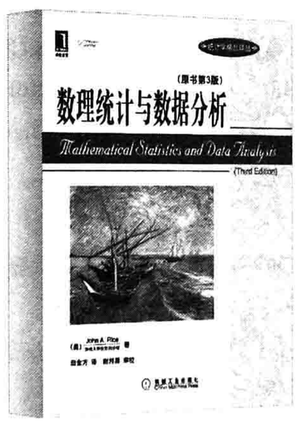
$\|S\|$	集合 S 中元素的个数，也称为集合 S 的阶
$[S]$	S 的子集，可看作 S 的子集的集合中的元素(2.7.8)
$s\in S$	s 是 S 的一个元素
$S\subset T$	S 是 T 的子集，或 S 包含在 T 中．换言之，S 的每个元素也是 T 的元素
$T\supset S$	T 包含 S，这与 $S\subset T$ 是一回事
$S<T$	S 是 T 的真子集，意指它是子集，且 T 含有不是 S 的成员的元素
$T>S$	这与 $S<T$ 是一回事
$S\cap T$	集合的交，它是 S 和 T 所有公共元素的集合
$S\cup T$	集合的并，它是包含在集合 S 和 T 之一中的元素的集合
$S\times T$	集合的积．其元素是有序对(s, t)：$S\times T=\{(s, t)\mid s\in S, t\in T\}$
$\varphi:S\to T$	从 S 到 T 的一个映射，是其定义域为 S 而值域为 T 的一个函数
$s\rightsquigarrow t$	这个弯弯的箭头指出所讨论的映射将把元素 s 映射为元素 t，即 $\varphi(s)=t$
■	文中话题的转移符号，如证明或例子结束了，回到文中的主线

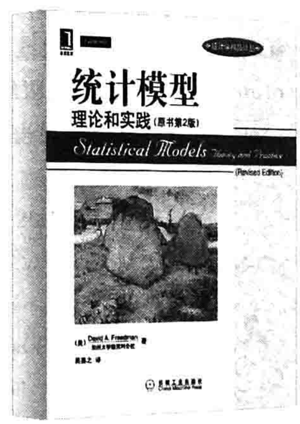
推荐阅读











■ **时间序列分析及应用：R语言（原书第2版）**
作者：Jonathan D. Cryer Kung-Sik Chan
ISBN：978-7-111-32572-7
定价：48.00元

■ **随机过程导论（原书第2版）**
作者：Gregory F. Lawler
ISBN：978-7-111-31544-5
定价：36.00元

■ **数学分析原理（原书第3版）**
作者：Walter Rudin
ISBN：978-7-111-13417-6
定价：28.00元

■ **实分析与复分析（原书第3版）**
作者：Walter Rudin
ISBN：978-7-111-17103-9
定价：42.00元

■ **数理统计与数据分析（原书第3版）**
作者：John A. Rice
ISBN：978-7-111-33646-4
定价：85.00元

■ **统计模型：理论和实践（原书第2版）**
作者：David A. Freedman
ISBN：978-7-111-30989-5
定价：45.00元

目　录

第一章 矩　　阵

有了一些增加或减少，

或在上面添加一点或拿走一点，

人们在第一眼还是会说大小没变.

——*Leonhard Euler* ⊖

矩阵是本书的中心角色，它是理论的重要组成部分，并且许多具体例子都基于矩阵. 因而，发展处理矩阵的方法是非常重要的. 因为矩阵遍及数学的各个分支，所以这里用到的技巧在其他地方也一定会用到.

第一节 基本运算

设 m 和 n 是正整数，一个 $m\times n$ 矩阵是按 m 行 n 列矩形排列的 mn 个数：

【1.1.1】
$$\begin{array}{cc} & n\text{ 列} \\ m\text{ 行} & \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

例如，$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$是 2×3 矩阵(两行三列). 我们通常用大写字母 A 表示矩阵.

矩阵中的数称为矩阵元素，用 a_{ij} 表示，其中 i，j 为指标(整数)，$1\leqslant i\leqslant m$，$1\leqslant j\leqslant n$. 指标 i 称为行指标，而 j 称为列指标. 因而 a_{ij} 是位于矩阵 i 行 j 列的元素：

$$\begin{array}{cc} & j \\ i & \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \end{array}$$

在上面的例子中，$a_{11}=2$，$a_{13}=0$，而 $a_{23}=5$. 有时把元素为 a_{ij} 的矩阵记为(a_{ij}).

一个 $n\times n$ 的矩阵叫做方阵. 一个 1×1 的矩阵$[a]$只含有一个元素，我们不区分这样的矩阵和它的元素.

一个 $1\times n$ 的矩阵是一个 n 维行向量. 当矩阵只有一行时，我们省略行指标 i，而将其记成一个行向量：

$$[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] \quad \text{或} \quad (a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n)$$

⊖ 这是欧拉《代数》一书的第一句话，《代数》一书于 1770 年在圣彼得堡出版.

逗号在行向量中可以有，也可以没有．同样，一个 $m\times1$ 的矩阵是一个 m 维列向量：

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

在本书中，多数情况我们不区分一个 n 维列向量和一个 n 维空间的点坐标．在少数几个需要区分的地方，我们会明确指出来．

矩阵的加法和向量的加法一样．令 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$ 是两个 $m\times n$ 的矩阵，它们的和 $A+B$ 是一个 $m\times n$ 矩阵 $S=(s_{ij})$，其中 $s_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$．因此

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 5 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

只有两个同样形状的矩阵(即它们都是 m 行 n 列的矩阵)才能相加．

矩阵和数的标量乘法与向量的标量乘法一样定义．一个数 c 乘一个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$ 得到一个 $m\times n$ 矩阵 $B=(b_{ij})$，其中 $b_{ij}=c\cdot a_{ij}$ 对于所有 i，j 都成立．因此

$$2\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

数也称为标量．我们假设标量都是实数．在后面的章节里，还会出现其他标量．只要记住，除了偶尔提到实二维或实三维空间的几何外，本章的结果对于复数标量也是成立的．

矩阵乘法是一个复杂的运算．我们先学习同样大小(比如说 m)的一个行向量 A 和一个
2 列向量 B 的乘积 AB．如果 A 与 B 的元素分别记为 a_i 与 b_i，积 AB 是一个 1×1 的矩阵，即标量

【1.1.2】
$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_mb_m$$

因此，

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}=1-3+20=18$$

当我们把 A 和 B 看成带有下标的向量时，这个定义的作用是很明显的．例如，考虑含有 m 种成分的糖果条，用 a_i 表示每一糖果条中(成分)$_i$ 的克数，b_i 表示每克(成分)$_i$ 的价格，则矩阵乘积 AB 算出每个糖果条的价格：

(克／条)·(价格／克)＝(价格／条)

一般地，对于两个矩阵 $A=(a_{ij})$ 和 $B=(b_{ij})$，只有当 A 的列数等于 B 的行数时它们的积才有定义．如果 A 是一个 $\ell\times m$ 矩阵，且 B 是一个 $m\times n$ 矩阵，这时它们的积是一个 $\ell\times n$ 矩阵．用符号表示，即

$$(\ell\times m)\cdot(m\times n)=(\ell\times n)$$

积矩阵中的元素由矩阵 A 的所有行和矩阵 B 的所有列的乘积按照(1.1.2)的规则计算．如果用 $P=(p_{ij})$表示积矩阵 AB，则

【1.1.3】
$$p_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{im}b_{mj}$$

这就是矩阵 A 的第 i 行和 B 的第 j 列的乘积．

$$\boxed{a_{i1}\quad\cdots\quad a_{im}}\ \boxed{\begin{matrix} b_{1j}\\ \vdots \\ b_{mj}\end{matrix}}=\boxed{\begin{matrix} & \vdots & \\ \cdots & p_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{matrix}}$$

例如，

【1.1.4】
$$\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\-1\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\18\end{bmatrix}$$ 3

矩阵乘法的这种定义方法提供了非常方便的计算工具．回到糖果条的例子，设有 ℓ 种糖果条，则可构造一个 $\ell\times m$ 矩阵 A，使其第 i 行给出(条)$_i$ 的各成分的克数．如果要算 n 年中每一年的价格，则可以构造一个矩阵 B，使其第 j 列是(年)$_j$ 的各成分的价格．矩阵乘积 $AB=P$ 算出每个糖果条的价格：$p_{ij}=$(条)$_i$ 在(年)$_j$ 的价格．

引入矩阵概念的理由之一是为了提供一个书写线性方程组的简明形式．线性方程组

$$\begin{aligned}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n&=b_1\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n&=b_2\\&\vdots\\a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n&=b_m\end{aligned}$$

可利用矩阵记号写为

【1.1.5】
$$AX=B$$

其中 A 为系数矩阵，X 和 B 是列向量，AX 是矩阵乘积：

$$\boxed{\quad A\quad}\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

我们简称这个形式的方程为“方程”或“方程组”．

矩阵方程

$$\begin{bmatrix}2&1&0\\1&3&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\18\end{bmatrix}$$

表示如下三个未知量两个方程的方程组：

$$\begin{aligned}2x_1+x_2&=1\\x_1+3x_2+5x_3&=18\end{aligned}$$